数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 129-136

S_3 を生成する2つの宮本インボリューションを持つ VOA

山内 博

筑波大学大学院数学研究科 4 年次

e-mail: hirocci@math.tsukuba.ac.jp

2002 年 12 月 18 日 (水)

1 はじめに

今回の話では筑波大学の宮本雅彦氏によって始められた、ムーンシャイン頂点作用素代数に含まれる 2 つの共形元が生成する部分代数の構造について講演しました。これは前回熊本での集会で佐久間氏がされた講演の続きにあたるものです。前回の講演では宮本氏の挙げた候補の一つを実際に構成できるということを話しました。その後の研究で宮本氏の挙げた候補のうち私達が構成したもののみが存在することが分り、その一意性を証明することができました。この事実をムーンシャイン頂点作用素代数へ応用することでモンスター群の 3A 元が予てから予想されていた 3-状態 Potts 模型の持つ $\mathbb{Z}_3$-対称性を用いて実現できることなどが分りました。講演の前半ではこれらムーンシャイン頂点作用素代数との関連について、後半では単純カレント拡大の一般論を紹介し、自己同型群による固定点からなる軌道体頂点作用素代数に関する有名な予想について話しました。ここでもこの順に従って結果を紹介していきたいと思います。

2 宮本の自己同型

頂点作用素代数 (VOA) V が**ムーンシャイン型**であるとは、V は $\mathbb{R}$-上のベクトル空間であって、次数分解 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ で $V_0=\mathbb{R}\mathbb{1}$, $V_1=0$ を持ち、さらに条件 $\langle\mathbb{1},\mathbb{1}\rangle=1$ から一意的に定まる V 上の不変内積[1]$\langle\cdot,\cdot\rangle$ が正定値であることとします。ムーンシャイン型 VOA は定義から単純であることが分ります。また、V が $\mathbb{C}$ 上の頂点作用素代数であっても、適切な実形 $V_{\mathbb{R}}$ がとれて $V_{\mathbb{R}}$ がムーンシャイン型であるときに、その実形を念頭に

[1] V 上の不変内積の空間は $V_0/L(1)V_1$ と線型同型であることが知られている。

置いて $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ をムーンシャイン型と呼ぶこともあります。ムーンシャイン型 VOA の例としては、ムーンシャイン VOA $V^\natural$ はもちろんのこと、ヴィラソロ VOA $L(c,0)$[2]や適切な格子から得られる格子 VOA の軌道体 V_L^+ などがあります。

ムーンシャイン型 VOA の大きな特徴はウェイト 2 の部分空間 V_2 に不変内積を持つ可換非結合代数の構造が入ることです。一般にこの代数を V の**Griess 代数**と呼びます。Griess 代数 V_2 の巾等元と V における共形元は一対一に対応しています。ここで $e \in V$ が**共形元**とは、その頂点作用素 $Y(e,z)$ を $Y(e,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^e(n) z^{-n-2}$ と展開したとき、各作用素 $L^e(n)$ がヴィラソロ交換関係式

$$[L^e(m), L^e(n)] = (m-n)L^e(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_e$$

を満たす元のことです。上の式に現れるスカラー c_e は e の中心電荷と呼ばれるます。共形元 e は V においてヴィラソロ VOA を部分代数として生成します。それを $\mathrm{Vir}(e)$ で表すことにします。もし $\mathrm{Vir}(e)$ が有理型になるとき、e は有理型共形元と呼ばれます。私の話の中で重要になるのは中心電荷 1/2 の有理型共形元、即ち $\mathrm{Vir}(e) \simeq L(\frac{1}{2},0)$ となる $e \in V_2$ です。$L(\frac{1}{2},0)$ の既約加群は $L(\frac{1}{2},0)$, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ の 3 つであり、全ての $L(\frac{1}{2},0)$-加群は完全加約であることが知られています。それゆえ、有理型共形元 e を使って V を次のように分解することができます:

$$V = L(\tfrac{1}{2},0)\otimes T_e(0) \bigoplus L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes T_e(\tfrac{1}{2}) \bigoplus L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16})\otimes T_e(\tfrac{1}{16}). \tag{2.1}$$

ここで $T_e(h)$ は $\mathrm{Vir}(e)$ に対する最高ウェイト h の最高ウェイトベクトルの空間を表しています。この分解を用いて、V の線型同型 τ_e を $L(\frac{1}{2},0)\otimes T_e(0) \oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes T_e(\frac{1}{2})$ 上 1 倍、$L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\otimes T_e(\frac{1}{16})$ 上 -1 倍するものとして定めます。τ_e が定義可能なのは等型成分に関する分解 (2.1) に基づいていることから分ります。この線型同型 τ_e は単なる線型写像ではなく、V の VOA 構造に関する自己同型になることを宮本氏は示しました。そのため、中心電荷 1/2 の有理型共形元 e から V の自己同型 τ_e を定めることができます。この対応を**宮本の自己同型**もしくは**宮本インボリューション**といいます。

3 A_2 型の宮本インボリューションに対応する VOA

宮本の自己同型とモンスター単純群の関係について次の結果が知られています。

> **事実** [Conway, 宮本]　ムーンシャイン VOA $V^\natural$ に含まれる中心 1/2 の有理型共形元 e の定める自己同型 τ_e はモンスター単純群 $\mathrm{Aut}(V^\natural) = \mathbb{M}$ の 2A 共役類に含まれており、さらにこの対応：$V_2^\natural \ni e \mapsto \tau_e \in 2\mathrm{A} \subset \mathbb{M}$ は一対一である。

[2]一般に $L(c,h)$ で中心電荷 c, 最高ウェイト h の既約ヴィラソロ加群を表します。

この事実から、ムーンシャイン VOA $V^\natural$ の研究における $L(\frac{1}{2},0)$ の重要さが分ることと思います。さて、モンスター単純群において 2A 共役類はとても興味深い性質を持っています。その一つに、Y_{553} 型のコクセター図形とモンスター群の関係があります。モンスターの生成系として、Y_{553} 型のコクセター図形をなす 14 個の 2A 共役類がとれることが知られています。この事実を $V^\natural$ を通して VOA の立場から見てみると、$V^\natural$ の内部には 14 個の中心電荷 1/2 の有理型共系元であって、それらの宮本インボリューションのコクセター図形が Y_{553} 型になるものが存在することが分ります。このことから次の予想が自然に考えられます。

予想 1 $V^\natural$ はその宮本インボリューションのコクセター図形が Y_{553} 型をなすような 14 個の中心電荷 1/2 の有理型共形元で生成されている。

コクセター図形が一番単純な場合である頂点が一つ、即ち A_1 型コクセター図形に対応する VOA は定義から中心電荷 1/2 の有理型共形元 e から生成されるヴィラソロ VOA $\mathrm{Vir}(e) \simeq L(\frac{1}{2},0)$ であり、その構造は良く調べられています。そこで次に考えるべき問題は A_2 型、即ち 2 つの中心電荷 1/2 の有理型共形元 e,f であって、それらの宮本インボリューションの積 $\tau_e\tau_f$ の位数が 3 になる場合の $\mathrm{VA}(e,f)$ の構造です。ここで $\mathrm{VA}(e,f)$ は 2 元 e,f で生成される部分代数を表します[3]。

$$A_1:\ \underset{\tau_e}{\circ}\ \xleftrightarrow{1:1}\ \mathrm{VA}(e)\simeq L(\tfrac{1}{2},0) \qquad A_2:\ \underset{\tau_e}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\tau_f}{\circ}\ \xleftrightarrow{1:1}\ \mathrm{VA}(e,f)=??$$

宮本氏は一般のムーンシャイン型 VOA の内部において生成される $\mathrm{VA}(e,f)$ を調べ、次の結果を得ました。

定理 [宮本] $|\tau_e\tau_f|=3$ の場合、e と f の内積 $\langle e,f\rangle$ は $13/2^{10}$ 又は $1/2^8$ であり、

(i) $\langle e,f\rangle = 13/2^{10}$ の場合、$\mathrm{VA}(e,f)\supset L(\frac{4}{5},0)\otimes L(\frac{6}{7},0)$ であり、その Griess 代数の次元は 4 である。

(ii) $\langle e,f\rangle = 1/2^8$ の場合、$\mathrm{VA}(e,f)\supset L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{21}{22},0)$ であり、その Griess 代数の次元は 3 である。

上に現れる中心電荷の値 1/2, 4/5, 6/7, 21/22 は全てヴィラソロ代数のユニタリー系列に現れるものであり、これらは格別重要なものです。ムーンシャイン VOA $V^\natural$ において、$\tau_e\tau_f$ が位数 3 であるならばそれはモンスターの 3A 共役類もしくは 3C 共役類に含まれており、$\langle e,f\rangle = 13/2^{10}$ の場合が 3A に、$\langle e,f\rangle = 1/2^8$ の場合が 3C に対応していることが Conway の結果から分ります。このうち Y_{553} 型コクセター図形の一辺に対応するのは 3A 共役類の方であり、そのため $\langle e,f\rangle = 13/2^{10}$ の場合が特に興味が惹かれます。

[3] VA=Vertex Algebra. 一般にこの部分代数は頂点代数になってしまうため、VOA でなく VA を用いた。

定理 [宮本]　$\langle e,f\rangle = 13/2^{10}$ の場合、$\mathrm{VA}(e,f)$ の Griess の構造は一意に定まる。その複素化 $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ は $\mathbb{Z}_3$-次数 $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f) = X^0 \oplus X^1 \oplus X^2$ を持ち、これは次のいずれかで与えられる:

(i)　$X^0 = \{L(\frac{4}{5},0) \oplus L(\frac{4}{5},3)\} \otimes L(\frac{6}{7},0)$,　$X^1 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3})^+ \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})$,
$X^2 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3})^- \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})$.

(ii)　$X^0 = L(\frac{4}{5},0) \otimes \{L(\frac{6}{7},0) \oplus L(\frac{6}{7},5)\}$,　$X^1 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})^+$,
$X^2 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})^-$.

(iii)　$X^0 = L(\frac{4}{5},0) \otimes L(\frac{6}{7},0) \oplus L(\frac{4}{5},3) \otimes L(\frac{6}{7},5)$,　$X^1 = \{L(\frac{4}{5},\frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})\}^+$,
$X^2 = \{L(\frac{4}{5},\frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})\}^-$.

(iv)　$X^0 = \{L(\frac{4}{5},0) \oplus L(\frac{4}{5},3)\} \otimes \{L(\frac{6}{7},0) \oplus L(\frac{6}{7},5)\}$,　$X^1 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3})^+ \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})^\pm$,
$X^2 = L(\frac{4}{5},\frac{2}{3})^- \otimes L(\frac{6}{7},\frac{4}{3})^\mp$.

さらに、その軌道体 $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{\langle\tau_e,\tau_f\rangle}$ は (i), (ii), (iii) の場合には $L(\frac{4}{5},0) \otimes L(\frac{6}{7},0)$ であり、(iv) の場合は $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{\langle\tau_e,\tau_f\rangle} \supsetneq L(\frac{4}{5},0) \otimes L(\frac{6}{7},0)$ である。

上に挙げたものは全て候補であり、どれが実際に存在するかまでは決定されていませんでした。そこで私と筑波大学の佐久間伸也は実際に (iv) が存在することを示し、7 月に熊本で発表しました。

定理 [佐久間-Y]　候補 (iv) は実際に存在する。

その後、さらに次の結果を証明することができました。

定理 [佐久間-Y]　候補 (i)–(iv) のうち、求める構造が入るのは (iv) のみである。

ここでは証明を簡単に書き記したいと思います。

【証明】　先程の定理から $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{\langle\tau_e,\tau_f\rangle} \neq L(\frac{4}{5},0) \otimes L(\frac{6}{7},0)$ を示せば良い。そこで $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{\langle\tau_e,\tau_f\rangle} = L(\frac{4}{5},0) \otimes L(\frac{6}{7},0)$ として矛盾を導く。$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{(\tau_e\pm)}$ で $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ の τ_e による固有値 ±1 の固有空間を表すことにすると、次の直交分解ができる。

$$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f) = \mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{(\tau_e+)} \perp \mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)^{(\tau_e-)}.$$

$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ の Griess 代数の構造は宮本によって決定されており、$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_2^{(\tau_e+)}$ の次元は 3 であり、$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_2^{(\tau_e-)}$ の次元は 1 である。このことから $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_n^{(\tau_e-)}$ の次元は n が小

さい範囲では$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_n^{(\tau_e+)}$のそれよりずっと小さいことが分る。それゆえ、$n \le 5$に対して$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_n^{(\tau_e-)}$の次元を直接計算で求めることができる。まず$\dim \mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_3^{(\tau_e-)} = 3$が求まり、これから候補(i)のみが生き残る。さらに計算で$\dim \mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)_5^{(\tau_e-)} = 12$を示すことができるが、(i)の場合これは11であり、矛盾が生じる。よって$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f) \ne L(\frac{4}{5},0)\otimes L(\frac{6}{7},0)$である。 ∎

ここでの計算は実はVA(e,f)のGriess代数から全て求まることが分ります。即ちGriess代数の決定がよりウェイトの高い部分空間をも決定していることが分るのです。それゆえ、候補(iv)が実際に存在することからその一意性も同時に得ることになる仕組みになっています。

この定理をムーンシャインVOA $V^\natural$に応用しましょう。$V^\natural$にはもちろん$\tau_e\tau_f \in 3\mathrm{A}$となる2つの共形元$e,f$が入っているため、それらが生成する部分代数VA$(e,f)$もまた$V^\natural$の内部に存在します。このことから特に、$V^\natural$には2つの部分VOAとして$L(\frac{4}{5},0)\oplus L(\frac{4}{5},3)$と$L(\frac{6}{7},0)\oplus L(\frac{6}{7},5)$が入っていることが分ります。前者は3-状態Potts模型、後者は3臨界3-状態Potts模型と呼ばれ、それぞれ位数3の対称性を持っていることが知られています。これらについては次節で詳しく述べます。

定理 ムーンシャインVOA $V^\natural$にはそれぞれ$L(\frac{4}{5},0)\oplus L(\frac{4}{5},3)$と$L(\frac{6}{7},0)\oplus L(\frac{6}{7},5)$が含まれている。これらのフュージョン代数が持つ$\mathbb{Z}_3$-対称性はモンスターの3A元に持ちあがる。

4 $\mathbb{Z}_3$-単純カレント拡大としての捉え方

ここでは$\langle e,f\rangle = 13/2^{10}$の場合のVA$(e,f)$の構造をより詳しく述べたいと思います。その前にヴィラソロVOAに関する結果をいくつか述べておきます。

定理 [北詰–宮本–山田] ヴィラソロVOAの拡大$L(\frac{4}{5},0)\oplus L(\frac{4}{5},3)$は有理型であり、その既約加群は次で与えられる:

$$A^0 := L(\tfrac{4}{5},0)\oplus L(\tfrac{4}{5},3),\quad A^1 := L(\tfrac{4}{5},\tfrac{2}{3})^+,\quad A^2 := L(\tfrac{4}{5},\tfrac{2}{3})^-,$$
$$B^0 := L(\tfrac{4}{5},\tfrac{2}{5})\oplus L(\tfrac{4}{5},\tfrac{7}{5}),\quad B^1 := L(\tfrac{4}{5},\tfrac{1}{15})^+,\quad B^2 := L(\tfrac{4}{5},\tfrac{1}{15})^-.$$

そしてこれらのフュージョン規則は次で与えられる:

$$A^i\times A^j = A^{i+j},\quad A^i\times B^j = B^{i+j},\quad B^i\times B^j = A^{i+j}+B^{i+j}.$$

ここで$i,j\in\mathbb{Z}_3$である。

この結果から、$L(\frac{4}{5},0)\oplus L(\frac{4}{5},3)$ のフュージョン代数には自然な $\mathbb{Z}_3$-対称性があることが分ります。同様の事実が $L(\frac{6}{7},0)$ の場合にも成り立ちます。

定理 [Lam-Lam-Y] ヴィラソロ VOA $L(\frac{6}{7},0)$ の拡大 $L(\frac{6}{7},0)\oplus L(\frac{6}{7},5)$ は有理型であり、その既約加群は次で与えられる:

$$\begin{aligned} &C^0 := L(\tfrac{6}{7},0)\oplus L(\tfrac{6}{7},5), \quad C^1 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{4}{3})^+, \quad C^2 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{4}{3})^-,\\ &D^0 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{1}{7})\oplus L(\tfrac{6}{7},\tfrac{22}{7}), \quad D^1 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{10}{21})^+, \quad D^2 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{10}{21})^-,\\ &E^0 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{5}{7})\oplus L(\tfrac{6}{7},\tfrac{12}{7}), \quad E^1 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{1}{21})^+, \quad E^2 := L(\tfrac{6}{7},\tfrac{1}{21})^-. \end{aligned}$$

そしてこれらのフュージョン規則は次で与えられる:

$$\begin{aligned} &C^i\times C^j = C^{i+j}, \quad C^i\times D^j = D^{i+j}, \quad C^i\times E^j = E^{i+j}, \quad D^i\times D^j = C^{i+j}+E^{i+j},\\ &D^i\times E^j = D^{i+j}+E^{i+j}, \quad E^i\times E^j = C^{i+j}+D^{i+j}+E^{i+j}. \end{aligned}$$

ここで $i,j\in\mathbb{Z}_3$ である。

ここまで紹介した2つの拡大はどちらも単純カレントを用いた拡大になっています。ここで単純カレントの定義を与えておきましょう。

定義 V-加群 M が**単純カレント**であるとは、任意の既約 V-加群 N に対し、フュージョン積 $M\boxtimes_V N$ がまた既約になることである。

上で準備した記法を用いると、3A 共役類に対応する $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ は次のように表せます。

$$\mathrm{VA}(e,f) = A^0\otimes C^0\oplus A^1\otimes C^1\oplus A^2\otimes C^2 \text{ もしくは } A^0\otimes C^0\oplus A^1\otimes C^2\oplus A^2\otimes C^1.$$

これらはともに $A^0\otimes C^0$ の単純カレントを用いた拡大ですが、実はどちらも同型になり、同値な拡大になっています。

定理 [佐久間-Y] 上に挙げた2つの拡大は互いに同型である。即ち、$\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ には $A^0\otimes C^0$ の $\mathbb{Z}_3$-単純カレント拡大としての構造が一意に入る。

この定理から $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)$ に入る VOA-構造の一意性が分るので、以後 $\mathbb{C}\mathrm{VA}(e,f)=U=A^0\otimes C^0\oplus A^1\otimes C^1\oplus A^2\otimes C^2$ と置くことにします。簡約のため、$U^i=A^i\otimes C^i$ $(0\le i\le 2)$ とおきます。U の表現論は単純カレントの一般論で決定することができます。U^0-加群として U^i らはすべて単純カレントであり、任意の既約 U^0-加群 M に対し、$i\not\equiv j \mod 3$ ならば

$U^i \boxtimes_{U^0} M \not\simeq U^j \boxtimes_{U^0} M$ となっています。それゆえ、$U \boxtimes_{U^0} M = M \oplus (U^1 \boxtimes_{U^0} M) \oplus (U^2 \boxtimes_{U^0} M)$ となります。この事実を全ての U-加群は $\mathbb{Z}_3$**-安定である**といいます。即ち、全ての U-加群には U の作用と両立する自然な $\mathbb{Z}_3$-次数が入っています。$\mathbb{Z}_3$-安定な既約 U-加群の構造は U の部分代数である U^0 から見た構造で一意に決ることが分っています。このことを使って次の定理を示すことができます。

定理 [佐久間–Y]　U^0 の $\mathbb{Z}_3$-単純カレント拡大 U は有理型であり、その既約加群は次の 6 個で与えられる:

$$\mathrm{Ind}_{U^0}^U(X \otimes Y) := U \boxtimes_{U^0} (X \otimes Y), \quad X = A^0, B^0, \quad Y = C^0, D^0, E^0.$$

また、これらのフュージョン規則は次で計算できる:

$$\dim \begin{pmatrix} \mathrm{Ind}_{U^0}^U L \\ \mathrm{Ind}_{U^0}^U M \quad \mathrm{Ind}_{U^0}^U N \end{pmatrix}_U = \dim \begin{pmatrix} U \boxtimes_{U^0} L \\ M \qquad N \end{pmatrix}_{U^0}.$$

この定理から U の通常の表現 (= ツイスト表現でないもの) はほぼ決定できたことになります。U の構造については、ヴィラソロ VOA のユニタリー系列 $L(\frac{4}{5}, 0) \otimes L(\frac{6}{7}, 0)$ を使ってきれいに表示することができます。さらに U は 2 つの有理型共形元で生成されているという強い特徴を持っています。Griess 代数の構造から、U には中心電荷 1/2 の有理型共形元はちょうど e, f, $e^{\tau_f} = f^{\tau_e}$ の 3 個あり、これらは U の自己同型で自由に置換することができます。このことから次の主張を得ることができます。

定理 [佐久間–Y]　U の全自己同型群は τ_e, τ_f で生成されており、それは S_3 と同型である。

5　軌道体 VOA に関する予想との関連

最後に、VOA の理論における有名な予想との関係について述べます。

予想 2　V を単純 VOA, G を $\mathrm{Aut}(V)$ の有限部分群とするとき、

(i) V が有理型ならば軌道体 V^G もまた有理型であり、

(ii) 全ての既約 V^G-加群はある $g \in G$ が存在して g-ツイスト V-加群の V^G-部分加群になっている。

(i) に関して、$U^{\langle\tau_e,\tau_f\rangle} = L(\frac{4}{5},0)\otimes L(\frac{6}{7},0)\oplus L(\frac{4}{5},3)\otimes L(\frac{6}{7},5)$ であり、これは有理型 VOA $L(\frac{4}{5},0)\otimes L(\frac{6}{7},0)$ の $\mathbb{Z}_2$-単純カレント拡大なので有理型になります。また、$U^{\langle\tau_e\tau_f\rangle} = U^0$ も有理型であることが分っています。

(ii) に関連して、最近私は次の結果を得ました。U の自己同型 ζ を $\zeta|_{U^i} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,i/3}\cdot \mathrm{id}_{U^i}$ で定めます。このとき U^0-加群と U の ζ-ツイスト表現には次のような関係があります。

定理 [Y]　全ての既約 U^0-加群は一意的にある ζ^i-ツイスト U-加群に持ち上げることができる。より精密に、

(i) $\mathrm{Ind}_{U^0}^{U}(X^0\otimes Y^0)$, $X=A,B$, $Y=C,D,E$ は通常 U-加群になる。

(ii) $\mathrm{Ind}_{U^0}^{U}(X^0\otimes Y^1)$, $X=A,B$, $Y=C,D,E$ は ζ-ツイスト U-加群になる。

(iii) $\mathrm{Ind}_{U^0}^{U}(X^0\otimes Y^2)$, $X=A,B$, $Y=C,D,E$ は ζ^2-ツイスト U-加群になる。

よって予想 2 は $(U,\langle\zeta\rangle)$ に対して成り立っている。

この定理の証明には捩れ二重環 (twisted double) の表現論を用います。講演ではこのことにも触れましたが、紙面の都合からここでは割愛させて頂きます。詳しくは参照文献 [Y] をご覧下さい。

参考文献

[C] J. H. Conway, A simple construction for the Fischer–Griess monster group, *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[DLiM] C. Dong, H. Li and G. Mason, Compact Automorphism Groups of Vertex Operator Algebras, *IMRN* **18** (1996), 913–921.

[KMY] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (2000), 379–395.

[LLY] C. H. Lam, N. Lam and H. Yamauchi, Extension of Virasoro vertex operator algebra by a simple module, to appear in *IMRN*.

[M1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[M2] M. Miyamoto, VOAs generated by two conformal vectors whose τ-involutions generate S_3, to appear in *J. Algebra*.

[SY] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating S_3, math.QA/0207117, to appear in *J. Algebra*.

[Y] H. Yamauchi, Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras, math.QA/0211255.