数理解析研究所講究録 1329 巻 2003 年 1-7



# 組合せ調和写像と超剛性 — SINGULAR TARGET の場合

東北大学理学研究科　井関裕靖 (HIROYASU IZEKI)
MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY

名古屋大学多元数理科学研究科　納谷 信 (SHIN NAYATANI)
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY

## 1. 序論

本稿は [4] の続編であり, 引き続き組合せ調和写像の離散群の超剛性への応用について考察する. 本稿では, 像空間が特異な非正曲率空間の場合を扱う. 本研究の背景や超剛性の例, その組合せ調和写像による証明の筋書きについては, [4] の序論を参照して頂きたい.

本稿では, まず, アダマール空間の定義, 基本事項および例について述べる. 次に, 単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義し, エネルギーを最小化する同変写像の存在およびその性質について述べる. 最後に, 応用として一つの固定点定理を与える. その証明は, エネルギー最小同変写像にボホナー松島型公式を適用することによってなされる.

## 2. アダマール空間

本節では, アダマール空間の定義, 基本事項および例について述べる.

距離空間 $(Y,d)$ が**測地的空間** (geodesic space) であるとは, $Y$ の任意の 2 点 $p,q$ に対して $p$ から $q$ への測地線, すなわち曲線 $c:[a,b]\to Y$ で

$$d(c(t),c(t'))=|t-t'|,\quad {}^{\forall}t,t'\in[a,b]$$

という性質を持つものが存在するときをいう. $\Delta$ を $Y$ 内の測地三角形とする. すなわち, $\Delta$ は $Y$ の 3 点 $p,q,r$ とそれらを結ぶ 3 つの測地線分を指定したものである. $\Delta$ に対応して, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の三角形 $\overline{\Delta}=\overline{pqr}$ を

$$d(p,q)=|\overline{p}-\overline{q}|,\quad d(q,r)=|\overline{q}-\overline{r}|,\quad d(r,p)=|\overline{r}-\overline{p}|$$

をみたすようにとる. このとき, $\Delta$ の周上の任意の 2 点 $x,y$ と対応する $\overline{\Delta}$ 上の 2 点 $\overline{x},\overline{y}$ に対して

$$d(x,y)\le|\overline{x}-\overline{y}|$$

が成り立つとき, $\Delta$ は CAT(0) 条件をみたすという. 測地的空間 $(Y,d)$ が**アダマール空間** (Hadamard space) であるとは, $(Y,d)$ が距離空間として完備であり, $Y$ 内の任意の測地三角形が CAT(0) 条件をみたすときをいう. アダマール空間内の任意の 2 点を結ぶ測地線は一意的である. また, アダマール空間は可縮である.

以下, $(Y, d)$ をアダマール空間とする. $p \in Y$ に対して, $p$ における $Y$ の接錐 $TC_pY$ とその上の「内積擬き」および距離が定義できる. 詳細は文献 [3] を参照してもらうことにして, ここでは概略を述べておく. まず, $p \in Y$ を始点とする非自明な測地線 $c, c'$ の間の角度 $\angle_p(c, c')$ を比較三角形の角度を使って定義することができる. $p$ を始点とする非自明な測地線全体の集合に, 角度が 0 のときに同値とする同値関係を定め, 同値類全体の集合を $S_pY$ で表す. $S_pY$ は $p$ における**方向空間** (space of direction) とよばれる. 測地線 $c$ の属する同値類を $[c]$ で表す. $\angle_p(\cdot, \cdot)$ は $S_pY$ に距離を誘導する. $S_pY$ 上の錘

$$TC_pY = S_pY \times [0, \infty)/S_pY \times \{0\}$$

を $p$ における $Y$ の**接錐** (tangent cone) とよぶ. $TC_pY$ 上には「内積擬き」 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ および距離 $d_{TC_pY}$ がそれぞれ

$$\langle ([c], t), ([c'], t') \rangle = tt' \cos \angle_p([c], [c']),$$

$$d_{TC_pY}(([c], t), ([c'], t'))^2 = t^2 + t'^2 - 2\langle ([c], t), ([c'], t') \rangle$$

によって定義される. 最後に, 写像 $\pi_p : Y \to TC_pY$ を $\pi_p(q) = ([c_{p,q}], d_Y(p, q))$ によって定義する. ここで, $c_{p,q}$ は $p$ と $q$ を結ぶ測地線である. $\pi_p$ は距離を減少させる写像である.

アダマール空間の典型的な例をいくつかあげておく.

**例** 1. (i) アダマール多様体 (完備かつ単連結な Riemann 多様体で, 断面曲率が非正であるもの).

(ii) 樹木 (tree) $Y$ を局所有限な樹木とし, 各頂点は少なくとも 3 つの辺の端点になっていると仮定する. 各辺の長さを例えば 1 として距離を定めると, $Y$ はアダマール空間である. 辺の内点における接錐は直線に等長的である. 一方, $p$ が頂点のとき, $TC_pY$ はいくつかの半直線の和集合においてすべての端点を同一視したものに等長的であり, $v, w \in TC_pY$ の間の角度は

$$\angle_p(v, w) = \begin{cases} 0 & (v, w \text{ が同じ半直線に属するとき}) \\ \pi & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

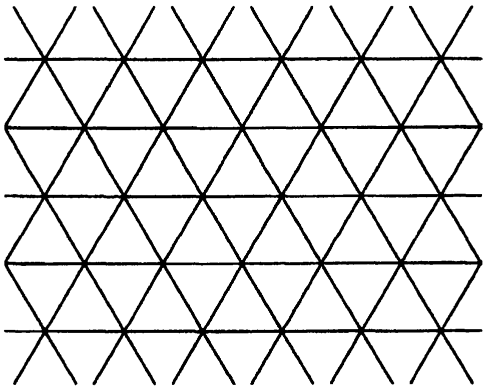
によって与えられる.

アダマール空間の直積は再びアダマール空間であるので, とくに局所有限な樹木の直積はアダマール空間である.

(iii) Bruhat-Tits ビルディング　ビルディングとは, ある性質をもつ部分複体 (アパートメントとよばれる) の族が指定された単体複体で, 各アパートメントはコクセター複体 (コクセター群に付随して定まる単体複体) に同型であることが要請される. コクセター複体がユークリッド空間を三角形分割したものであるとき, ビルディングは Bruhat-Tits ビルディングとよばれる. このとき, 各アパートメントにユークリッド距離を移植することにより, ビルディングに距離を定めることができ, この距離によって Bruhat-Tits ビルディングはアダマール空間になる.

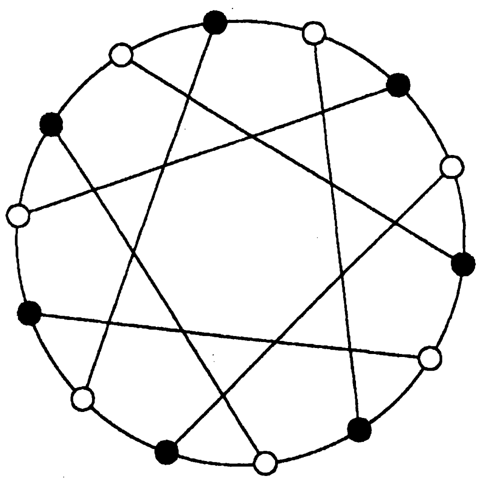
1 次元の Bruhat-Tits ビルディングは, 樹木で各頂点が少なくとも 2 つの辺の端点になっているものに他ならない.

2 次元の Bruhat-Tits ビルディングの例として, 代数群 $PGL(3,\mathbb{Q}_p)$ ($\mathbb{Q}_p$ は $p$ 進体) に付随して定まるものがよく知られている. この場合, コクセター複体は下図のものであり, 対応するコクセター群は, 図の直線に関する鏡映によって生成されるユークリッド的鏡映群 ($\widetilde{A_2}$ 型とよばれるもの) である.



Type $\widetilde{A_2}$

$p=2$ の場合, 各頂点のリンクは次のようなグラフである:



図の中に様々な 6 角形が見えるが, これらはアパートメントによるリンクの切り口を表しており, コクセター複体における頂点のリンクである正 6 角形に対応する.

## 3. 組合せ調和写像

本節では, 単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義し, エネルギーを最小化する同変写像の存在およびその性質について述べる. 内容的には [4] の第2節と重複するが, ここではより一般に, 離散群の単体複体への作用が自由しない場合も扱う.

$X$ を単体複体とし, $X(r)$ (resp. $\overrightarrow{X}(r)$) で $X$ の $r$ 単体 (resp. 順序つき $r$ 単体) 全体の集合を表す.

**定義 1.** $X$ 上の**許容ウェイト** (admissible weight) とは, $\cup_{r\geq 0}X(r)$ 上の正値関数 $m$ で

$$\sum_{t\in X(r+1),\, t\supset s} m(t) = m(s), \quad s\in X(r)$$

をみたすもののことをいう.

$m$ を自然に $\cup_{r\geq 0}\overrightarrow{X}(r)$ 上の関数とみなしたものも同じ記号で表す.

以後, $X$ には許容ウェイト $m$ が与えられているとし, 群 $\Gamma$ が単体的, 固有不連続かつココンパクトに, しかも $m$ を保って作用しているとする. $\overrightarrow{\mathcal{F}}(r)$ で $\overrightarrow{X}(r)$ への $\Gamma$ 作用の代表系を表す. また, $s\in\overrightarrow{X}(r)$ に対し $\Gamma_s$ で $s$ の固定化群を表す. $\Gamma$ 作用は固有不連続だから, $\Gamma_s$ の位数 $|\Gamma_s|$ は有限である.

$Y$ をアダマール空間とし, $\rho:\Gamma\to\mathrm{Isom}(Y)$ ($\mathrm{Isom}(Y)$ は $Y$ の等長変換群を表す) を準同型とする. 写像 $f: X(0)\longrightarrow Y$ が **$\rho$-同変**であるとは, $f(\gamma x)=\rho(\gamma)f(x)$ ($x\in X(0), \gamma\in\Gamma$) をみたすときをいう. 任意の $\rho$ に対して $\rho$-同変写像が存在する.

**定義 2.** $\rho$ 同変写像 $f: X(0)\to Y$ の**エネルギー** $E(f)$ を

$$E(f)=\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(1)}\frac{m(x,y)}{|\Gamma_{(x,y)}|}d_Y(f(x),f(y))^2$$

によって定義する.

$\rho$ 同変写像 $f: X(0)\to Y$ が**エネルギー最小**であるとは, すべての $\rho$-同変写像 $g: X(0)\to Y$ に対して $E(f)\leq E(g)$ をみたすときをいう.

エネルギー最小な $\rho$ 同変写像の存在について, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.** *$X$, $\Gamma$, $Y$, $\rho$ は前述の通りとし, さらに $Y$ は局所コンパクト, $\rho$ は簡約的であると仮定する. このとき, エネルギー最小な $\rho$ 同変写像 $f: X(0)\to Y$ が存在する.*

証明は [4] にある. 簡約性の定義も同文献を参照されたい.

**命題 4.** *$f: X(0)\to Y$ を命題 3 のとおりとする. このとき, 任意の $x\in X(0)$, $v\in TC_{f(x)}Y$ に対して*

(1) $$\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}\langle F_x(y), v\rangle\leq 0$$

が成り立つ. ここで, $F_x(y)=\pi_{f(x)}(f(y))$ とおいている. $(TC_{f(x)}Y, d_{TC_{f(x)}Y})$ が $\mathbb{R}^N$ に等長的なら, 不等号は等号になる.

**注意** 1. (i) 不等式 (1) は, $\{F_x(y) \mid y \in (\mathrm{Lk}\,x)(0)\}$ の $TC_{f(x)}Y$ における「重心」が原点 $0_{f(x)}$ に一致することを意味している.
(ii) 不等式 1 の証明は, $Y$ がアダマール多様体の場合には [4] で与えられている. $\Gamma$ の $X$ への作用が非常に自由な場合に, そこでの証明を $Y$ が一般のアダマール空間の場合に一般化することは難しくない. 今の場合, $\Gamma$ の作用は自由ですらないため, 証明には多少の技術的困難が伴い, アダマール空間内の測地四辺形に関する Reshetnyak の結果を必要とする.

## 4. 固定点定理

本節では, 一つの固定点定理を述べ, その証明を与える. 定理は, $Y$ があるクラスのアダマール空間の場合に, 命題3のエネルギー最小 $\rho$ 同変写像が定値写像になる (よって, $\rho(\Gamma)$ が $Y$ に固定点をもつ) ための十分条件を与える. 証明は, エネルギー最小 $\rho$ 同変写像にボホナー松島型公式を適用することによってなされる.

以後, すべての $x \in X(0)$ に対して $\mathrm{Lk}\,x$ は連結であると仮定し,

$$\mu(x) = \inf\left\{ \frac{\frac{1}{2}\sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')(\varphi(y)-\varphi(y'))^2}{\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\varphi(y)^2} \;\middle|\; \varphi \in C^0(\mathrm{Lk}\,x),\ \varphi \not\equiv 0,\ \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\varphi(y) = 0 \right\}$$

とおく. $\mu(x)$ は $\mathrm{Lk}\,x$ の離散ラプラシアン

$$(\Delta_{\mathrm{Lk}\,x}\varphi)(y) = \varphi(y) - \frac{1}{m(x,y)} \sum_{y';\,(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')\varphi(y'), \quad \varphi \in C^0(\mathrm{Lk}\,x)$$

の最小正固有値に一致する.

**定理 5.** $Y$ はアダマール多様体, 局所有限な樹木, あるいはいくつかの局所有限な樹木の直積のいずれかであるとする. $X$, $\Gamma$, $\rho$ は前述の通りとし, さらに $\rho$ は簡約的で, $X$ は

$$\mu(x) > \frac{1}{2}, \quad {}^\forall x \in X(0) \tag{2}$$

をみたすと仮定する. このとき, 命題3のエネルギー最小 $\rho$ 同変写像 $f : X(0) \to Y$ は定値写像である. とくに, $\rho(\Gamma)$ は $Y$ に固定点を持つ.

**注意** 2. (i) $Y$ がアダマール多様体のとき, 定理の主張は M.-T. Wang [5] による.
(ii) 定理の条件をみたす単体複体 $X$ の典型的な例として, 次元 2 以上の Bruhat-Tits ビルディング, Ballmann-Swiatkowski 複体 [2] 等がある.
(iii) $X$ が定理の条件をみたすとき $\Gamma$ は Kazhdan の性質 (T) をもつことが Ballmann-Swiatkowski [2] によって示されている. 一方, Kazhdan の性質 (T) をもつ局所コン

パクト群の樹木への作用が固定点をもつことが Alperin [1], 綿谷 [6] によって示されている.

定理 5 の証明の鍵になるのは, 次のボホナー松島型公式である.

**命題 6.** $X$, $\Gamma$, $Y$, $\rho$ は前述のとおりとし, $f : X(0) \to Y$ を $\rho$ 同変写像とする. このとき, 次の和公式が成り立つ :

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{x\in\mathcal{F}(0)} \frac{1}{|\Gamma_x|} \Bigg[ \sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')\, d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y'))^2 \\
(3)\qquad & - \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\, d_{TC_{f(x)}Y}(0_{f(x)},F_x(y))^2 \\
& + \sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y') \left\{ d_Y(f(y),f(y'))^2 - d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y'))^2 \right\} \Bigg].
\end{aligned}
$$

**注意** 3. $\pi_{f(x)} : Y \to TC_{f(x)}Y$ は距離を減少させる写像なので,

$$d_Y(f(y),f(y')) \geq d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y')), \quad (y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)$$

が成り立つ. よって, (3) の右辺 [ ] 内の第 3 項は非負である.

**定理 5 の証明.** $Y$ が樹木の場合に証明する. $x \in X(0)$ を固定する. $f(x)$ が $Y$ の頂点である場合が本質的である. このとき, 接錐 $TC_{f(x)}Y$ は何本かの半直線の和集合においてすべての端点を同一視したものに等長的である. 以下, 簡単のために半直線の本数は 3 本であるとし, それらを $H_s$ $(s = 1,2,3)$ で表す. また, $I_s = \{y \in (\mathrm{Lk}\,x)(0) \mid F_x(y) \in H_s\}$, $A_s = \sum_{y\in I_s} m(x,y)|F_x(y)|$ とおく. このとき, 命題 4 の不等式 (1) は三角不等式

$$A_1 \leq A_2 + A_3, \quad A_2 \leq A_3 + A_1, \quad A_3 \leq A_1 + A_2.$$

に同値である. よって, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の (退化しているかもしれない) 三角形で三辺の長さが $A_1, A_2, A_3$ であるものが存在する. 言い換えれば, $\mathbb{R}^2$ の単位ベクトル $\mathbf{e}_s$ で $\sum_{s=1}^{3} A_s\mathbf{e}_s = \mathbf{0}$ をみたすものが存在する. そこで, $y \in I_s$ のとき $\mathbf{v}(y) = |F_x(y)|\mathbf{e}_s$ と定めると, 明らかに

$$(4)\qquad \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\mathbf{v}(y) = \mathbf{0};$$

$$|\mathbf{v}(y)| = |F_x(y)|, \quad y \in (\mathrm{Lk}\,x)(0);$$

$$|\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(y')| \leq d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y')), \quad y,y' \in (\mathrm{Lk}\,x)(0)$$

が成り立つ. したがって

$$\sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')\, d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y'))^2 - \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\,|F_x(y)|^2$$
$$\geq \sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')\,|\mathbf{v}(y)-\mathbf{v}(y')|^2 - \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\,|\mathbf{v}(y)|^2$$

である. 定理5の条件 (2) と (4) より右辺は非負であり, しかも $\mathbf{v}(y) = \mathbf{0}$ ($^\forall y \in (\mathrm{Lk}\,x)(0)$) でない限り正になる. このことは $f(x)$ が $Y$ の辺の内点である場合にも同様に正しい. 一方, 命題6の和公式 (3) および注意3により, 次の不等式が成り立つのであった:

$$0 \geq \sum_{x\in\mathcal{F}(0)} \frac{1}{|\Gamma_x|}\left[\sum_{(y,y')\in(\overrightarrow{\mathrm{Lk}\,x})(1)} m(x,y,y')\, d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y),F_x(y'))^2 \right.$$
$$\left. - \sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} m(x,y)\, d_{TC_{f(x)}Y}(0_{f(x)},F_x(y))^2\right].$$

以上より結局, すべての $(x,y)\in\overrightarrow{X}(1)$ に対して $F_x(y)=0_{f(x)}$ であることが結論される. すなわち, $f$ は定値写像である. (証明おわり)

当面の課題は, 証明中の議論を $Y$ が次元2以上の Bruhat-Tits ビルディングの場合にも適用可能な形に改良し, マルグリス超剛性を包括する新たな超剛性定理を定式化することである.

## References


[1] R. Alperin, *Locally compact groups acting on trees and property T*, Mh. Math. **93** (1982), 261–265.

[2] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On $L^2$-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615–645.

[3] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[4] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and superrigidity* (Japanese), Hyperbolic spaces and discrete groups II (Kyoto, 2001), RIMS Kokyuroku **1270** (2002), 182–194.

[5] M.-T. Wang, *A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **50** (1998), 249–267.

[6] Y. Watatani, *Property (T) of Kazhdan implies property (FA) of Serre*, Math. Japon. **27** (1981), 97–103.