数理解析研究所講究録 1329 巻 2003 年 163-166



# Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots

東京農工大・工　合田　洋 (Hiroshi Goda)
Tokyo Univ. of Agriculture and Technology
東工大・情報　北野晃朗 (Teruaki Kitano)
Tokyo Institute of Technology
東京農工大・工　森藤孝之 (Takayuki Morifuji)
Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

よく知られているように，ファイバー結び目 $K$ のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ はモニックになります ([6], [7], [8]). $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ が $\pm t^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ による積を法として well-defined であることおよび対称性 $\Delta_K(t) \doteq \Delta_K(t^{-1})$ から，$\Delta_K(t)$ は最高次と最低次係数が 1 の多項式で表されることになります．この条件は多くの結び目 (例えば，交代結び目 [5] や 10 交点以下の素な結び目 [3] 等) に対して十分条件ですが，一般には必要十分条件になりません．実際，モニックアレキサンダー多項式をもつファイバー結び目でない結び目が無限個存在します．

本研究の目的は，和田 [9] のひねりアレキサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho}(t)$ によるファイバー結び目の一判定法を与えることです．より具体的には，$\Delta_{K,\rho}(t)$ の Reidemeister torsion による解釈 [4] を経由することにより，次の結果を導くことができます．

**Theorem**. $K$ を $S^3$ 内のファイバー結び目，$\rho : \pi_1 K \to SL(2n, \mathbb{F})$ を体 $\mathbb{F}$ 上の表現，$\alpha : \pi_1 K \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ を可換化準同型とする．このとき，テンソル表現 $\rho \otimes \alpha : \pi_1 K \to GL(2n, \mathbb{F}(t))$ に付随した $K$ の Reidemeister torsion $\tau_{\rho\otimes\alpha} K$ はモニック多項式の有理関数として表される．特に，$\tau_{\rho\otimes\alpha} K$ は $t^{2nk}$ $(k \in \mathbb{Z})$ による積を法として well-defined である．

証明等詳細はプレプリント [1] を参照して下さい．この結果を用いると，アレキサンダー多項式ではできなかった次の結び目 $K$ のファイバー性を判定することができます．

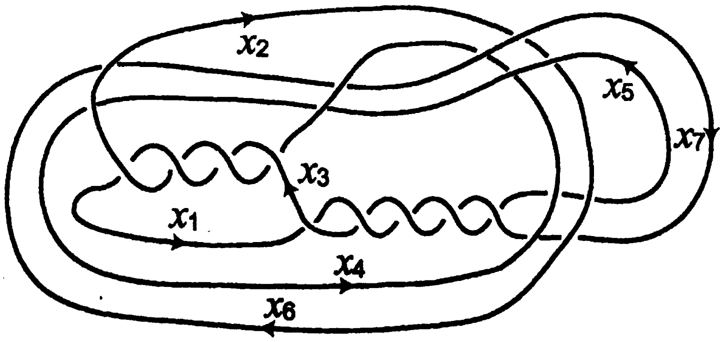


図 1:

**Example**. $\pi_1 K$ は次の群表示をもちます.

$$\pi_1 K = \langle x_1, \ldots, x_7 \mid r_1, \ldots, r_6 \rangle,$$

$$\begin{aligned}
r_1 &: x_2x_1 = x_3x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}, \\
r_2 &: x_6x_5x_6^{-1} \\
&\quad = x_4x_3x_1^{-1}x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_4^{-1}, \\
r_3 &: x_6x_7x_6^{-1} \\
&\quad = x_4x_3x_1^{-1}x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_4^{-1}, \\
r_4 &: x_5x_6x_5^{-1} = x_7x_2x_7^{-1}, \\
r_5 &: x_2x_6x_2^{-1} \\
&\quad = x_3x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_7x_3x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}, \\
r_6 &: x_5x_4x_5^{-1}x_7 = x_7x_3x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}.
\end{aligned}$$

直接計算から, $\Delta_K(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ であることがわかります. そこで $\pi_1 K$ の表現として, 以下で定義される有限体 $\mathbb{F}_5$ 上の非可換表現 $\rho : \pi_1 K \to SL(2, \mathbb{F}_5)$ をとります:

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(x_5) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_6) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(x_7) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, $\rho \otimes \alpha$ に付随した $K$ の Reidemeister torsion は

$$\tau_{\rho\otimes\alpha} K = 3t^2 + 3$$

となります．これは$t^{2k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) を法として well-defined なので，$K$ はファイバー結び目でないことがわかります．

逆に，$\tau_{\rho\otimes\alpha}K$ のモニック性から結び目 $K$ のファイバー性を特徴づけることができるか気になるところですが，現在のところその真偽は定かではありません．そこで，次の問いを挙げておくことにします [2].

**Problem.** ファイバー結び目でない任意の結び目 $K$ に対して，$\tau_{\rho\otimes\alpha}K$ がモニック多項式の有理関数とならない表現 $\rho : \pi_1 K \to SL(2n, \mathbb{F})$ が存在するか．

アレキサンダー多項式がモニックでない (よって，もちろんファイバーでない) 結び目については自明表現をとればよいので，上記問題はモニックアレキサンダー多項式をもつファイバーでない結び目が本質的対象です．

# 参考文献


[1] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, preprint (2002).

[2] H. Goda and T. Morifuji, *Twisted Alexander polynomial for $SL(2,\mathbb{C})$-representations and fibered knots*, preprint (2003).

[3] T. Kanenobu, *The augmentation subgroup of a pretzel link*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1979), 363–384.

[4] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. 174 (1996), 431–442

[5] K. Murasugi, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. 85 (1963), 544–550.

[6] L. Neuwirth, Knot Groups, Annals of Mathematics Studies, No. 56 Princeton University Press, Princeton, N.J.(1965).

[7] E. Rapaport, *On the commutator subgroup of a knot group*, Ann. of Math. (2) 71 (1960), 157–162

[8] J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, 1962 Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 95–100.

[9] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology 33 (1994), 241–256.