数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 34-49

半線形波動方程式系の解の爆発

静岡大学工学部　太田 雅人 (Masahito Ohta)

Faculty of Engineering, Shizuoka University

§1. 序

空間３次元における異なる伝播速度をもつ半線形波動方程式系の小さなデータに対する初期値問題

$$\begin{cases} \Box_{c_i} u_i = F_i(u, \partial u), & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty),\ i = 1,\cdots,m, \\ u_i(0,x) = \varepsilon\varphi_i(x),\ \partial_t u_i(0,x) = \varepsilon\psi_i(x), & x \in \mathbb{R}^3,\ i = 1,\cdots,m \end{cases} \tag{1}$$

の時間大域解の存在と非存在について考える. ここで, $\Box_c = \partial_t^2 - c^2\Delta$, $c_i > 0$, $u = (u_1,\cdots,u_m)$, $\partial = (\partial_t,\partial_1,\partial_2,\partial_3)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_k = \partial/\partial x_k$ $(k = 1,2,3)$. 非線形項 F_i は $(u,\partial u)$ に関する斉２次多項式とする. 任意の φ_i, $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(i = 1,\cdots,m)$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば (1) の古典解が時間大域的に存在するとき, (1) に対して small data global existence が成り立つという. 以下では, small data global existence を (SG) と略記する. (SG) が成り立つかどうかは, $(c_1,\cdots,c_m)$ と $(F_1,\cdots,F_m)$ に依存する. 以下では, F_i が u のみに依存する場合は考えない. この場合については, Kubo-Ohta [14, 15] を参考にして頂きたい. まず, 伝播速度がすべて等しい場合について簡単に振り返る. 以下, $\Box = \Box_1$ とする. F. John [5] は単独方程式 $\Box u = (\partial_t u)^2$ 及び $\Box u = u\partial_t u$ に対して (SG) は成り立たないことを示した. Klainerman [11] と Christodoulou [2] は $c_1 = \cdots = c_m$ の場合に, (SG) が成り立つための $(F_1,\cdots,F_m)$ に対する十分条件として null condition を導入した. $c_1 = \cdots = c_m$ でない場合は, $c_1 = \cdots = c_m$ の場合よりも (SG) が成り立ちやすい. 実際,

$$\Box_{c_1} u_1 = \partial_t u_1 \partial_t u_2, \quad \Box_{c_2} u_2 = \partial_t u_1 \partial_t u_2$$

に対して, 上述の John [5] の単独方程式に対する結果から, $c_1 = c_2$ のときは (SG) は成り立たないことが分かるが, Kovalyov [12] は $c_1 \neq c_2$ であれば (SG) が成り立つことを示した. その後, $c_1 = \cdots = c_m$ でない場合に対して, (SG) が成り立つための十分条件が, Agemi-Yokoyama [1], Hoshiga-Kubo [3], Yokoyama [21], Kubota-Yokoyama [16], Katayama [7, 8, 9], Sideris-Tu [19], Katayama-Yokoyama [10] などにより研究されてきた. これまでに知られている結果を, $m = 2$, $c_1 \neq c_2$, F_i が u と $\partial_t u$ に関する2次単項式 $u_j \partial_t u_k$, $\partial_t u_j \partial_t u_k$ $(j, k = 1, 2)$ の場合に適用すると次の表のようになる. 但し, 自己相互作用 $(j, k) = (i, i)$ の場合は除いてある. 表の埋まっている部分は, $c_1 \neq c_2$ ならば (SG) が成り立つことが引用した文献から分かることを表している.

$F_1 \setminus F_2$	$u_1\partial_t u_2$	$u_2\partial_t u_1$	$u_1\partial_t u_1$	$\partial_t u_1 \partial_t u_2$	$\partial_t u_1 \partial_t u_1$
$u_1\partial_t u_2$	Ka [9]	Ka [9]	KaYo [10]	Ka [9]	
$u_2\partial_t u_1$	Ka [9]	Ka [9]	KaYo [10]	Ka [9]	
$u_2\partial_t u_2$	KaYo [10]	KaYo [10]	Ka [7]	KaYo [10]	
$\partial_t u_1 \partial_t u_2$	Ka [9]	Ka [9]	KaYo [10]	Ko [12]	Yo [21]
$\partial_t u_2 \partial_t u_2$				Yo [21]	Yo [21]

ここでの目標は, $F_1 = u_2 \partial_t u_1$, $F_2 = (\partial_t u_1)^2$ の場合, $0 < c_1 < c_2$ ならば (SG) は成り立たないことを示すことである. 以下, 簡単のため, 球対称な場合に限定して考え, $r = |x|$, $v = v(r,t)$, $\dot{v} = \partial_t v$, $\Box_c v = r^{-1}\{\partial_t^2(rv) - c^2\partial_r^2(rv)\}$ とする. 改めて, 考える方程式系を書くと

$$\begin{cases} \Box_{c_1} u_1 = \dot{u}_1 u_2, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2, \\ \Box_{c_2} u_2 = (\dot{u}_1)^2, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2, \\ u_i(r,0) = 0, \ \dot{u}_i(r,0) = \varepsilon\psi_i(r), \quad r \in [0,\infty), \ i = 1,2 \end{cases} \tag{2}$$

となる. ここで, $\psi_i(|x|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(i = 1,2)$ とし, 次を仮定する.

(H1) $\exists\delta>0: \psi_1(r)>0$ for $r\in[0,\delta)$, $\psi_1(r)=0$ for $r\in[\delta,\infty)$, $\psi_2(r)\geq 0$ for $r\in[0,\infty)$.

定理 1 $0<c_1<c_2$ とし, (H1) を仮定する. このとき (2) の古典解 (u_1,u_2) の最大存在時間を $T^*(\varepsilon)$ とすると, 定数 $C^*>0$ が存在して次が成り立つ.

$$T^*(\varepsilon)\leq\exp(C^*\varepsilon^{-2}).$$

註 1 $c_1>c_2>0$ のときは (2) に対して (SG) が成り立つのではないかと筆者は予想している. 少なくとも, 定理 1 の証明は $c_1>c_2>0$ の場合には適用できそうもない. また,

$$\begin{cases} \Box_{c_1}u_1=u_1u_2, & (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,\infty), \\ \Box_{c_2}u_2=(u_1)^3, & (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,\infty) \end{cases} \tag{3}$$

に対して, $0<c_1<c_2$ ならば (SG) が成り立つが, $c_1>c_2>0$ ならば (SG) は成り立たないことが Kubo-Ohta [14] で示されている.

註 2 単独方程式 $\Box u=|\dot{u}|^2$ に対しては, 古典解の最大存在時間に対する上下からの評価

$$\exp(C_1\varepsilon^{-1})\leq T^*(\varepsilon)\leq\exp(C_2\varepsilon^{-1})$$

(下からの評価については John and Klainerman [6], 上からの評価については §2 を参照のこと) が知られている. 定理 1 の (2) に対する古典解の最大存在時間の上からの評価が最適かどうかは未解決問題であるが, もし定理 1 の上からの評価が最適であることを示す下からの評価が得られたならば, 伝播速度の違いによる新たな現象の発見に繋がり, 大変興味深いのではないかと筆者は考える.

以下, 定理 1 を証明する前に, まず単独方程式の解の爆発の証明について簡単に振り返る. §2 では $\Box u=|\dot{u}|^p$ について, §3 では $\Box u=|u|^p$ について考える. どちらも問題も同じ積分不等式の爆発 (補題 2.3) に帰着される. 最後に, §4 で定理 1 の証明を与える.

§2. 単独方程式の解の爆発 1

この節では, 主に Kubo [13] に従って, $1 < p \leq 2$ に対して次の初期値問題の古典解の爆発を示す (John [5], Sideris [18] も参照).

$$\begin{cases} \Box u = |\dot{u}|^p, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2, \\ u(r,0) = 0, \ \dot{u}(r,0) = \varepsilon\psi(r), \quad r \in [0,\infty). \end{cases} \tag{4}$$

ここで, $\psi(|x|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ とし, 次を仮定する.

(H2) $\exists\delta > 0 : \psi(r) > 0$ for $r \in [0,\delta)$, $\psi(r) = 0$ for $r \in [\delta,\infty)$.

このとき次が成り立つ.

定理 2 $1 < p \leq 2$ とし, (H2) を仮定する. このとき (4) の古典解 $u(r,t)$ の最大存在時間を $T^*(\varepsilon)$ とすると, 定数 $C^* > 0$ が存在して次が成り立つ.

$$T^*(\varepsilon) \leq \begin{cases} \exp(C^*\varepsilon^{-1}) & \text{if } p = 2, \\ C^*\varepsilon^{-(p-1)/(2-p)} & \text{if } 1 < p < 2. \end{cases}$$

次の補題 2.1 はよく知られた球対称解の表示公式だから証明は省略する.

補題 2.1 $v(r,t)$ を

$$\begin{cases} \Box_c v = f(r,t), \quad (r,t) \in [0,\infty)^2, \\ v(r,0) = 0, \ \dot{v}(r,0) = g(r), \quad r \in [0,\infty) \end{cases} \tag{5}$$

の古典解とすると $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して次が成り立つ.

$$rv(r,t) = \frac{1}{2c}\int_{|r-ct|}^{r+ct} \rho g(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{|r-c(t-\tau)|}^{r+c(t-\tau)} \rho f(\rho,\tau)\,d\rho\right) d\tau.$$

また, $r \geq ct$ なる $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} r\dot{v}(r,t) &= \frac{1}{2}\{(r+ct)g(r+ct) + (r-ct)g(r-ct)\} \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \{(r+c(t-\tau))f(r+c(t-\tau),\tau) + (r-c(t-\tau))f(r-c(t-\tau),\tau)\}\,d\tau. \end{aligned}$$

補題 2.2 $p>1$ とし, (H2) を仮定する. $u(r,t)$ を (4) の古典解, $\delta_1 \in (0,\delta)$ とし, $U(t)=(t+\delta_1)\dot{u}(t+\delta_1,t)$ とおく. このとき, 正定数 C_1, C_2 が存在して次が成り立つ.

$$U(t) \geq C_1\varepsilon + C_2\int_1^t \frac{U(\tau)^p}{\tau^{p-1}}\,d\tau \qquad (t \geq 1).$$

証明 (H2) と補題 2.1 より, $r-t \geq 0$ ならば

$$r\dot{u}(r,t) \geq \frac{\varepsilon}{2}(r-t)\psi(r-t) + \frac{1}{2}\int_0^t (r-t+\tau)|\dot{u}(r-t+\tau,\tau)|^p\,d\tau.$$

よって, $t \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} U(t) &= (t+\delta_1)\dot{u}(t+\delta_1,t) \geq \frac{\varepsilon}{2}\delta_1\psi(\delta_1) + \frac{1}{2}\int_0^t (\tau+\delta_1)|\dot{u}(\tau+\delta_1,\tau)|^p\,d\tau \\ &\geq C_1\varepsilon + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{U(\tau)^p}{(\tau+\delta_1)^{p-1}}\,d\tau \geq C_1\varepsilon + C_2\int_1^t \frac{U(\tau)^p}{\tau^{p-1}}\,d\tau. \end{aligned}$$

ここで, (H2) より $C_1=\delta_1\psi(\delta_1)/2>0$ に注意する. □

補題 2.2 に対してだけでなく, 補題 3.1 にも適用できるように, 少し一般化した形で次の補題 2.3 を用意する.

補題 2.3 $C_1, C_2>0$, $a, b \geq 0$, $\kappa \leq 1$, $\varepsilon \in (0,1]$, $p>1$ とし, $f(t)$ は

$$f(t) \geq C_1\varepsilon^a, \quad f(t) \geq C_2\int_1^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^b \frac{f(\tau)^p}{\tau^\kappa}\,d\tau, \quad t \geq 1$$

をみたすとする. このとき, $f(t)$ の最大存在時間を $T^*(\varepsilon)$ とすると, 定数 $C^*>0$ が存在して次が成り立つ.

$$T^*(\varepsilon) \leq \begin{cases} \exp(C^*\varepsilon^{-(p-1)a}) & \text{if } \kappa=1, \\ C^*\varepsilon^{-(p-1)a/(1-\kappa)} & \text{if } \kappa<1. \end{cases}$$

定理 2 は補題 2.2 と補題 2.3 から直ちに従う.

補題 2.3 の証明 まず, $\kappa=1$ の場合を考える.

$$F(s)=\varepsilon^{-a}f\left(\exp(\varepsilon^{-(p-1)a}s)\right)$$

と変換すると, $F(s)$ は

$$F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_0^s \left\{1 - \exp(-\varepsilon^{-(p-1)a}(s-\sigma))\right\}^b F(\sigma)^p \, d\sigma, \quad s \geq 0$$

をみたす. ここで, $t \mapsto (1-e^{-t})^b$ は $[0,\infty)$ で非減少で, $\varepsilon \in (0,1]$ だから

$$F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_0^s \left(1 - e^{-(s-\sigma)}\right)^b F(\sigma)^p \, d\sigma, \quad s \geq 0 \tag{6}$$

が成り立つ. (6) には ε が含まれていないので, $F(s)$ の最大存在時間が有限であることを示せばよい. 2つの主張を示す.

主張1 $\forall A > 0, \exists S = S(A) > 0 : F(s) \geq A \ (\forall s \geq S)$.

実際, (6) の第1式を第2式に代入すると

$$F(s) \geq C_1^p C_2 \int_0^s \left(1 - e^{-(s-\sigma)}\right)^b d\sigma = C_1^p C_2 \int_0^s \left(1 - e^{-\tau}\right)^b d\tau \to \infty \quad (s \to \infty).$$

よって, 主張1が成り立つ.

主張2 $A, S \geq 0, 0 < h \leq 1, F(s) \geq A \ (\forall s \geq S)$ ならば

$$F(s) \geq \frac{C_2(1-e^{-1})^b}{b+1} h^{b+1} A^p \quad (s \geq S+h).$$

実際, $s \geq S + h$ のとき

$$F(s) \geq C_2 A^p \int_{s-h}^s \left(1 - e^{-(s-\sigma)}\right)^b d\sigma = C_2 A^p \int_0^h \left(1 - e^{-\tau}\right)^b d\tau.$$

$0 \leq \tau \leq 1$ のとき $1 - e^{-\tau} \geq (1-e^{-1})\tau$ だから

$$F(s) \geq C_2(1-e^{-1})^b A^p \int_0^h \tau^b \, d\tau = \frac{C_2(1-e^{-1})^b}{b+1} h^{b+1} A^p.$$

よって, 主張2が成り立つ.

ここで,

$$\gamma = \max\{1, \ \frac{b+1}{C_2(1-e^{-1})^b}\}$$

とし, 数列 $\{A_n\}$, $\{S_n\}$ を

$$A_{n+1} = \frac{A_n^p}{\gamma n^{2(b+1)}}, \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

と定める. 但し, A_1, S_1 は後で決める. (7) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \log A_{n+1} &= p^n \left(\log A_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\log \gamma}{p^k} - 2(b+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{p^k} \right) \\ &\geq p^n \left(\log A_1 - \frac{\log \gamma}{p-1} - 2(b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{p^k} \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$A_1 = \exp \left(1 + \frac{\log \gamma}{p-1} + 2(b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{p^k} \right)$$

とすると, 主張 1 より, $F(s) \geq A_1$ $(s \geq S_1)$ をみたすように S_1 をとることができる. また, 主張 2 より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$F(s) \geq A_n \quad (s \geq S_n)$$

が成り立つ. さらに,

$$A_n \geq \exp(p^{n-1}), \quad S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

だから, $F(s)$ の最大存在時間は $\lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty$ 以下であることが分かる. 以上で, $\kappa = 1$ の場合の証明が完了した.

次に, $\kappa < 1$ の場合を考える.

$$F(s) = \varepsilon^{-a} f(\varepsilon^{-\nu} s), \quad \nu = \frac{(p-1)a}{1-\kappa}$$

と変換すると, $F(s)$ は

$$F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_{\varepsilon^\nu}^{s} \left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)^b \frac{F(\sigma)^p}{\sigma^\kappa} d\sigma, \quad s \geq \varepsilon^\nu$$

をみたす. $\varepsilon \in (0,1]$ だから

$$F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_1^s \left(1-\frac{\sigma}{s}\right)^b \frac{F(\sigma)^p}{\sigma}\, d\sigma, \quad s \geq 1 \tag{8}$$

が成り立つ. (8) は ε に依存せず, さらに, $\kappa = 1$ の場合の結果から $F(s)$ の最大存在時間は有限だから, $\kappa < 1$ の場合の証明も完了する. □

§3. 単独方程式の解の爆発 2

この節では, 主に Zhou [22] に従って, $1 < p \leq 1+\sqrt{2}$ に対して次の初期値問題の解の爆発を示す (John [4], Schaeffer [17], Takamura [20] も参照).

$$\begin{cases} \Box u = |u|^p, & (r,t) \in [0,\infty)^2, \\ u(r,0) = 0, \ \dot{u}(r,0) = \varepsilon\psi(r), & r \in [0,\infty). \end{cases} \tag{9}$$

ψ に対しては前節と同じく, (H2) を仮定する. このとき次が成り立つ.

定理 3 $1 < p \leq 1+\sqrt{2}$ とし, (H2) を仮定する. このとき (9) の古典解 $u(r,t)$ の最大存在時間を $T^*(\varepsilon)$ とすると, 定数 $C^* > 0$ が存在して次が成り立つ.

$$T^*(\varepsilon) \leq \begin{cases} \exp(C^*\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if } p = 1+\sqrt{2}, \\ C^*\varepsilon^{-p(p-1)/(1-p(p-2))} & \text{if } 1 < p < 1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

補題 3.1 $p > 1$ とし, (H2) を仮定する. $u(r,t)$ を (9) の古典解とし, $y > 0$ に対して

$$U(y) = \inf\{(t+r)(t-r)^{p-2}u(r,t) : \ t-r = y, \ (r,t) \in [0,\infty)^2\}$$

とおく. このとき, 正定数 C_1, C_2 が存在して $y \geq 1$ に対して次が成り立つ.

$$\text{(i)} \quad U(y) \geq C_1\varepsilon^p, \qquad \text{(ii)} \quad U(y) \geq C_2 \int_1^y \left(1-\frac{\eta}{y}\right) \frac{U(\eta)^p}{\eta^{p(p-2)}}\, d\eta.$$

$1+\sqrt{2}$ が $p(p-2) = 1$ の正根であることに注意すれば, 定理 3 は補題 3.1 と補題 2.3 から直ちに従う. 補題 3.1 を示す前に, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, 定数 $C > 0$ が存在して

次の不等式が成り立つことに注意する.

$$\frac{1}{r}\int_{t-r}^{t+r}\frac{d\rho}{\rho^k} \geq \frac{C}{(t+r)(t-r)^{k-1}}, \quad t > r > 0.$$

補題 3.1 の証明　まず (i) を示す. $0 < \delta_1 < \delta_2 < \min\{\delta, 1\}$ とし,

$$D_1 = \{(r,t) \in [0,\infty)^2 :\ |t-r| \leq \delta_1,\ t+r \geq \delta_2\}$$

とおく. また, $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して

$$D(r,t) = \{(\rho,\tau) \in [0,\infty)^2 :\ |t-r+\tau| \leq \rho \leq t+r-\tau,\ 0 \leq \tau \leq t\}$$

とおく. (H2) と補題 2.1 より, $(r,t) \in D_1$ に対して

$$u(r,t) \geq \frac{\varepsilon}{2r}\int_{|t-r|}^{t+r}\rho\psi(\rho)\,d\rho \geq \frac{\varepsilon}{2r}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\rho\psi(\rho)\,d\rho = \frac{C\varepsilon}{r}.$$

これから, $t-r = y \geq 1$ なる $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して

$$u(r,t) \geq \frac{1}{2r}\iint_{D(r,t)\cap D_1}\rho|u(\rho,\tau)|^p\,d\rho\,d\tau \geq \frac{C\varepsilon^p}{r}\iint_{D(r,t)\cap D_1}\frac{d\rho\,d\tau}{\rho^{p-1}}.$$

ここで, $\xi = \tau+\rho$, $\eta = \tau-\rho$ とおくと

$$u(r,t) \geq \frac{C\varepsilon^p}{r}\int_{t-r}^{t+r}\frac{d\xi}{\xi^{p-1}}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}d\eta \geq \frac{C_1\varepsilon^p}{(t+r)(t-r)^{p-2}}.$$

よって, $y \geq 1$ に対して (i) が成り立つことが示された.

次に (ii) を示す. $t-r = y \geq 1$ なる $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して

$$\begin{aligned} u(r,t) &\geq \frac{1}{2r}\iint_{D(r,t)\cap\{\tau-\rho\geq 1\}}\rho|u(\rho,\tau)|^p\,d\rho\,d\tau \\ &\geq \frac{C}{r}\iint_{D(r,t)\cap\{\tau-\rho\geq 1\}}\frac{\rho U(\tau-\rho)^p}{(\tau+\rho)^p(\tau-\rho)^{p(p-2)}}\,d\rho\,d\tau. \end{aligned}$$

ここで, $\xi = \tau + \rho$, $\eta = \tau - \rho$ とおくと, $\rho = (\xi - \eta)/2$ だから

$$\begin{aligned} u(r,t) &\geq \frac{C}{r}\int_1^{t-r}\left(\int_{t-r}^{t+r}\frac{(\xi-\eta)U(\eta)^p}{\xi^p\eta^{p(p-2)}}\,d\xi\right)d\eta \\ &\geq \frac{C}{r}\int_{t-r}^{t+r}\frac{d\xi}{\xi^p}\int_1^{t-r}\frac{(t-r-\eta)U(\eta)^p}{\eta^{p(p-2)}}\,d\eta \\ &\geq \frac{C_2}{(t+r)(t-r)^{p-1}}\int_1^{t-r}\frac{(t-r-\eta)U(\eta)^p}{\eta^{p(p-2)}}\,d\eta \\ &= \frac{C_2}{(t+r)(t-r)^{p-2}}\int_1^{y}\left(1-\frac{\eta}{y}\right)\frac{U(\eta)^p}{\eta^{p(p-2)}}\,d\eta. \end{aligned}$$

これから, $y \geq 1$ に対して (ii) が成り立つことが分かる. □

§4. 定理1の証明

補題 4.1 $0 < c_1 < c_2$, (H1) を仮定し, (u_1, u_2) を (2) の古典解とする. このとき, $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して次が成り立つ. (i) $u_2(r,t) \geq 0$, (ii) $\dot{u}_1(r,t) > 0$ if $0 < r - c_1 t < \delta$, $\dot{u}_1(r,t) = 0$ if $r - c_1 t \geq \delta$.

証明 $(r,t) \in [0,\infty)$ に対して

$$D_c(r,t) = \{(\rho,\tau):\ 0 \leq \tau \leq t,\ |r - c(t-\tau)| \leq \rho \leq r + c(t-\tau)\}$$

とおくと, 補題 2.1 より

$$ru_2(r,t) = \frac{\varepsilon}{2c_2}\int_{|r-c_2t|}^{r+c_2t}\rho\psi_2(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2c_2}\iint_{D_{c_2}(r,t)}\rho\dot{u}_1(\rho,\tau)^2\,d\rho\,d\tau.$$

よって (H1) から (i) が成り立つ. また, (H1) と有限伝播性より, $r - c_1 t \geq \delta$ ならば $\dot{u}_1(r,t) = 0$ となる. 最後に, $0 < r - c_1 t < \delta$ のとき $\dot{u}_1(r,t) > 0$ であることを示す. (H1) と $\dot{u}_1(r,t)$ の連続性より, $(r,t) \in D_{c_1}(\delta/2, \tau_0)$ ならば $\dot{u}_1(r,t) > 0$ となる $\tau_0 \in (0, \delta/(2c_1))$ が存在する. $c_1\tau_0 \leq \rho_1 \leq \delta/2 \leq \rho_2 \leq \delta + c_1\tau_0$ に対して

$$\Lambda(\rho_1,\rho_2) = \bigcup_{\rho_1 \leq \lambda \leq \rho_2} D_{c_1}(\lambda,\tau_0) \cap \{(\rho,\tau) \in [0,\infty)^2:\ 0 < \rho - c_1\tau < \delta\}$$

とおく. ここで, $\rho_2^* = \sup\{\rho \in [\delta/2, \delta + c_1\tau_0]:\ \dot{u}_1(r,t) > 0 \text{ for } (r,t) \in \Lambda(\delta/2, \rho)\}$ とおき, $\rho_2^* < \delta + c_1\tau_0$ と仮定すると, $\dot{u}_1(r_0, t_0) = 0$, $\dot{u}_1(r,t) \geq 0$ for $(r,t) \in D_{c_1}(r_0, t_0)$ となる $(r_0, t_0) \in \Lambda(\delta/2, \rho_2^*)$ が存在する. このとき, (H1) と補題 2.1 より

$$r_0\dot{u}_1(r_0,t_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}(r_0 - c_1t_0)\psi_1(r_0 - c_1t_0) > 0$$

となり, $\dot{u}_1(r_0, t_0) = 0$ と矛盾する. よって, $\rho_2^* = \delta + c_1\tau_0$ である. 同様にして, $\inf\{\rho \in [c_1\tau_0, \delta/2]:\ \dot{u}_1(r,t) > 0 \text{ for } (r,t) \in \Lambda(\rho, \delta/2)\} = c_1\tau_0$ であることを示すことが分かる. よって, $0 \leq t \leq \tau_0$, $0 < r - c_1t < \delta$ ならば $\dot{u}_1(r,t) > 0$ が成り立つ.

$$\tau^* = \sup\{\tau \in (0, T^*(\varepsilon)):\ \dot{u}_1(r,t) > 0 \text{ for } 0 \leq t \leq \tau,\ 0 < r - c_1t < \delta\}$$

とおくと, 上と同様にして, $\tau^* = T^*(\varepsilon)$ であることを示すことができる. □

$0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$ とし, 次のようにおく.

$$\Sigma = \{(r,t) \in [0,\infty)^2:\ \delta_1 \leq r - c_1t \leq \delta_2\}, \quad \Sigma(t) = \{r \in [0,\infty):\ (r,t) \in \Sigma\},$$
$$U_1(t) = \inf\{r\dot{u}_1(r,t):\ r \in \Sigma(t)\}, \quad U_2(t) = \inf\{ru_2(r,t):\ r \in \Sigma(t)\}.$$

補題 4.2 正定数 C_1, C_2, C_3 が存在して次が成り立つ.

$$U_1(t) \geq C_1\varepsilon + C_2\int_1^t \frac{U_1(\tau)U_2(\tau)}{\tau}\,d\tau, \quad t \geq 1, \tag{10}$$
$$U_2(t) \geq C_3\int_{(c_2-c_1)t/c_2}^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)\frac{U_1(\tau)^2}{\tau}\,d\tau, \quad t \geq \frac{\delta_2}{c_2 - c_1}. \tag{11}$$

補題 4.3 補題 4.2 の $(U_1(t), U_2(t))$ の最大存在時間を $T^*(\varepsilon)$ とすると, 定数 $C^* > 0$ が存在して次が成り立つ.

$$T^*(\varepsilon) \leq \exp(C^*\varepsilon^{-2}).$$

定理 1 は補題 4.2 と補題 4.3 から直ちに従う.

補題 4.2 の証明　まず (10) を示す. $t \geq 1$ なる $(r,t) \in \Sigma$ に対して, 補題 2.1 と補題 4.1 より

$$\begin{aligned} r\dot{u}_1(r,t) &\geq \frac{\varepsilon}{2}(r-c_1t)\psi_1(r-c_1t) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (r-c_1t+c_1\tau)\dot{u}_1(r-c_1t+c_1\tau,\tau)u_2(r-c_1t+c_1\tau,\tau)\,d\tau \\ &\geq C_1\varepsilon + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{U_1(\tau)U_2(\tau)}{c_1\tau+\delta_2}\,d\tau \geq C_1\varepsilon + C_2\int_1^t \frac{U_1(\tau)U_2(\tau)}{\tau}\,d\tau. \end{aligned}$$

ここで (H1) より $C_1 = \inf\{\rho\psi_1(\rho)/2 : \delta_1 \leq \rho \leq \delta_2\} > 0$. よって (10) が示された.

次に (11) を示す. $t \geq \delta_2/(c_2-c_1)$ なる $(r,t) \in \Sigma$ に対して, $(c_2t-r)/c_2 \leq (c_2-c_1)t/c_2$, $c_2t+r \geq \delta_2$ に注意すると, 補題 2.1 より

$$\begin{aligned} ru_2(r,t) &\geq \int_{(c_2t-r)/c_2}^t \left(\int_{|r-c_2(t-\tau)|}^{r+c_2(t-\tau)} \frac{(\rho\dot{u}_1(\rho,\tau))^2}{\rho}\chi_{\Sigma(\tau)}(\rho)\,d\rho\right)d\tau \\ &\geq \int_{(c_2-c_1)t/c_2}^t \bar{\ell}(t,\tau)\frac{U_1(\tau)^2}{c_1\tau+\delta_2}\,d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

ここで,

$$\bar{\ell}(t,\tau) = \inf\{\ell(r,t,\tau) :\ r \in \Sigma(t)\}, \quad \ell(r,t,\tau) = \int_{|r-c_2(t-\tau)|}^{r+c_2(t-\tau)} \chi_{\Sigma(\tau)}(\rho)\,d\rho$$

とおいた. このとき, $(c_2-c_1)t/c_2 \leq \tau \leq t$ に対して, $\bar{\ell}(t,\tau) \geq (\delta_2-\delta_1)(1-\tau/t)$ が成り立つ. よって, (12) より, $t \geq \delta_2/(c_2-c_1)$ なる $(r,t) \in \Sigma$ に対して

$$ru_2(r,t) \geq (\delta_2-\delta_1)\int_{(c_2-c_1)t/c_2}^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)\frac{U_1(\tau)^2}{c_1\tau+\delta_2}\,d\tau.$$

これから (11) が従う. □

補題 4.3 の証明　$\beta = c_2/(c_2-c_1)$, $\alpha = \max\{\delta_2/(c_2-c_1), \beta\}$,

$$F(s) = \varepsilon^{-1}U_1(\exp(\varepsilon^{-2}s)), \quad G(s) = \varepsilon^{-2}U_2(\exp(\varepsilon^{-2}s))$$

とおくと, $\alpha \geq \beta > 1$ で, (10), (11) より

$$F(s) \geq C_1,\ F(s) \geq C_2\int_0^s F(\sigma)G(\sigma)\,d\sigma, \quad s \geq 0, \tag{13}$$

$$G(s) \geq C_3\varepsilon^{-2}\int_{s-\varepsilon^2\log\beta}^s \left\{1-\exp(-\varepsilon^{-2}(s-\sigma))\right\}F(\sigma)^2\,d\sigma, \quad s \geq \log\alpha. \tag{14}$$

ここで, $A>0, S\geq 0$ に対して $F(s)\geq A\,(s\geq S)$ が成り立つならば, (14) より, $h\in(0,1]$, $s\geq \max\{S+h\log\beta, \log\alpha\}$ に対して

$$\begin{aligned} G(s) &\geq C_3\varepsilon^{-2}A^2\int_{s-\varepsilon^2 h\log\beta}^{s}\left\{1-\exp(-\varepsilon^{-2}(s-\sigma))\right\}d\sigma \\ &= C_3A^2\int_0^{h\log\beta}(1-e^{-\sigma})\,d\sigma \geq \frac{C_3(\beta-1)\log\beta}{2\beta}h^2A^2 \end{aligned} \tag{15}$$

が成り立つ. ここで次の事実を用いた.

$$1-e^{-\sigma}\geq \frac{1-\exp(-\log\beta)}{\log\beta}\sigma = \frac{\beta-1}{\beta\log\beta}\sigma, \quad 0\leq\sigma\leq\log\beta.$$

さて, $s\geq\log\alpha$ に対して, (13) と (15) より

$$F(s)\geq C_1C_2\int_{\log\alpha}^{s}G(\sigma)\,d\sigma \geq \frac{C_1^3C_2C_3(\beta-1)\log\beta}{2\beta}(s-\log\alpha). \tag{16}$$

また, (13) と (15) より, $A>0$, $S\geq 0$ に対して $F(s)\geq A$ $(s\geq S)$ ならば, $h\in(0,1]$, $s\geq\max\{S+h(1+\log\beta), \log\alpha+h\}$ に対して

$$F(s)\geq C_1C_2\int_{s-h}^{s}G(\sigma)\,d\sigma\geq\frac{C_1C_2C_3(\beta-1)\log\beta}{2\beta}h^3A^2 \tag{17}$$

が成り立つ. ここで, 定数 γ と A_1 を

$$\gamma=\max\{1,\frac{2\beta}{C_1C_2C_3(\beta-1)\log\beta}\}, \quad A_1=\gamma\exp\left(1+6\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\log k\right)$$

と定めると, (16) より, $F(s)\geq A_1$ $(s\geq S_1)$ となる定数 $S_1\geq\log\alpha$ が存在する. さらに, 数列 $\{A_n\}$ と $\{S_n\}$ を

$$A_{n+1}=\frac{A_n^2}{\gamma n^6}, \quad S_{n+1}=S_n+\frac{1+\log\beta}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}$$

と定めると, (17) より, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $F(s)\geq A_n$ $(s\geq S_n)$ であり,

$$\log A_{n+1}=2^n\left(\log A_1-(1-2^{-n})\log\gamma-6\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\log k\right)\geq 2^n$$

が成り立つ. よって, $(F(s),G(s))$ は $S^*\leq\lim_{n\to\infty}S_n=S_1+(1+\log\beta)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}<\infty$ なる $s=S^*$ で爆発する. □

References

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, The null conditions and global existence of solutions to systems of wave equations with different propagation speeds, "Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics" (S. Kawashima and T. Yanagisawa ed.), Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., Vol. 48, 43–86, World Scientific, Singapore, 1998.

[2] D. Christodoulou, Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 267–282.

[3] A. Hoshiga and H. Kubo, Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 486–513.

[4] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* **28** (1979), 235–268.

[5] F. John, Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 29–51.

[6] F. John and S. Klainerman, Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 443–455.

[7] S. Katayama, Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions, Preprint.

[8] S. Katayama, Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds, Preprint.

[9] S. Katayama, Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms, Preprint.

[10] S. Katayama and K. Yokoyama, in preparation.

[11] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, *Lectures in Appl. Math.* **23** (1986), 293–326.

[12] M. Kovalyov, Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations, *J. Differential Equations* **77** (1989), 73–83.

[13] H. Kubo, Blow-up of solutions to semilinear wave equations with initial data of slow decay in low space dimensions, *Differential Integral Equations* **7** (1994), 315–321.

[14] H. Kubo and M. Ohta, Small data blowup for systems of semilinear wave equations with different propagation speeds in three space dimensions, *J. Differential Equations* **163** (2000), 475–492.

[15] H. Kubo and M. Ohta, On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions, Preprint.

[16] K. Kubota and K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation, *Japanese J. Math.* **27** (2001), 113–202.

[17] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **101A** (1985), 31–44.

[18] T. C. Sideris, Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **8** (1983), 1283–1323.

[19] T. C. Sideris and S.-Y. Tu, Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2001), 477–488.

[20] H. Takamura, An elementary proof of the exponential blow-up for semilinear wave equations, *Math. Meth. Appl. Sci.* **17** (1994), 239–249.

[21] K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions, *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), 609–632.

[22] Y. Zhou, Blow up of classical solutions to $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions, *J. Partial Differential Equations* **5** (1992), 21–32.