数理解析研究所講究録 1332 巻 2003 年 71-74

アメナブル離散量子群

東京大学大学院数理科学研究科 戸松 玲治 (Reiji Tomatsu)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

1. 序

アメナブル離散群の特徴づけとしてよく知られた定理:「離散群がアメナブルであることとその reduced group C^*-環が nuclear であることは同値である。」をアメナブルな離散量子群に対して拡張することを考えた。
まず量子群の定義を復習しよう。以下に続く定義は [K-V] による。

Definition 1.1. 二つ組 (M, Δ) が次の性質を有するとき局所コンパクト量子群とよぶ。:

(1) M はフォンノイマン環であって写像 $\Delta : M \to M \otimes M$ は正則単位的な忠実 $*$ 順同型で次の余積律をみたす。
$(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta.$
(2) M 上忠実半有限正則荷重 φ(resp. ψ) は左 (resp. 右) 不変である。すなわち次の関係式をみたす。

$$\varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(x)) = \omega(1)\varphi(x) \text{ for all } x \in m_\varphi^+,\ \omega \in M_*^+$$
$$(\text{resp. } \psi((\iota \otimes \omega)\Delta(x)) = \omega(1)\psi(x) \text{ for all } x \in m_\psi^+,\ \omega \in M_*^+).$$

$\varphi(1) < \infty$ のとき (M, Δ) はコンパクトであるといい、正規化して $\varphi(1) = 1$ としておく。ここで fundamental unitary と呼ばれるユニタリ作用素を導入する。

Definition 1.2. (π, H, Λ) を左不変荷重 φ に付随する M の半巡回表現とする。このときテンソル積ヒルベルト空間上の作用素 W を次で定義する。

$$W^*(\Lambda \otimes \Lambda)(x \otimes y) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(y)(x \otimes 1))$$

Wが実際にユニタリになっていることは非自明なことで[K-V]の中で詳しく論じられている。各局所コンパクト量子群（以下単に量子群と呼ぶ）(M,Δ)に対して双対量子群$(\hat{M},\hat{\Delta})$が定義できる。ここにフォンノイマン環$\hat{M}$は$B(H)$の中で部分空間$\{(\omega\otimes\iota)(W);\omega\in B(H)_*\}$の汎弱閉包をとったもの、余積$\hat{\Delta}$は$\hat{\Delta}(x)=\hat{W}^*(1\otimes x)\hat{W}$として定義される。左、右不変荷重は群フォンノイマン環のPlancherel荷重の作り方をまねて定義でき、これらが新たに量子群となる。今(M,Δ)から$(\hat{M},\hat{\Delta})$を構成したのと同様の操作を$(\hat{M},\hat{\Delta})$に対して行うと、第二双対量子群$(\hat{\hat{M}},\hat{\hat{\Delta}})$が得られる。この量子群は最初の量子群$(M,\Delta)$と自然に同型である。またさらに先の部分空間のノルム閉包をとったものはC^*-環でありKustermansとVaesのいうC^*-環的な量子群の構造を持つ([K-V])。ここではこのC^*-環をAと記す。同じようにして$(\hat{M},\hat{\Delta})$に対応する“A”を$\hat{A}$であらわす。コンパクト量子群の双対を離散量子群とよぶ。

2. アメナビリティと主結果

群の場合と同じようにアメナビリティが定義できる。

Definition 2.1. (M,Δ)が不変状態を有する時に(M,Δ)はアメナブルという。ここに状態mが左不変とは、等式$(\omega\otimes m)(\Delta(x))=\omega(1)m(x)$がすべての$x\in M$, すべての$\omega\in M_*$について成立することをいう。

次に二つの条件を導入する。

Definition 2.2. (1) 量子群(M,Δ)が条件(W_1)をみたすとは、次のようなHの単位ベクトルのネット$\{\xi_j\}_{j\in J}$が存在するときにいう。任意のベクトル$\eta\in H$に対して、$\lim_j\|W(\eta\otimes\xi_j)-\eta\otimes\xi_j\|=0$が成り立つ。

(2) 量子群(M,Δ)が条件(W_2)をみたすとは、次のようなHの単位ベクトルのネット$\{\xi_j\}_{j\in J}$が存在するときにいう。任意のC^*-環Aの表現(π,H_π)と任意のベクトル$\eta\in H$に対して、$\lim_j\|(\pi\otimes\iota)(W)(\eta\otimes\xi_j)-\eta\otimes\xi_j\|=0$が成り立つ。ここに作用素$W$が$A\otimes\mathcal{K}(H)$のmultipierに属することに注意しておく。

まずこの二条件にたいして次の結果が分かった([T])。

Proposition 2.3. 条件(W_1)と条件(W_2)は同値である。

これと合わせて次に述べる主結果を得られた。

Theorem 2.4. (M,Δ)を離散量子群とする時、以下は同値である。

(1) (M,Δ)はアメナブルである。
(2) (M,Δ)は条件 (W_1) をみたす。
(3) (M,Δ)は条件 (W_2) をみたす。
(4) C^*-環 $\hat{A}$ は指標をもつ。
(5) C^*-環 $\hat{A}$ は指標をもち、且つ *nuclear* である。
(6) フォンノイマン環 $\hat{M}$ は $\hat{A}$-*linear* な状態をもち、且つ *injective* である。

この結果について幾つかRemarkしておきたい。この結果で一番肝要なことは$1 \Rightarrow 2$を証明したことで、(M,Δ)の離散性を外した場合に成り立つかどうかは未解決である。また離散Kac環の場合にはRuan([R])によってこれと同様の結果が得られている。Operator Amenabilityと一般の離散量子群のAmenabilityとの相性のよさあまり分かっていない。量子群のアメナビリティはBedos、Murphy、Tuset並びにContiたちによって研究されている。([B-C-T]、[B-M-T1]、[B-M-T2]、[B-M-T3]) これらの中で先に述べた$1 \Rightarrow 2$は一切示されていないが、[D-Q-V]の序文で触れられているようにBlanchardとVaesはこの個所を比較的平易に示している（２００３年４月の時点で論文は出ていない）。最後に5のstatementについて。本来これは指標の存在の仮定なしに示されるべきものであったが、この試みは未だに成功していない。前出のRuanの論文がヒントになるような気もするが、まだまだ遠いような気もする。

References

[B-C-T] E. Bedos, R Conti, L. Tuset, *On amenability and co-amenability of algebraic quantum groups and their corepresentations*, #OA/0111027.

[B-M-T1] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Co-amenability of compact quantum groups*, J. Geom. Phys. **40** (2001), no. 2, 130–153.

[B-M-T2] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Amenability and coamenability of algebraic quantum groups*, Int. J. Math. Math. Sci. **31** (2002), no. 10, 577–601.

[B-M-T3] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Amenability and coamenability of algebraic quantum groups II*, #OA/0111026.

[D-Q-V] P. Desmedt and J. Quaegebeur and S. Vaes, *Amenability and the bicrossed product construction*, Illinois Journal of Mathematics, to appear, #QA/0111320.

[E-S1] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Algèbres de Kac moyennables*, (French) [Amenable Kac algebras], Pacific J. Math. **125** (1986), no. 2, 363–379.

[E-S2] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag (1992).

[Ka] G. I. Kac, *Ring groups and the duality principle* (Russian), Trudy Moskov. Mat. Obšč. **12** (1963) 259–301.

[K-V] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **33** (2000), no. 6, 837–934.

[M-N] T. Masuda and Y. Nakagami, *A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 5, 799–850.

[M-V] A. Maes and A. Van Daele, *Notes on compact quantum groups*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **16** (1998), no. 1-2, 73–112.

[R] Z.-J. Ruan, *Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras*, J. Funct. Anal. **139** (1996), no. 2, 466–499.

[T] R. Tomatsu, *Amenable Discrete Quantum Groups*, preprint.

[V] S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ph. D. thesis KU-Leuven (2001).

[VV] S. Vaes and A. Van Daele, *The Heisenberg commutation relations, commuting squares and the Haar measure on locally compact quantum groups*, Proceedings of the OAMP Conference, Constanţa, 2001, to appear.

[W1] S. L. Woronowicz, *Twisted* SU(2) *group An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 1, 117–181.

[W2] S. L. Woronowicz, *Compact quantum groups*, Symetries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, (1998).