数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 93-98

Sullivan's dictionary about graph models

谷口雅彦

京都大学大学院理学研究科

1 Introduction

クライン群と有理関数の力学系におけるサリバンの辞書において、自己相似集合とツリーフラクタル(フラクタル残余)の関係に対応する項目についての解説をおこなう。

2 クライン群の場合

2.1 tree 構造をめぐって

クライン群とは、タイヒミュラー空間論においては、指標(marking)の幾何学的表現である。その群構造は幾何学的群論での群の普遍モデルであるケーリーグラフにより表わされる。

Definition 群 G の有限生成系 S に関する G のケーリーグラフ Γ とは

1. Γ の頂点の集合は G と同一視できる
2. 任意の二つの頂点 x, y をつなぐ edge が存在するのは S の元 g により $x = gy$ となるときかつその時に限る

を満たすものである。

Example 1 コンパクトでない3次元双曲多様体の基本群は自由群で、そのケーリーグラフは *tree* である。

Remark ケーリーグラフには通常 word length が導入され、完備距離空間となる。

次に、クライン群 G のケーリーグラフは組み合わせ論的に実現できる。具体的には、$\mathbb{H}^3$ における軌道を用いての双曲実現が可能である。

Definition 双曲空間の上半空間モデル H^3 において $o=(0,0,1)$ の G による軌道 $G(o)$ を考え、$G(o)$ が局所有限であると仮定する。このときケーリーグラフの場合と同様に、ただし測地線分で $G(o)$ の点を結ぶ。このようにして得られた graph をケーリーグラフの**双曲実現** と呼ぶ。

一方、より包括的な記述として、ディリクレ多面体によるタイリングがある。その貼り合わせは層構造を与えると考えることもできる。

2.2 フラクタル境界をめぐって

Definition R が距離空間のとき、その任意の有界閉部分集合の補集合の連結成分を R のエンド領域と呼ぶ。エンド領域の包含関係による縮小列に自然な同値関係を入れたものを R のエンドとよび、それら全体を R に付け加えて自然な位相を入れたものをエンド拡大という。

Example 2 群 G のケーリーグラフのエンド拡大をその群完備化 (group completion) と呼び、その境界を ∂G で表わす

Remark 通常、群の完備化は word length の rescaling により行われる等比級数的な rescaling を用いてもよいが、逆 2 乗的な rescaling が標準的である

一方、双曲実現の視境界として、極限集合がある。

Definition $G(o)$ の $\widehat{\mathbb{R}}^3$ での集積点全体（いわゆる視境界）が G の極限集合であり $\Lambda(G)$ で表す

ここで、普遍モデルとの関係が問題となるが、まだ解決していない。すなわち

Conjecture 有限生成基本群 G を持つ任意の 3 次元双曲多様体 N に対し、連続な G-同変写像

$$F:\partial G\to\Lambda(N)$$

が存在する

という予想は、

- N が幾何学的有限な場合：Floyd (1980)

- N がコンパクト面の $\mathbb{Z}$-被覆の場合：Cannon-Thurston (1985)
- N が有界幾何学を持つ場合：Minsky (1994)
- N の基本群が、交換子が放物型である２元で生成される場合：Mc-Mullen (2001)

にのみ解決されている。

さらに極限集合が補集合を分けない場合には、の $\mathbb{R}$-tree 構造が入る。

Definition 距離空間 (X, d) が $\mathbb{R}$-tree であるとは一意的測地空間（すなわち任意の二点を結ぶ測地線分が一意に定まる）ことである

すなわち、任意の二点 x, y を結ぶ単純弧が（パラメータの取り換えを除き）一意に存在し、その長さが $d(x, y)$ に等しい。

Remark 一般に $\mathbb{R}$-tree は局所コンパクトではない。また、$\mathbb{R}$-tree はエンド拡大できる。

Proposition 1 (Abikoff) 有限生成全退化クライン群 G が局所連結な極限集合 $\Lambda(G)$ を持つことは、$\mathbb{R}$-*tree* のエンド拡大の構造を持つことと同値である。

3 多項式の場合

以下では、主に２次多項式 の場合限って述べる。

3.1 tree 構造をめぐって

２次多項式の力学系的構造は、その反復合成の被覆構造の tower で記述できる。したがって、クライン群に対応するものは、２次多項式そのものより、反復合成の tower と考えることもできる。その立場では次のような普遍モデルを考えることができる。

Proposition 2 ２次多項式 f の反復合成列の *geometric limit* T_∞ は $\mathbb{C}^\infty$ のなかに、単連結なネットワークとして、したがって $\mathbb{R}$-*tree* として表現できる

構成（**Growing tree construction**）

1. f の configuration tree を T_1 （閉線分）とする
2. f^n の configuration tree $T_n \subset \mathbb{R}^n$ は f^{n-1} の tree $T_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ の各頂点をもう一つの次元方向に T_1 に blow up して得られる
このとき、標準射影
$$\pi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$
は T_n の T_{n-1} へのレトラクションを与える
3. 普遍モデル T_∞ は $\{T_n\}$ の projective limit である：集合としては
$$T_\infty = \bigcup_n T_n$$
で定義される

Proposition 3 元の二次多項式 f は T_∞ に *shifts* の半群として表現される

ただし、この普遍モデルの「実現」は一般には望めない。個々の被覆構造なら、たとえば configuraiton tree として実現可能で、その tower を考えることはできる。少なくとも多項式に対しては、被覆構造の tower により力学系構造が決定される。

Definition
Plain configuration tree T とは planar tree で、高々可算個の vertices を持ち、そのひとつが *initial vertex* v_T である。Tree T は

1. vertices は黒か白
2. edges は黒か白か赤
3. $\mathbb{Z}$-unit に含まれない edge は、黒の vertex から出るか、白の vertex から出るかで黒か赤

と色づけされている。白色部分の connected component は tree $\mathbb{R}$ (vertices $\mathbb{Z}$) と同一視できる。

Definition Plain configuration tree T, configuration data S , data map s_T の三つ組 (T, S, s_T) を *decorated ideal configuration tree (DICT)* と呼ぶ。

次に、タイリングの手法としては Mcmullen-Sullivan による grand orbits に関する tiling がある。また、Lybich-Minsky は *affine leaf space* という lamination 表現を考えた。

有理函数 f に対し

1. *natural extension* :

$$N_f = \{\hat{z_0} = (z_0, z_{-1}, \cdots) \in \widehat{\mathbb{C}}^\infty \mid z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}, f(z_{-n}) = z_{-n+1}\}$$

   $\pi(\hat{z_0}) = z_0$ を射影とする
   f は
   $$\hat{f}(\hat{z}) = (f(z_0), z_0, z_{-1}, \cdots)$$
   と拡張できる
   $$(\hat{f})^{-1}(\hat{z}) = (z_{-1}, z_{-2}, \cdots)$$
   により逆変換がシフトとして定まる
2. *regular leaf space* : $\hat{z} \in N_f$ が regular であるとは、z_0 の近傍 U で十分大きい n に対しては $f : U_{n-1} \to U_n$ が単射なものが存在すること (ただし U_{-n} は $\hat{z}$ に沿った U の pull-back)
   $$\mathcal{R}_f = \{\hat{z} \in N_f \mid \hat{z} : regular\}$$
   を regular leaf space と呼ぶ
   また $L(\hat{z})$ で $\hat{z}$ を含む leaf を表わす
3. $\mathbb{C}$ に同型な leaf を *affine leaf* といい、 affine leaf 全体の和集合を $\mathcal{A}_f^n$ で表わし、*affine part* という

Example 3 *Sullivan の Solenoid* : $f(z) = z^2$ なら $\mathcal{R}_f = N_f - \{\hat{0}, \hat{\infty}\}$

Remark 一般には、さらに $\mathcal{A}_f^n$ のコンパクト化が必要になる。

3.2 フラクタル境界をめぐって

普遍モデルの何らかの意味での境界の実現は Julia 集合（あるいはその表現）であるべきであるが、そのような関連付けは知られていない。

ただ、Julia 集合が補集合を分けない場の $\mathbb{R}$-tree 構造を表現する、あるいは一般に pinched disk 構造を表現する手法もいくつか知られている。2 次多項式に対してはたとえば、Hubbard tree から生成される有限 tree 列、Douady の disk tree 列、それらの融合としての growing trees 等が

参考文献

[1] L. Alsedá and N. Fagella, *Dynamics on Hubberd trees,* Fund. Math., **164** (2000), 115–141.

[2] A. Blokh and G. Levin *An inequality for laminations, Julia sets and "growing trees",* Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 63–97.

[3] A. Douady, *Descriptions of compact sets in* $\mathbb{C}$, Topological Methods in Modern Math., (1993), 429–465.

[4] T. Kawahira, *On the regular leaf space of the cauliflower,* to appear.

[5] Lybich and Minsky *Laminations in holomorphic dynamics,* J. Diff. Geom. **47** (1997), 17–94.

[6] C. McMullen, *Local connectivity, Kleinian groups and geodesics on the blowup of the torus,* Invent. math., **146** (2001), 35–91.

[7] C. McMullen and D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmuller space of a holomorphic dynamical system,* Adv. Math. **135** (1998), 351–395.

[8] J. Otal, *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds,* SMF/AMS Texts and Monog., **7**, 2001.

[9] K. Pilgrim, *Dessins d'enfants and Hubbard trees,* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **33** (2000), 671–693.

[10] M. Taniguchi, *Synthetic deformation space of an entire function,* to appear in Contemporary Math. **303** 2002, 107–136.

[11] M. Taniguchi, *The entire Hurwitz spaces,* in preperation.

[12] 山口毅, *Word length* とクライン群の *limit set,* 修士論文（東京工業大学）, 2002.