数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 122-129

A stability of the crossed product by Cuntz algebra

京都大学 数理解析研究所 野澤 剛史 (Takeshi Nozawa)
Reserch Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

ここでは代数的場の理論の問題に起源を持つ Doplicher-Roberts によるコンパクト群の双対定理を紹介し、その証明に於いて Cuntz 環がどのようなに使われたのかを一瞥する。さらに、場の理論の問題の拡張に於いてもその方法が有効であろうことを議論する。(小嶋 泉氏との共同研究による)

§1 Cuntz 環とテンソル圏

Cuntz 環は、様々な側面からの考察により、種々の一般化が行われている。例えば Hilbert 空間上の Fock 空間の生成作用素の Toeplitz 環から来るものとして、これを双加群に拡張した Pimsner の $\mathcal{O}_E$[P] や Katayama の $\mathcal{O}_N^M$[Ka]、或は、記号力学系との関連から Cuntz-Krieger の $\mathcal{O}_A$[CK] や Matsumoto の $\mathcal{O}_\Lambda$[M] 、亜群 C^* 環として捉える Kumjian らの研究 [Ku] などなど。それらの環の構造や相互の関連性はよく知られ、Jones 指数と K- 理論 [KW] など、研究が広く行なわれている。また、この講究録にある通りフラクタルの研究にも応用されている。

このように、多様な顔を持つ Cuntz 環だが、Hilbert 空間の作る C^*- テンソル圏から来る C^* 環として考えることもできる。

Doplicher-Roberts の双対定理とは、ある抽象的な C^*- テンソル圏とコンパクト群のユニタリー表現の圏の同型定理である [DR1]。その証明の途中、一般の C^*- テンソル圏 T から C^* 環とその自己準同型の組 $(\mathcal{O}_\rho, \hat{\rho})$ を構成する方法を導入した。

T の対象 ρ を固定し、そのテンソル積 ρ^r から ρ^s への射 (ρ^r, ρ^s) に対し埋め込みの

列を、(ρ,ρ) の単位射 $\mathbb{I}_\rho$ を右からテンソルすることにより与える。

$$(\rho^r,\rho^{k+r}) \longrightarrow (\rho^{r+1},\rho^{k+r+1}) \longrightarrow (\rho^{r+2},\rho^{k+r+2}) \longrightarrow \cdots$$

その帰納極限 $\mathcal{O}_\rho^k := \lim_{i\to\infty}(\rho^{r+i},\rho^{k+r+i})$ の直和には C^*-norm が一意に入る。その閉包でテンソル圏の対象がインデックスとして付いている C^* 環 $\mathcal{O}_\rho := \overline{\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_\rho^k}$ が定義される。一方、単位射 $\mathbb{I}_\rho$ の左からのテンソルによる埋め込みによっては、自己準同型 $\hat{\rho}$ が定義される。ρ で生成される T の部分テンソル圏 T_ρ の構造は $\hat{\rho}$ の作るテンソル圏に移される。

Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ は生成元 $\{\psi_i\}_{i=1}^d$ の作る線形空間 V である環と同型で、付随する準同型はカノニカル準同型 $\sigma(\cdot) = \sum \psi_i \cdot \psi_i^*$ である。

$I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Lambda := \{\{1,\cdots,d\}^n, n \in \mathbb{N}\}$ に対し、$\psi_I := \psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots\psi_{i_n}$ とする。$\mathcal{O}_d$ の元は $\psi_I\psi_J{}^*$ $(I, J \in \Lambda)$ の線形和で近似できるが、$|I| - |J| = k$ ならば $\psi_I\psi_J{}^*$ は $(V^{\otimes r}, V^{\otimes r+k})$ の元に対応し、また (σ^r, σ^{r+k}) の元であることはすぐ確かめられる。

V 上の $U(d)$ 作用が $\mathcal{O}_d$ の自己同型群になることはよく知られた事実である。この自己同型群は σ と可換であるので,$U(d) \supset G$ に対し σ は $\mathcal{O}_d$ の G- 作用の固定点環 $\mathcal{O}_d^G$ の準同型でもある。V 上の G 作用を G の基本表現 π と見れば、この表現が生成するテンソル圏に付随する $\mathcal{O}_{(\pi,V)}$ は $\mathcal{O}_d^G$ と同型である。また $G \simeq \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_d^G}\mathcal{O}_\mathrm{d}$ であり、これは Tannaka の双対定理を示すものである。例えば、$U(d), SU(d)$ に対しては、

$$\mathcal{O}_d^{U(d)} \simeq C^*(\mathbb{P}_\infty), \quad \mathcal{O}_d^{SU(d)} \simeq C^*\{\mathbb{P}, S, \sigma^n(S) | n \in \mathbb{N}\}.$$

ここで $\mathbb{P}_\infty$ は置換群、$S := (d!)^{-1/2}\sum_{p\in\mathbb{P}_d}\mathrm{sign}(p)\psi_{p(1)}\cdots\psi_{p(d)}$ である。

この側面から拡張も行なわれていて、無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{O}_\mathcal{H}$[CDPR], あるいは Hilbert 加群に対する Doplicher-Pinzari-Zuccante の $\mathcal{O}_{X_\Lambda}$[DPZ] と Pimsner の $\mathcal{O}_E$ との関係も知られている。

§2 代数的場の理論

さて代数的場の理論の問題はどのようなものであったか。

代数的場の理論とは公理論的場の理論の一つで、Wightman の公理系における場としての作用素値超関数の代りに、観測量の作る作用素環系を考察する。それは、4次

元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}$ の有界領域 $\mathcal{O}$ に対し作用素環 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ があって、

- $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ ならば $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ (単調性)
- $\mathcal{M}$ 上の非斉次 Lorentz 変換 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ に対し $\mathcal{A} := \overline{\cup_{\mathcal{O}}\mathcal{A}(\mathcal{O})}^{C^*}$ の自己同型群 α があって $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ に対して $\alpha_g(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(g\mathcal{O})$(共変性)
- $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が空間的ならば $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ と $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ は可換 (Einstein の因果律)

を満たす C^* 環のネット $\mathcal{A}$ である。$\mathcal{A}(\mathcal{O})$ は領域 $\mathcal{O}$ で観測される物理量を想定しているもので、Wightman の公理系との関係や、散乱理論が展開できることが知られている。(詳しくは Haag[H],Araki[A] を参照)

観測量は、場の演算子のうちゲージ不変な量であった。例えばフェルミオンの生成演算子は上の因果律の公理でもわかるが、観測量ではない。それでは、この公理系で場はどのようなものであらわされるのか、ゲージ不変でない場とゲージ群を観測量の作る作用素環から再構成できるのか？

はじめに場の作用素環系 $\mathcal{F}$(因果律に反可換も許したもの) と大域的ゲージ対称性として非斉次 Lorentz 変換の作用と可換なコンパクト自己同型群 G、及び G- 不変な真空状態 ω を仮定し、その GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ を考える。ここで $\mathcal{F}$ の G による固定点環

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \mathcal{F}(\mathcal{O})^G = \{A \in \pi_\omega(\mathcal{F}(\mathcal{O})) | \alpha_g(A) = A, {}^\forall g \in G\}$$

の系 $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{M}}$ は先の公理を満たす。

この $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}_\omega$ 上の表現を因子環表現に分解するとそれは G のユニタリー表現の既約分解にもなる。またこの因子環表現 π_ρ は $\mathcal{A}$ の状態 ω_ρ で時空の空間的遠方では真空状態 ω_0 に近づくものであって GNS 表現が既約であるものと同値である。

$$||(\omega_\rho - \omega_0)|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}+\mathbf{x})}|| \longrightarrow 0, \text{as } \mathbf{x} \text{ goes spacelike infinity.}$$

この集合は「DHR selection criterion」を満たすと言う。このような状態と G の既約表現とは一対一に対応する。G の自明な表現には $\mathcal{A}$ の真空表現 π_0 が対応し「Haag の双対性」と呼ばれる次の性質を満たす。

$$\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))'$$

そのような $\mathcal{A}$ の状態の集合に G の情報が含まれているだろうことが予想できる。

§3Cuntz 環と場の理論

$\mathcal{F}$ を仮定せず $\mathcal{A}$ の条件から出発する。以下 $\pi_0(\mathcal{A})$ と $\mathcal{A}$ を同一視する。真空表現に次を仮定する。

- Haag の双対性
- 性質 B; $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ の射影 E に対し等長作用素 $W \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ があって、$WW^* = E$

「DHR selection criterion」とエネルギーのスペクトル条件を満たす状態の集合 $\mathcal{S}$ を考える。$\mathcal{S}$ の状態 ω_ρ に対し、真空表現の自己準同型 ρ があって、$\omega_\rho(A) = \omega_0(\rho(A))$ と書ける。$\mathcal{S}$ に対する真空表現の準同型の集合と、それらの繋絡作用素で圏 $\mathcal{T}_{DR}$ になるが、さらに、テンソル積で閉じていて、性質 B により直和、制限があり、「共役」をもち、時空が 4 次元であることから置換群の構造を持つ。(ちなみに、時空の次元が低い時は組み紐群がでる。)

先に書いた「D-R の双対定理」の抽象的な圏とは、これら、「直和、制限、共役、置換群」の構造を持つ C^*- テンソル圏のことである。

この圏から Hilbert 空間の圏へのテンソル関手を与えられれば群Gはその関手の自然ユニタリー変換であり、Doplicher-Roberts は圏の生成元となる準同型からできる環が、Cuntz 環のある群の固定部分環と同型であることを証明し、その関手を与えた [DR1]。その証明に使ったのが、群の双対の接合積とよばれる $\mathcal{A}$ の Cuntz 環による拡大の導入である [DR2]。この拡大環が再構成された場の作用素環系である [DR3].

もう少し詳しくみる。$\mathcal{T}_{DR}$ の対象 ρ に対し正の整数 $d(\rho)$ が決まる。これを ρ の次元という。群の表現の次元に対応する。次元が d の ρ は、ρ^d の d 次の完全反対称射影 $E \in (\rho^d, \rho^d)$ による制限が自明な準同型となるとき、「special」であるという。(例えば群の基本表現はこれに対応する。あるいは、表現 π とその共役 $\bar{\pi}$ の直和 $\pi \oplus \bar{\pi}$ はそれである。) このような ρ に対して E は性質 B により等長作用素 R_ρ で書けるが、この R_ρ が $\mathcal{O}_d$ の元 S と同様なある等式を満たす。また、$\mathcal{T}_{DR}$ の対象は「special」なもの直和成分になることが示される。

(一般の C^* 環の自己準同型に対しても、正数 d があって上のような射影 E と作用素 R があれば「special」という。もちろん、$\mathcal{O}_d$ のカノニカル準同型 σ は「special」

よって$\mathcal{T}_{DR}$の生成元となる対象を含む「special」な次元dのρから$\mathcal{O}_\rho$を構成すれば、$\mathcal{T}_{DR}$のテンソル構造はこれに含まれ、一方この中には$\mathcal{O}_d^{SU(d)}$が埋め込め、この埋め込み写像をμとすれば、

$$\mu((\sigma^r,\sigma^s)_{SU(d)}) \subset (\rho^r,\rho^s), \quad \mu\circ\sigma = \rho\circ\mu$$

となるのでこの条件より群の双対の接合積が定義できる。

（一般には埋め込み写像が$G \subset SU(d)$に対して条件を満たしている時、定義できる。）

接合積$\mathcal{F} := \mathcal{A}\otimes_\mu \mathcal{O}_d$は次の定義式をもつ$\mathcal{A}$と$\mathcal{O}_d$で生成される$C^*$環である。

$$\begin{aligned} \psi_i A &= \rho(A)\psi_i \quad A\in\mathcal{A}, \psi_i\in\mathcal{O}_d\text{: generators} \\ \psi_i{}^* &= (-1)^{d-1}\sqrt{d}R_\rho{}^*\hat{\psi}_i. \\ X &= \mu(X) \quad X\in\mathcal{O}_d^{SU(d)}. \end{aligned}$$

ここで$\hat{\psi}_i := ((d-1)!)^{-1/2}\sum_{p\in\mathbb{P}_d(i)}\mathrm{sign}(p)\psi_{p(2)}\cdots\psi_{p(d)}, \mathbb{P}_d(i)=\{p\in\mathbb{P}_d; p(1)=i\}$である。この環の中心のスペクトラムから一点を決めたとき、それを固定する群をGとすると、そのような群では

$$\mu((\sigma^r,\sigma^s)_G) = (\rho^r,\rho^s)$$

となる埋め込が存在し、$\mathcal{F}$は因子環で、$\mathcal{F}$上のG作用を$\mathcal{O}_d$への作用から引き起こされるもので定義すと、$A=F^G$. さらに$G=\mathrm{Aut}_\mathcal{A}\mathcal{F}$となる。

§4 自発的対称性の破れと接合積の安定性

再び$\mathcal{F}$から始める。GはLie群の場合を考える。

自発的対称性の破れがあった場合，すなわち$\mathcal{F}$の真空ωがG-不変でないとき$\mathcal{A}$のHaagの双対性は失われる [R]。不変になる部分群Hから$\mathcal{B} := \mathcal{F}^H$を定義すればHaagの双対性は満たす。これはまた$\mathcal{A}$とも関係し

$$\pi_0(\mathcal{B}(\mathcal{O})) = \pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))'$$

である。π_0 は $\mathcal{B}$ の真空表現である。$\mathcal{B}$ から先のように $\mathcal{F}$ は再構成できるが群 G の作用も H が接合積の $\mathcal{O}_d$ の自己同型であったように Cuntz 環の自己同型になるのであろうか？ G- 作用を考えるときも接合積の形は有効であろうか?

次のようなことが知られている [TM, 定理 2.10]。G をコンパクト群、H を閉部分群とする。任意の H の有限次元表現 ρ に対し G の有限次元表現 η と H の表現 σ が存在して、η の H への制限は直和 $\rho \oplus \sigma$ に同値である。

よって $\mathcal{O}_d$ の次元を大きくとれば、H の作用する空間に G の作用も考えられそうだが空間の次元が違えば一般に $\mathcal{O}_d$ と $\mathcal{O}_{d'}$ の間に埋め込みはない。ところが接合積の間では性質 B により $\mathcal{O}_d$ の埋め込みが存在する。

H の基本表現 π_ρ に対応する $\mathcal{B}$ の自己準同型 ρ による接合積 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_d^H} \mathcal{O}_d$ と π_ρ を含む表現に対応する、次元が $d+d'$ である「special」な準同型 $\tau = \rho \oplus \rho'$ による接合積 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{d+d'}^H} \mathcal{O}_{d+d'}$ はそれらの自己準同型が生成するテンソル圏が同じであるから接合積の一意性から同型であることは知られている。

次の写像が同型を与えることから $\mathcal{O}_d$ と $\mathcal{O}_{d+d'}$ の生成元に対応が付き H の作用も確に対応している。

$\mathcal{O}_{d+d'}$ のカノニカル準同型を σ' とし、τ が $\mathcal{B}$ の等長作用素 v,w で

$$\tau(\cdot) = v\rho(\cdot)v^* + w\rho'(\cdot)w^*$$

であるとすると $vv^* =: E \in (\tau,\tau) = (\sigma',\sigma')_H \subset (\sigma',\sigma')$ であるから $\mathcal{O}_{d+d'}$ の生成元 $\{\psi_i'\}_{i=1}^{d+d'}$ を

$$E\psi_i' = \psi_i' \quad i = 1,\cdots,d$$

となるようにとれる。

次のような $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_d^H} \mathcal{O}_d$ から $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{d+d'}^H} \mathcal{O}_{d+d'}$ への写像 χ は同型を与える。

$$\begin{aligned}\chi(\psi_i) &:= v^*\psi_i' \quad i = 1,\cdots,d \\ \chi(A) &:= A, \quad A \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

このことは、この写像により埋め込まれた先で、接合積の定義式を満たすことを確かめ、$\mathcal{O}_{d+d'}$ の生成元の残り $\{\psi_i\}_{d+1}^{d+d'}$ も ρ' が ρ^n に含まれるような n が存在することから、$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_d^H} \mathcal{O}_d$ の元で書け、よって $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{d+d'}^H} \mathcal{O}_{d+d'}$ が生成されることによって示さ

これにより、適当に ρ' をとれば $\mathcal{O}_{d+d'}$ の自己同型に G が含まれるようにできて、$g \in G$ に対し、

$$g(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}^{H}_{d+d'}} \mathcal{O}_{d+d'}) \simeq g(\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}^{gHg^{-1}}_{d+d'}} \mathcal{O}_{d+d'}$$

であるから、破れた対称性の作用でも接合積の形は保たれることがわかる。

d を無限に飛ばすことが考えられるが、接合積には「special」が効いているので、$\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ を接合積する方法は今のところ知られていない。

参考文献

[A] Araki,H. , 量子場の数理, 岩波書店 (1993).

[CDPR] Ceccherini,T.;Doplicher,S.;Pinzari,C.;Roberts,J.E., *J. Funct. Anal.* **125** 416-437(1994).

[CK] Cuntz,J.,Krieger,W., *Invent. Math.* **56** 251-268(1981).

[DPZ] Doplicher,S.,Pinzari,C.,Zuccante,R. , *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.(8)* **1** 263-281 (1998).

[DR1] Doplicher,S.,Roberts,J.E., *Invent.Math.* **98**,157(1989).

[DR2] — ,*Ann. Math.* **130** 75(1989).

[DR3] — ,*Commun. Math. Phys.* **131** 51(1990).

[H] Haag,R. ,Local Quantum Physics,Springer(1992).

[Ka] Katayama,Y , 数理解析研究所講究録 **858** 87-90 (1994).

[Ku] Kumjian,A.,Pask,D.,Raeburn,I.,Renault,J, *J.Funct.Anal.* **144** 505-541(1997).

[KW] Kajiwara, T.; Watatani,Y ,*Trans.Amer.Math.Soc.* **352** 3429-3472(2000).

[M] Matsumoto, K. ,*Internat.J.Math.* **8** 357-374(1997).

[NO] Nozawa,T.,Ojima,I. ,in preparation.

[P] Pimsner,M.V. ,*in* Free proberbility theory (D.Voiculescu,ed.), Amer. Math. Soc.,Field Institute Communications **12** 189-212(1997).

[R] Roberts,J.E. ,*in* Proc. Internat. School of Math. Phys. (G.Gallavotti ed.),Camerino(1974).

[TM] Toda,H.,Mimura,M. , リー群の位相 (下), 紀伊国屋書店 (1979).