

Comparison of the risks of set estimation procedures in testing

筑波大・数理物質科学 舞原 寛祐 (Hirosuke Maihara)
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

統計的決定論の見地から、仮説検定方式のリスクは0-1損失を用いて表わされることはよく知られている(たとえば, Lehmann [Le86] 参照). しかし, そのような設定は第一種の過誤, 第二種の過誤という形に囚われ過ぎている. 最近, 仮説を母数の集合と見なして, その定義関数の推定問題として検定問題を考え, 2乗損失 $L^{(0)}$ によるリスクの評価が行われている. 特に, 正規分布 $N(\theta, 1)$ における片側仮説検定問題において, Neyman-Pearson (N-P) 検定, p 値, Bayes 決定方式のリスクの比較が行われている (Hwang *et al.* [HCRWF92]).

最近, Maihara and Akahira ([MA02a], [MA02b]) は, 位置母数, 尺度母数の片側検定問題において, 2乗荷重をもつ2乗損失 $L^{(2)}$ によるリスクを, 正規分布の場合に, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定について求めて比較検討を行った. 特に, 正規分布の平均の片側検定問題において, Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解を数値的に求めた. そこでは, $L^{(2)}$ によるリスクの有用性ととも, 従来 of N-P 検定よりも Bayes 決定方式, p 値が比較的良いことも示した. 本論では, そのことを踏まえて, 絶対荷重をもつ2乗損失 $L^{(1)}$ に基づくリスクによる決定方式の評価を行い, 2乗損失 $L^{(0)}$, 2乗荷重をもつ2乗損失 $L^{(2)}$ によるリスクとも併せて比較検討する. 特に, 正規分布の平均, 標準偏差および指数分布の位置母数の片側検定問題において, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定の比較を行うとともに Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解についても考察する. さらに, ノンパラメトリックな検定問題についても論じる.

2 設定

通常, 母数空間 Θ 上の母数 θ に関する帰無仮説 $H: \theta \in \Theta_0$, 対立仮説 $K: \theta \in \Theta_1$ ($\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$) の有意水準 α の仮説検定問題において, 標本 \mathbf{X} に基づく棄却域を $C = C_\alpha$ とする. このとき, d_1 を 'H を棄却する' という決定, d_2 を 'H を受容する' という決定として, 決定空間を $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ とする. いま, 確率ベクトル \mathbf{X} の観測値 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ について決定方式

$$\varphi(\mathbf{x}) := \begin{cases} d_1 & (\mathbf{x} \in C_\alpha), \\ d_2 & (\mathbf{x} \notin C_\alpha) \end{cases}$$

を考える. また, 損失関数として0-1損失

$$L_{0-1}(\theta, d) := \begin{cases} 0 & (\theta \in \Theta_0, d = d_2 \text{ のとき}), \\ 1 & (\theta \in \Theta_0, d = d_1 \text{ のとき}), \\ 1 & (\theta \in \Theta_1, d = d_2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\theta \in \Theta_1, d = d_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。以上のような決定問題の枠組みを考えた場合、第1種の過誤、第2種の過誤の確率は0-1損失による決定方式 φ のリスク、すなわち0-1損失の期待値を用いて、それぞれ

$$\begin{aligned} \text{第1種の過誤の確率} &= E_{\theta} [L_{0.1}(\theta, \varphi(\mathbf{X}))] (\leq \alpha) \quad (\theta \in \Theta_0), \\ \text{第2種の過誤の確率} &= E_{\theta} [L_{0.1}(\theta, \varphi(\mathbf{X}))] \quad (\theta \in \Theta_1) \end{aligned}$$

と表される。

確率ベクトル \mathbf{X} が確率密度関数(p.d.f.) $f(\mathbf{x}, \theta)$ ($\theta \in \Theta$)をもつ分布に従うとする。いま、 $\Theta_0, \Theta_1 \subset \mathbf{R}^1$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$ として、帰無仮説 $H: \theta \in \Theta_0$, 対立仮説 $K: \theta \in \Theta_1$ の検定問題において、 Θ_0 の定義関数 $\chi_{\Theta_0}(\theta)$ の推定を行う。その際、損失関数を

$$L_k(\theta, d) := c(\theta) |\chi_{\Theta_0}(\theta) - d|^k, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

とし、 $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$ となる可測関数 φ を決定方式といい¹⁾、 φ のリスクを

$$R_k(\theta, \varphi) := E_{\theta} [L_k(\theta, \varphi)] = \begin{cases} E_{\theta} [c(\theta) |1 - \varphi(\mathbf{X})|^k] & (\theta \in \Theta_0), \\ E_{\theta} [c(\theta) \{\varphi(\mathbf{X})\}^k] & (\theta \notin \Theta_0) \end{cases}$$

とする([RC94])。ただし、 $c(\theta)$ は Θ 上の非負値関数とする。Hwang *et al.* [HCRWF92]は、正規分布の場合に、平均の片側検定問題において、 $c(\theta) \equiv 1$, $k = 2$ としてN-P検定, p値, Bayes方式等のリスクの数値計算を行い、そしてそれらを図示して比較した。

次に、帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題において、(2.1)において $c(\theta) = |\theta - \theta_0|^{\gamma}$ ($\gamma > 0$)とした損失関数

$$L^{(\gamma)}(\theta, d) := |\theta - \theta_0|^{\gamma} \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - d\}^2$$

を考える。ただし、 $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$ である。これは、損失関数(2.1)と異なつて、仮説の境界 $\theta = \theta_0$ の近傍では H, K のいずれの下でも決定 d の損失は小さく、 $\theta = \theta_0$ からある程度離れたところでは d の損失が敏感に反応するようにしてある。この損失のほうが2乗損失よりも自然に見える。

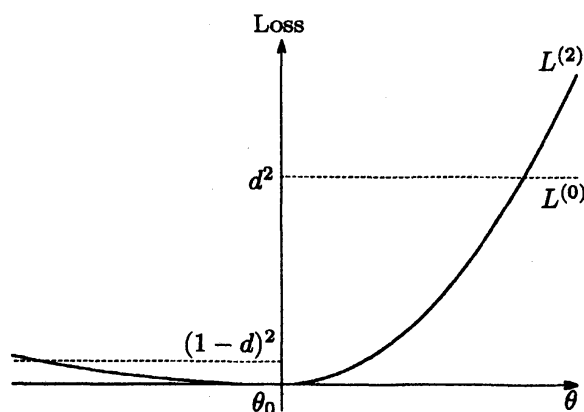


図1 通常の2乗損失 $L^{(0)}$ と荷重2乗損失 $L^{(2)}$

¹⁾いま、推定問題を考えているので、本文においては推定量とも呼んでいる。

このとき、決定方式 φ のリスクを

$$R^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_{\theta} [L^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = |\theta - \theta_0|^{\gamma} E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(\mathbf{X})\}^2]$$

とし、正規分布の平均の検定問題において、 $\gamma = 0, 1, 2$ として Bayes 方式、N-P 検定、p 値のリスクを求めて、数値計算を行い、それらを図示して比較する ($\gamma = 0$ の場合については [HCRWF92], $\gamma = 2$ の場合については [MA02a] 参照). また、Bayes 方式のミニマックス性についても考える.

さらに、 $\theta (> 0)$ が尺度母数の場合に、帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題において、 $\Theta_0 = (0, \theta_0]$ として損失関数

$$\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, d) := (\theta/\theta_0)^{\gamma} \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - d\}^2 \quad (\gamma \geq 0)$$

を考える. このとき、決定方式 φ のリスクを

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_{\theta} [\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = (\theta/\theta_0)^{\gamma} E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(\mathbf{X})\}^2]$$

とし、正規分布の標準偏差の検定問題において、 $\gamma = 0, 2$ として決定方式のリスクの比較および Bayes 方式のミニマックス性について考えた ([MA02a], [MA02b]). 本論では、 $\gamma = 1$ の場合も含めて考察する.

3 損失関数 L_2 によるリスク

まず、損失関数 L_2 による決定方式 φ のリスク $R_2(\theta, \varphi)$ について考える. いま、帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題において、任意の決定方式 φ について $E_{\theta}(\varphi^2)$ が θ の連続関数 (特に、 $\theta = \theta_0$ において右連続である) とする. このとき、 $\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) \geq 1/4$ であり、 $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1/2$ a.e. となる φ_0 はミニマックス決定方式になり、そのミニマックスリスクの値は $\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi_0) = 1/4$ である. また、 $\varphi(\mathbf{x}) \neq 1/2$ a.e. ならば $\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) > 1/4$ である.

ミニマックス決定方式 φ_0 のとる値 $1/2$ とは、被推定関数 $\chi_{\Theta_0}(\theta)$ のとる二つの値 0 と 1 の平均であり、ミニマックス決定方式 φ_0 は、帰無仮説が真か偽か、すなわち $\chi_{\Theta_0}(\theta) = 1$ なのか 0 なのかは五分五分であるという決定を下す決定方式であるといえる.

ここで、p 値の一般的な定義を述べる.

定義 3.1 与えられた観測値 \mathbf{x} に対して、検定が帰無仮説 H を棄却する最小の有意水準 $p = p(\mathbf{x})$ を p 値 (p-value) という. すなわち、水準 α での棄却域を $C = C(\alpha)$ とすると、p 値は

$$p(\mathbf{x}) := \inf_{\mathbf{x} \in C(\alpha)} \alpha$$

と表わすことができる.

多くの一般的な検定、例えば、帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の片側検定問題について、 \mathbf{X} に基づく検定統計量を $T(\mathbf{X})$ とし、有意水準が $\alpha = P_{\theta_0}\{T(\mathbf{X}) > u(\alpha)\}$ を満たし、棄却域が $C(\alpha) = \{\mathbf{x} \mid t = T(\mathbf{x}) > u(\alpha)\}$ となるような検定を考えた場合、 T の分布

の裾確率 $r(t) := P_{\theta_0}\{T(\mathbf{X}) > t\}$ と p 値が合致する. すなわち, $F_{\theta_0}^T(t)$ を T の c.d.f.(累積分布関数) とすれば,

$$p(t) = P_{\theta_0}\{T(\mathbf{X}) > t\} = 1 - F_{\theta_0}^T(t)$$

となる.

4 損失 $L(\gamma)$ によるリスク

4.1 位置母数の片側検定の場合

まず, θ が位置母数の場合について考える. 無作為標本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ に基づく統計量 $T = T(\mathbf{X})$ が (Lebesgue 測度に関する) p.d.f. $f(t - \theta)$ をもつとし, 決定方式の 1 つとして Bayes 決定方式を構成するために, θ の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度 π を考える. いま, 帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題において, $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$, $\theta_0 = 0$ とする. 決定方式 φ のリスク

$$R^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_{\theta} [L^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = |\theta - \theta_0|^{\gamma} E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(T)\}^2]$$

の π による期待値, すなわち φ の Bayes リスク

$$\begin{aligned} r_{\pi}(\varphi) &:= E_{\pi} [R^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\{1 - \varphi(t)\}^2 \int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} \pi(\theta) f(t - \theta) d\theta + \varphi^2(t) \int_0^{\infty} \theta^{\gamma} \pi(\theta) f(t - \theta) d\theta \right] dt \end{aligned}$$

を考える. この Bayes リスクを最小にする決定方式, すなわち Bayes 決定方式は

$$\varphi_{\pi}^*(t) = \int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} f(t - \theta) \pi(\theta) d\theta / \int_{-\infty}^{\infty} |\theta|^{\gamma} f(t - \theta) \pi(\theta) d\theta$$

となる. また, $T = t$ を与えたときの θ の事後密度は

$$p(\theta|t) = f(t - \theta) \pi(\theta) / \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \theta) \pi(\theta) d\theta$$

になるから

$$\varphi_{\pi}^*(t) = \int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} p(\theta|t) d\theta / \int_{-\infty}^{\infty} |\theta|^{\gamma} p(\theta|t) d\theta \quad (4.1)$$

とも表わせる.

例 4.1 (正規分布の平均). X_1, \dots, X_n を正規分布 $N(\theta, 1)$ からの無作為標本とし, θ の事前密度 π_{σ} を $N(0, \sigma^2)$ の p.d.f. とする. この事前密度は, 帰無仮説 H と対立仮説 K の境界点である原点 $\theta = 0$ の近傍に母数 θ が位置する可能性が大きいことは経験的にわかっているが, $\theta \leq 0$ か $\theta > 0$ か, すなわち, H が真か偽かまではわからないという態度をあらわしている. このとき, $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ は $N(\theta, 1/n)$ に従うから, $\bar{X} = \bar{x}$ を与えたときの θ の事後分布は正規分布

$$N\left(\frac{n\sigma^2\bar{x}}{n\sigma^2 + 1}, \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1}\right)$$

ここで、まず比較の目的で、 $\gamma = 0$ 、すなわち通常の 2 乗損失 $L_2 = L^{(0)}$ の下でのリスク $R^{(0)}$ の様相を調べる ([HCRWF92]). (4.1) から Bayes 決定方式は

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = \Phi\left(-\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)$$

となる。ただし、 Φ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の c.d.f. とする。

一方、N-P 検定は Neyman-Pearson の定理より導かれる UMP 検定の受容域 $\{\mathbf{x} | \sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\}$ の定義関数

$$\varphi_{\text{NP}}(\bar{x}) = \chi_{(-\infty, u_\alpha]}(\sqrt{n}\bar{x}) = \begin{cases} 1 & (\sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha), \\ 0 & (\sqrt{n}\bar{x} > u_\alpha) \end{cases}$$

により与えられ、p 値はその UMP 検定が基づいている検定統計量 $\sqrt{n}\bar{X}$ の分布の上側確率

$$p(\bar{x}) = P_0\{\sqrt{n}\bar{X} \geq \sqrt{n}\bar{x}\} = \Phi(-\sqrt{n}\bar{x})$$

により与えられる。ただし、 $0 < \alpha < 1$ を N-P 検定の有意水準とし、 u_α を標準正規分布 $N(0, 1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とする。ここで、N-P 検定 φ_{NP} は受容域 $\{\mathbf{x} | \sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\}$ の定義関数であって、通常、検定関数としてとる棄却域 $\{\mathbf{x} | \sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\}^c = \{\mathbf{x} | \sqrt{n}\bar{x} \geq u_\alpha\}$ の定義関数ではないことに注意²⁾。

次に、事前(分布の)分散 σ^2 を $\sigma^2 \rightarrow \infty$ としたとき、事前密度は θ について前以って何も経験的情報をもっていない improper な事前密度、実数直線 \mathbf{R} 上の Lebesgue 測度となり、それと対応して、Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = \Phi(-n\sigma\bar{x}/\sqrt{n\sigma^2+1})$ は p 値 $p(\bar{x}) = \Phi(-\sqrt{n}\bar{x})$ に概収束する、すなわち

$$P_\theta\left\{\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{X}) = p(\bar{X})\right\} = 1$$

となる。これを記号で

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{X}) \xrightarrow{a.s.\theta} p(\bar{X}) \quad (\sigma \rightarrow \infty)$$

と表わす。実際、 $-n\sigma/\sqrt{n\sigma^2+1} \rightarrow -\sqrt{n} (\sigma \rightarrow \infty)$ より、 $(-n\sigma/\sqrt{n\sigma^2+1})\bar{X} \xrightarrow{a.s.\theta} -\sqrt{n}\bar{X} (\sigma \rightarrow \infty)$ であり、連続関数 $\Phi(\cdot)$ は概収束を保存するので、

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{X}) = \Phi\left(-\frac{n\sigma\bar{X}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) \xrightarrow{a.s.\theta} \Phi(-\sqrt{n}\bar{X}) = p(\bar{X}) \quad (\sigma \rightarrow \infty)$$

となる。p 値は improper な事前密度、実数直線 \mathbf{R} 上の Lebesgue 測度に関する一般 Bayes 決定方式(推定量)であり、また、上記のように θ の事前分布として正規分布 $N(0, \sigma^2)$ を取ると、 $\sigma \rightarrow \infty$ としたときの Bayes 決定方式の極限が p 値となっている。

²⁾本論では、帰無仮説 H に対応した集合 Θ_0 の定義関数 $\chi_{\Theta_0}(\theta)$ の推定について考えていて、推定量の期待値が帰無仮説 H の下で $1 (= \chi_{\Theta_0}(\theta))$ に近く、仮説 K の下で $0 (= \chi_{\Theta_0}(\theta))$ に近いことが望ましい。そこで、通常の検定関数の場合とは $0, 1$ を逆にすることで、帰無仮説 H の下で、すなわち任意の $\theta \leq 0$ について $E_\theta[\varphi_{\text{NP}}(\bar{x})] = P_\theta\{\sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\} = P_\theta\{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta) \leq u_\alpha - \sqrt{n}\theta\} = \Phi(u_\alpha - \sqrt{n}\theta) \geq \Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ となり、水準 α は 0.1 や 0.05 など小さい値をとるので、この期待値は 1 に近くなる。

一方, $\sigma^2 \rightarrow 0$ とすると, 事前分布は Θ_0 と Θ_1 の境界点である原点 $\theta = 0$ に集中した一点分布に収束し, Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x})$ は, $\sigma^2 \rightarrow \infty$ の場合と同様にして, ミニマックス決定方式 $\varphi_0(\bar{x}) = 1/2$ (a.e.) に概収束する. つまり, 事前分布の分散を $\sigma^2 \rightarrow 0$ とすることで, 事前分布は帰無仮説 H に対応する Θ_0 と対立仮説 K に対応する Θ_1 の境界点 $\theta = \theta_0$ に集中し, Bayes 決定方式は, $\chi_{\Theta_0}(\theta) = 1$ なのか 0 なのか, すなわち帰無仮説が真か偽かは五分五分であるという決定を下すミニマックス決定方式 φ_0 に近づくということである.

次に, Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値それぞれのリスクを求めると, 任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$R^{(0)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) = E_Z \left[\left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \right], \quad (4.2)$$

$$R^{(0)}(\theta, \varphi_{NP}) = \Phi \left((u_\alpha - \sqrt{n}\theta) \operatorname{sgn} \theta \right), \quad (4.3)$$

$$R^{(0)}(\theta, p) = E_Z \left[\Phi \left(Z - \sqrt{n}|\theta| \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

となる. ただし, $Z := \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) (\sim N(0, 1))$ とし, $\operatorname{sgn} \theta$ は θ の符号とする. (4.2), (4.4) より, この Bayes 決定方式と p 値のリスクは原点 $\theta = 0$ に関して対称であることに注意. 求めた (4.2)~(4.4) をもとに, Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスクのグラフを描く (Hwang *et al.* [HCRWF92]).

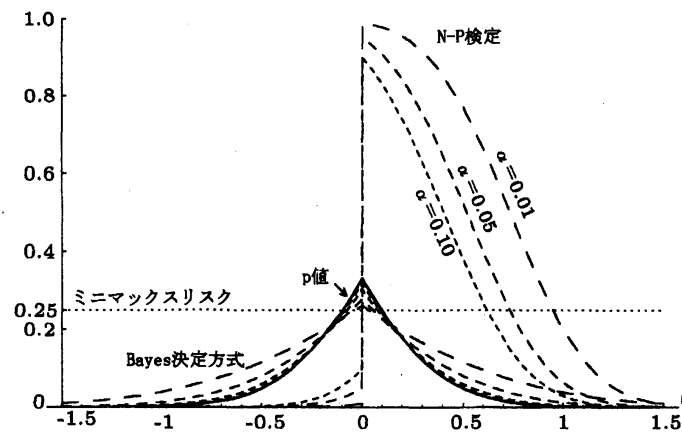


図2 $L^{(0)}$ による Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスク ($n = 10$)

図2において, 帰無仮説 H が定める領域 $\Theta_0 = \{\theta | \theta \leq 0\}$ で極端に小さく, 対立仮説 K が定める領域 $\Theta_1 = \{\theta | \theta > 0\}$ で極端に大きいグラフが N-P 検定のリスクであり, 有意水準 α が大きくなるにつれて ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$), 最大リスクが小さくなる. 左右対称なグラフのうち, 実線のグラフが p 値のリスクで, 破線が Bayes 決定方式のリスクであり, 破線幅が狭くなる順に事前 (分布の) 分散 σ^2 の値を $\sigma^2 = 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1$ としている. なお, リスクが 0.25 のところに破線を引いているが, これは, 損失関数として通常の 2 乗損失を用いた場合に存在するミニマックス決定方式 $\varphi_0 (= 1/2$ a.e.) の定数リスク 0.25 である. N-P 検定のリスクは Θ_0 においては大変小さく好ましいのだが, 逆に Θ_1 においてはそのリスクは大変大きくなってしまふ. これは, H を支持することに重点を置いている決定方式であることに起因していると思われる. 検定論の立場から見れば, Neyman-Pearson の理論に

より導かれる検定は, UMP 検定, もしくは UMPU(一様最強力不偏) 検定を与える好ましい決定方式なのだが, いま, 考えている $\chi_{\Theta_0}(\theta)$ の推定問題においては, 通常の N-P 検定が H に固執する影響が出てしまう. 一方, p 値と Bayes 決定方式のリスクは全体的にリスクが低く, また Θ_0 と Θ_1 の境界点である $\theta = \theta_0$ に関して対称であり, p 値と Bayes 決定方式は帰無仮説と対立仮説のどちらにも肩入れしない決定方式といえる. 以上の点で, Θ_1 においてリスクが極端に大きくなる N-P 検定よりも p 値と Bayes 決定方式は好ましいといえる. これは, 一般 Bayes 決定方式である p 値を含めて Bayes 決定方式がリスク $R(\theta, \varphi)$ を積分し平均した Bayes リスク $r_\pi(\varphi)$ から導きだされるために, Bayes 決定方式のリスクが全体的に低くなるということであろう.

また, 先に Bayes 決定方式と p 値, ミニマックス決定方式との間の収束・極限関係について述べたが, リスクについても, この収束・極限関係が成り立つことがわかる (Lehmann [Le86], p.573 参照). とくに, $\sigma^2 \rightarrow 0$ としたとき, Bayes 決定方式のリスク $R_2(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$ はミニマックス決定方式のリスク $R_2(\theta, \varphi_0) \equiv 1/4$ に収束する.

次に, $\gamma = 1$, すなわち荷重二乗損失 $L^{(1)}$ の下でのリスクについて調べる. まず, Bayes 決定方式は (4.1) から

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = \int_{-\infty}^0 |\theta| p(\theta|\bar{x}) d\theta / \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| p(\theta|\bar{x}) d\theta = 1 - \int_0^{\infty} \theta p(\theta|\bar{x}) d\theta / \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| p(\theta|\bar{x}) d\theta$$

となる. ここで

$$\mu := E[\theta|\bar{x}] = \frac{n\sigma^2\bar{x}}{n\sigma^2+1}, \quad \tau^2 := \text{Var}[\theta|\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n\sigma^2+1}.$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \theta p(\theta|\bar{x}) d\theta &= \mu\Phi(\mu/\tau) + \tau\phi(\mu/\tau), \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| p(\theta|\bar{x}) d\theta &= \mu\{\Phi(\mu/\tau) - 1\} + \tau\phi(\mu/\tau) \end{aligned}$$

となるから, Bayes 決定方式は

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = 1 - \frac{n\sigma\bar{x}\Phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) + \sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}{n\sigma\bar{x}\left\{2\Phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - 1\right\} + 2\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}$$

になる. ただし, ϕ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の p.d.f. とする.

そこで, N-P 検定, p 値のリスクとともに, この Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*$ のリスクの挙動を図示し, 比較してみる. ここで, 損失関数に依存して決まるのは Bayes 決定方式だけであり, N-P 検定と p 値は, 通常の 2 乗損失を用いた場合, すなわち $\gamma = 0$ の場合と変わらないということに注意. まず, Bayes 決定方式のリスクは, 任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$$

$$= |\theta| E_Z \left[\left\{ \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) + \sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\left\{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - 1\right\} + 2\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)} \right\}^2 \right] \quad (4.5)$$

となる. ただし, $Z := \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) (\sim N(0, 1))$ とする. (4.5) より, この Bayes 決定方式のリスクは原点 $\theta = 0$ に関して対称であることに注意. 次に, N-P 検定, p 値のリスクは, 通常の 2 乗損失の下でのそれぞれのリスク (4.3), (4.4) に単に $|\theta|$ を乗じたものであり, 任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$R^{(1)}(\theta, \varphi_{NP}) = |\theta| \Phi((u_\alpha - \sqrt{n}\theta) \operatorname{sgn} \theta), \quad (4.6)$$

$$R^{(1)}(\theta, p) = |\theta| E_Z \left[\Phi(Z - \sqrt{n}|\theta|)^2 \right] \quad (4.7)$$

となる. ただし, $\operatorname{sgn} \theta$ は θ の符号とする. ここで, (4.7) より, Bayes 決定方式のリスクと同様に, p 値のリスクも原点 $\theta = 0$ に関して対称であることに注意.

そこで, 求めた (4.5)~(4.7) をもとに, これら 3 つ決定方式のリスクのグラフを描くと図 3 のようになる.

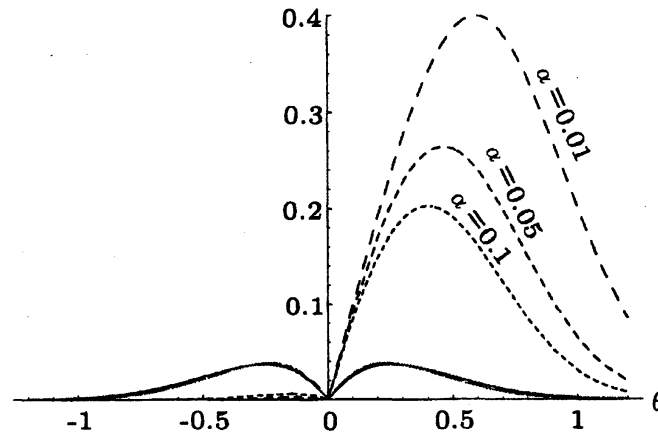


図 3 $L^{(1)}$ による Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスク ($n = 10$)

図 3 において, 帰無仮説 H が定める領域 Θ_0 で極端に小さく, 対立仮説 K が定める領域 Θ_1 で極端に大きいグラフが N-P 検定のリスクであり, 有意水準 α が大きくなるにつれて ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$), 最大リスクが小さくなる. 左右対称で全体にわたってリスクが小さいグラフが Bayes 決定方式と p 値のリスクである.

図 2 のように通常の 2 乗損失の下では, Θ_0 と Θ_1 の境界点である $\theta = \theta_0$ の近傍でリスクが大きくなっていて, 特に N-P 検定についてはリスクが $\theta = \theta_0$ を境に不連続になっている. 一方, 図 3 のように荷重 2 乗損失の下では, 損失関数に連続的な荷重を加えたことで, Θ_0 と Θ_1 の境界点である $\theta = \theta_0$ の近傍においてにリスクが小さく, 連続的な挙動を示している.

図 2 の $\gamma = 0$ の場合と同様に N-P 検定のリスクは Θ_1 で極端に大きく, p 値や Bayes 決定方式のリスクは全体的にリスクが低く, N-P 検定よりも好ましいといえる.

次に, $\gamma = 2$, すなわち荷重二乗損失 $L^{(2)}$ の下でのリスクについて調べる. まず, Bayes 決定方式は (4.1) から

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = 1 - \int_0^\infty \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta / \int_{-\infty}^\infty \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta$$

となる. ここで

$$\int_{-\infty}^\infty \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta = \text{Var}[\theta|\bar{x}] + E[\theta|\bar{x}]^2 = \tau^2 + \mu^2 = \frac{\sigma^2 \{n^2 \sigma^2 \bar{x}^2 + (n\sigma^2 + 1)\}}{(n\sigma^2 + 1)^2} \quad (4.8)$$

となる. また, エルミート多項式 $H_1(z) = \phi'(z)/\phi(z) = -z$, $H_2(z) = \phi''(z)/\phi(z) = z^2 - 1$ より, $z\phi(z) = -\phi'(z)$, $z^2\phi(z) = \phi''(z) + \phi(z)$ となるから

$$\int_0^\infty \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta = (\tau^2 + \mu^2) \Phi\left(\frac{\mu}{\tau}\right) + \tau\mu\phi\left(\frac{\mu}{\tau}\right) \quad (4.9)$$

になる. $\tau\mu = n\sigma^3\bar{x}/(n\sigma^2 + 1)^{3/2}$ であるから, (4.1), (4.8), (4.9) より

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}}\right) - \frac{n\sigma\bar{x}\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{n^2\sigma^2\bar{x}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}}\right)$$

になる. これは, $\gamma = 0$ のとき, すなわち通常の 2 乗損失の下での Bayes 決定方式に 二 の項を加えたものになっている.

そこで, N-P 検定, p 値のリスクとともに, この Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*$ のリスクの挙動を図示し, 比較してみる. ここで, 損失関数に依存して決まるのは Bayes 決定方式だけであり, N-P 検定と p 値は, 通常の 2 乗損失を用いた場合, すなわち $\gamma = 0$ の場合と変わらないということに注意. まず, Bayes 決定方式のリスクは任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$\begin{aligned} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) \\ = \theta^2 E_Z \left[\left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}}\right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}}\right) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. ただし, Z は $N(0, 1)$ に従う確率変数とする. (4.10) より, この Bayes 決定方式のリスクは原点 $\theta = 0$ に関して対称であることに注意. 次に, N-P 検定, p 値のリスクは, 通常の 2 乗損失の下でのそれぞれのリスク (4.3), (4.4) に単に θ^2 を乗じたものであり, 任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$R^{(2)}(\theta, \varphi_{\text{NP}}) = \theta^2 \Phi((u_\alpha - \sqrt{n}\theta) \text{sgn } \theta), \quad (4.11)$$

$$R^{(2)}(\theta, p) = \theta^2 E_Z \left[\Phi(Z - \sqrt{n}|\theta|)^2 \right] \quad (4.12)$$

となる. ただし, $\text{sgn } \theta$ は θ の符号とする. ここで, (4.12) より, Bayes 決定方式のリスクと同様に, p 値のリスクも原点 $\theta = 0$ に関して対称であることに注意.

そこで, 求めた (4.10)~(4.12) をもとに, これら 3 つ決定方式のリスクのグラフを描く.

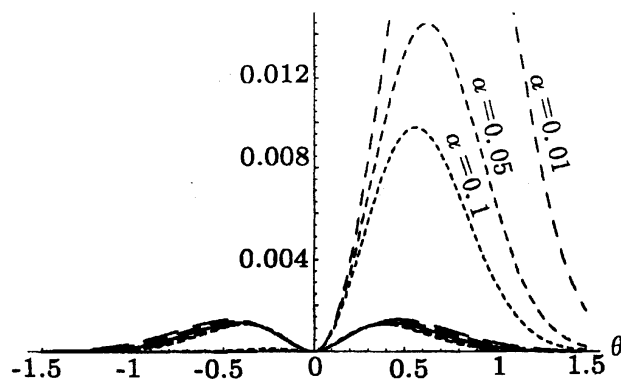


図4 $L^{(2)}$ による Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスク ($n = 10$)

図4において, $\gamma = 1$ の場合の C^0 級の荷重 $|\theta|$ よりも滑らかな C^2 級の荷重 θ^2 を損失関数に加えたことで, 帰無仮説 H と対立仮説 K の境界点 $\theta = 0$ の近傍において $\gamma = 1$ の場合よりも滑らかにリスクが挙動している.

図3, 4よりわかるように, 図2のように2乗損失を用いた場合と同様に, 荷重2乗損失を用いた場合においても, N-P 検定のリスクは θ_1 で極端に大きく, 全体にわたってリスクが低い p 値や Bayes 決定方式の方が N-P 検定よりも好ましいといえる. そこで, p 値と Bayes 決定方式のリスクについて詳しく見てみる. まず, $\gamma = 1$ の場合については図5のようになる.

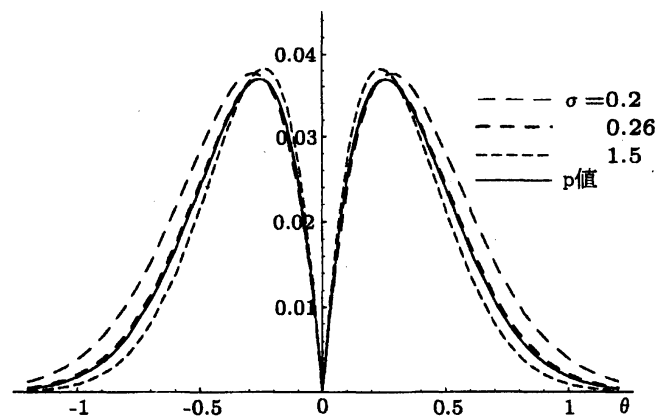


図5 $L^{(1)}$ による Bayes 決定方式, p 値のリスク ($n = 10$)

図5からわかるように, 事前分散 σ^2 を小さくするに従って Bayes 決定方式の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}^*})$ が単調に下がっていくわけではない. これは, 事前分散 σ^2 の値を小さくして, 極端に言えば, $\sigma^2 \rightarrow 0$ として, θ を中心 $\theta = 0$ の周りに集中させたいが, ある程度以上 σ^2 の値を小さくすると, 中心 $\theta = 0$ の近傍の外で逆にリスクが大きくなってしまう. ある程度 σ^2 の値の大きさを保っておいて, その事前分布の設定に遊びを持たせておいた方がよい. 事前分散 σ^2 の値を小さくしていくと, Bayes 決定方式の最大リスクは下がっていくが, ある σ^2 の値に来ると, 今度は最大リスクが上がってってしまう. 図5の場合でいえば, $\sigma^2 = 2.6^2$ のときに, Bayes 決定方式の最大リスクは最も低く, p 値の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, p)$ に近づく.

そこで、決定方式を Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*$ に限って考えて、Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*$ の中で、リスクのミニマックス方式、すなわち

$$\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) = \sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$$

となる事前分散 σ_0^2 、すなわちミニマックス解による方式 $\varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*$ を求めよう。ここで、Bayes 決定方式のリスク $R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$ が原点 $\theta = 0$ に関して対称であることから、上の式での上限 \sup は $\theta > 0$ について考えればよい。本来ならば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) \\ &= E_Z \left[\left\{ \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) + \sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\left\{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - 1\right\} + 2\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)} \right\}^2 \right] \\ & - 2\theta E_Z \left[\frac{n\sigma\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}{\left\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\left\{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - 1\right\} + 2\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)\right\}^2} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) + \sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)}{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\left\{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - 1\right\} + 2\sqrt{n\sigma^2+1}\phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)} \right\} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

を満たす曲線 $\theta = \theta(\sigma)$ の方程式を求め、

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R^{(1)}(\theta(\sigma), \varphi_{\pi_\sigma}^*) = 0$$

を満たす $\sigma = \sigma_0$ を求めるべきで、それがミニマックス解 σ_0 となる。しかし、Bayes 決定方式のリスク (4.5) やその一階導関数 (4.13) を見てもわかるように、このようなミニマックス解を解析的に求めることは難しいので数値的に考察する。

σ_0 を考察する手法としては、 σ の各値に対しては、 $(\partial/\partial\theta)R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) = 0$ の解 $\theta = \theta(\sigma)$ を計算機を用いて求めることができるので、 σ の値を適当な間隔でいくつかとって、それらの σ に対する Bayes 決定方式の最大リスク $R^{(1)}(\theta(\sigma), \varphi_{\pi_\sigma}^*)$ を求め、 σ の値を横軸に、 σ に対応する最大リスク $R^{(1)}(\theta(\sigma), \varphi_{\pi_\sigma}^*)$ を縦軸にとったグラフを図示し、その中で最大のリスクが最も小さくなる σ の値を見つけて、先ほどよりも細かい間隔でその σ の値の前後の値をとって、同じことを繰り返していき、四捨五入して σ_0 の近似値を求めた (図 6, 7 参照)。

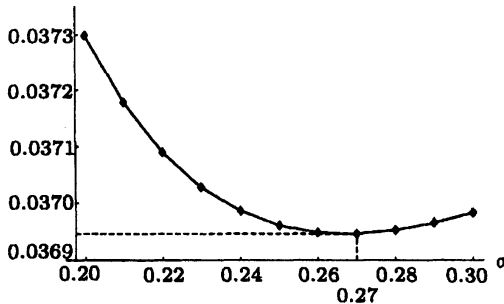


図 6 σ の各値に対する Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_\sigma}^*$ の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$
($\sigma = 0.20(0.01)0.30$, $n = 10$).

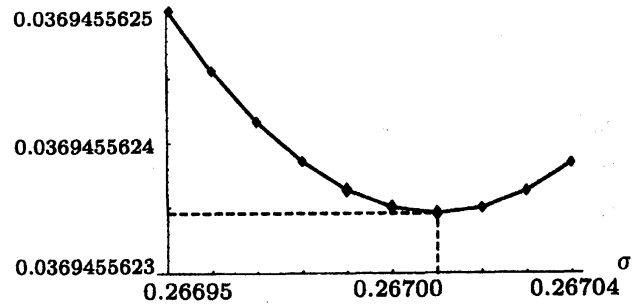


図 7 Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解
 $\sigma_0 \cong 0.267$ およびミニマックスリスク
 $R^{(1)}(0.259, \varphi_{\pi_{0.267}}^*) \cong 0.03695$
($\sigma = 0.26695(0.00001)0.26704$, $n = 10$).

標本の大きさ $n = 1, 5(5)25$ のときのミニマックスリスク解 σ_0 とその σ_0 に対する Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*$ がとる最大リスク $\sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$ は、それぞれ次の表ようになる。この表から、当然ではあるが、標本の大きさ n を大きくすれば、事前分布の分散 σ^2 を小さくしてよいと言える。また、

$$\frac{d}{d\theta} R^{(1)}(\theta, p) = E_Z [\Phi(Z - \sqrt{n}\theta)^2] - 2\sqrt{n}\theta E_Z [\phi(Z - \sqrt{n}\theta) \Phi(Z - \sqrt{n}\theta)] = 0$$

を数値的に解いて、 p 値の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, p)$ を与える θ を求め、その最大リスクを Bayes 決定方式のミニマックスリスク $\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*)$ と比べると、いずれの標本の大きさ n に対しても、 $\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*) < \sup_{\theta} R^{(1)}(\theta, p)$ となっていることがわかる。

標本の大きさ n	σ_0	Bayes 決定方式のミニマックスリスク	p 値の最大リスク
1	0.844	$R^{(1)}(0.818, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.116832$	$< R^{(1)}(0.813, p) \cong 0.116880$
5	0.378	$R^{(1)}(0.366, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.052249$	$< R^{(1)}(0.363, p) \cong 0.052271$
10	0.267	$R^{(1)}(0.259, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.036946$	$< R^{(1)}(0.257, p) \cong 0.036961$
15	0.218	$R^{(1)}(0.211, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.030166$	$< R^{(1)}(0.210, p) \cong 0.030178$
20	0.189	$R^{(1)}(0.183, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.026124$	$< R^{(1)}(0.182, p) \cong 0.026135$
25	0.169	$R^{(1)}(0.164, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \cong 0.023366$	$< R^{(1)}(0.163, p) \cong 0.023376$

$\gamma = 2$ の場合についても、 $\gamma = 1$ の場合と同様にして、 p 値と Bayes 決定方式のリスクについて詳しく見たものが図 8 である。

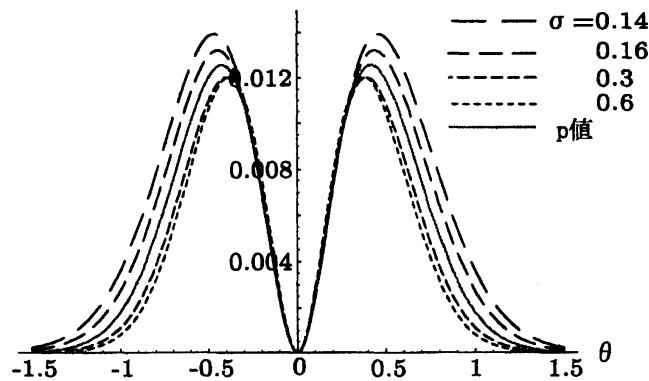


図 8 $L^{(2)}$ による Bayes 決定方式, p 値のリスク ($n = 10$)

事前分散 σ^2 の値によっては、図 8 の場合でいえば $\sigma^2 = 0.3^2, 0.6^2$ のときに、Bayes 決定方式の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*)$ は p 値の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, p)$ を下回る。そこで、 $\gamma = 1$ の場合と同様にして、

$$\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*) = \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$$

となる σ_0 , すなわちミニマックス解, およびその σ_0 による決定方式, すなわちミニマックス Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*$ を求めよう。ここで、Bayes 決定方式のリスク $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$ が原点 $\theta = 0$ に関して対称であることから、上の式での上限 \sup は $\theta > 0$ について考えればよい。 $\gamma = 1$ の場合と同様に、与えられた σ の各値に対しては、

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma}{\partial \theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*) \\
&= 2\theta E_Z \left[\left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad - 4\theta^2 E_Z \left[\frac{n\sigma}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \left\{ \frac{n\sigma^2 + 1}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \right\}^2 \phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left(\frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

の解 $\theta = \theta(\sigma)$ を計算機を用いて求めることができるので、 $\gamma = 1$ の場合と同様の操作を行って、ミニマックス解 σ_0 の近似値およびその σ_0 が与える Bayes 決定方式のミニマックスリスク $\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*) \doteq R^{(2)}(\theta(\sigma_0), \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$ の近似値を求める (図 9 参照).

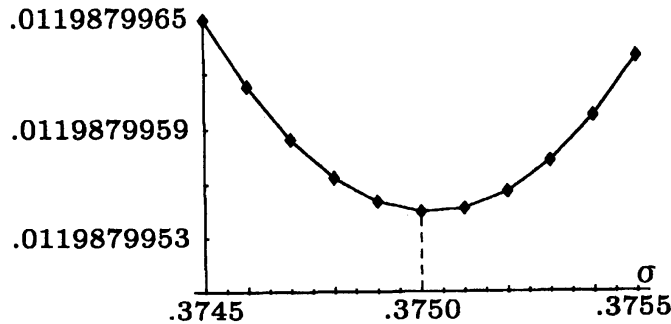


図 9 σ の各値に対する Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_{\sigma}}^*$ の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*) \doteq R^{(2)}(\theta(\sigma), \varphi_{\pi_{\sigma}}^*)$ ($n = 10$).

標本の大きさ $n = 1, 3, 5, 7, 10, 15, 20$ のときのミニマックスリスク解 σ_0 とその σ_0 に対する Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*$ がとる最大リスク $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$ は、それぞれ下表のようになる。 $\gamma = 1$ の場合と同様に、

$$\frac{d}{d\theta} R^{(2)}(\theta, p) = 2\theta \left\{ E_Z [\Phi(Z - \sqrt{n}\theta)^2] - \sqrt{n}\theta E_Z [\phi(Z - \sqrt{n}\theta) \Phi(Z - \sqrt{n}\theta)] \right\} = 0$$

を数値的に解いて、 p 値の最大リスク $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, p)$ を与える θ を求め、その最大リスクを Bayes 決定方式のミニマックスリスク $\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma}}^*)$ と比較した。

標本の大きさ n	σ_0	Bayes 決定方式のミニマックスリスク	p 値の最大リスク
1	1.186	$R^{(2)}(1.228, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.11988$	$< R^{(2)}(1.333, p) \doteq 0.12569$
3	0.685	$R^{(2)}(0.709, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.03996$	$< R^{(2)}(0.770, p) \doteq 0.04190$
5	0.530	$R^{(2)}(0.549, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.02398$	$< R^{(2)}(0.596, p) \doteq 0.02514$
7	0.448	$R^{(2)}(0.464, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.01713$	$< R^{(2)}(0.504, p) \doteq 0.01796$
10	0.375	$R^{(2)}(0.388, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.01199$	$< R^{(2)}(0.422, p) \doteq 0.01257$
15	0.306	$R^{(2)}(0.317, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.00799$	$< R^{(2)}(0.344, p) \doteq 0.00838$
20	0.265	$R^{(2)}(0.275, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.00599$	$< R^{(2)}(0.298, p) \doteq 0.00628$

例 4.2 (指数分布の位置母数). X_1, \dots, X_n を指数分布 $Exp(\theta, 1)$ ($\theta \in \mathbf{R}$) からの無作為標本とし, θ の事前密度 π_τ を $(-\tau, \tau)$ 上の一様分布 $U(-\tau, \tau)$ の p.d.f. とする. $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ の j.p.d.f. は

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) = e^{-n(\bar{x}-\theta)} \chi_{(\theta, \infty)}(x_{(1)}) \propto e^{n\theta} \chi_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)$$

となる. ただし, $x_{(1)}$ は $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ の観測値 $x_{(1)} := \min\{x_1, \dots, x_n\}$ とする. よって, $X_{(1)} = x_{(1)}$ を与えたときの θ の事後密度 $p(\theta|x_{(1)})$ は

$$p(\theta|x_{(1)}) = \frac{e^{n\theta} \chi_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta) \frac{1}{2\tau} \chi_{(-\tau, \tau)}(\theta)}{\int e^{n\theta} \chi_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta) \frac{1}{2\tau} \chi_{(-\tau, \tau)}(\theta) d\theta} = \frac{e^{n\theta} \chi_{(-\tau, \tau \wedge x_{(1)})}(\theta)}{\int_{-\tau}^{\tau \wedge x_{(1)}} e^{n\theta} d\theta}$$

となる. よって, 特に γ が非負の整数であるとき, Bayes 決定方式は (4.1) より

$$\varphi_\pi^*(x_{(1)}) = \frac{\int_{-\tau}^{\min\{0, \tau, x_{(1)}\}} |\theta|^\gamma e^{n\theta} d\theta}{\int_{-\tau}^{\tau \wedge x_{(1)}} |\theta|^\gamma e^{n\theta} d\theta} = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq 0), \\ \frac{\Gamma(\gamma+1; n\tau)}{\Gamma(\gamma+1; n\tau) + \Gamma^*(\gamma+1; nx_{(1)})} & (0 < x_{(1)} \leq \tau), \\ \frac{\Gamma(\gamma+1; n\tau)}{\Gamma(\gamma+1; n\tau) + \Gamma^*(\gamma+1; n\tau)} & (\tau < x_{(1)}) \end{cases} \quad (4.14)$$

となる. ただし, Γ は不完全ガンマ関数

$$\Gamma(x; a) := \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt = (x-1)! - e^{-a} \sum_{i=0}^{x-1} \frac{(x-1)!}{(x-i-1)!} a^{x-i-1} \quad (x = 1, 2, \dots; a > 0),$$

Γ^* は

$$\Gamma^*(x; a) := \int_0^a t^{x-1} e^t dt = (-1)^x (x-1)! + e^a \sum_{i=0}^{x-1} (-1)^i \frac{(x-1)!}{(x-i-1)!} a^{x-i-1} \quad (x = 1, 2, \dots; a > 0)$$

とする.

まず, $\gamma = 0$, すなわち通常の 2 乗損失のもとでの場合について考える. この場合, Bayes 決定方式は (4.14) より

$$\varphi_\pi^*(x_{(1)}) = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq 0), \\ \frac{1 - 1/b}{e^{nx_{(1)}} - 1/b} & (0 < x_{(1)} \leq \tau), \\ \frac{1}{b+1} & (\tau < x_{(1)}) \end{cases} \quad (4.15)$$

となる. ただし, $b := b(n, \tau) = e^{n\tau}$ とする.

正規分布の場合の例 4.1 と同様にして、この Bayes 決定方式と N-P 検定、p 値のリスクを比較したいのだが、N-P 検定は有意水準 α をもつ UMP 検定の許容域の定義関数

$$\varphi_{NP}(x_{(1)}) = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq \frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha}), \\ 0 & (x_{(1)} > \frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha}) \end{cases} \quad (4.16)$$

として与えられ、p 値はその UMP 検定に基づいている検定統計量 $X_{(1)}$ の分布 $Exp(\theta, 1/n)$ の上側確率

$$p(x_{(1)}) = P_0 \{X_{(1)} > x_{(1)}\} = \int_{0 \vee x_{(1)}}^{\infty} n e^{-nt} dt = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq 0), \\ e^{-nx_{(1)}} & (x_{(1)} > 0) \end{cases} \quad (4.17)$$

として与えられる。これらの決定方式のリスクはそれぞれ

$$R^{(0)}(\theta, \varphi_{\pi}^*) = \begin{cases} b^2 e^{n\theta} \left\{ 2(b-1) \log \left(\frac{b}{b+1} \right) + \frac{2b^2 + b - 2}{(b+1)^2} \right\} & (\theta \leq 0), \\ -e^{n\theta} \left\{ 2b(b-1)^2 \log \left(\frac{b^2 - 1}{b^2 - be^{-n\theta}} \right) + \frac{b(2b^2 - 3)}{(b+1)^2} \right\} + (b-1)^2 \frac{2be^{n\theta} - 1}{be^{n\theta} - 1} & (0 < \theta \leq \tau), \\ \frac{1}{(b+1)^2} & (\theta > \tau), \end{cases} \quad (4.18)$$

$$R^{(0)}(\theta, \varphi_{NP}) = \begin{cases} \alpha e^{n\theta} & (\theta \leq 0), \\ 1 - \alpha e^{n\theta} & \left(0 < \theta \leq \frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha} \right), \\ 0 & \left(\theta > \frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha} \right), \end{cases} \quad R^{(0)}(\theta, p) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{n\theta} & (\theta \leq 0), \\ \frac{1}{3} e^{-2n\theta} & (\theta > 0) \end{cases} \quad (4.19)$$

となる。そこで、求めた (4.18), (4.19) をもとに、Bayes 決定方式、N-P 検定、p 値のリスクのグラフを以下に図示する。

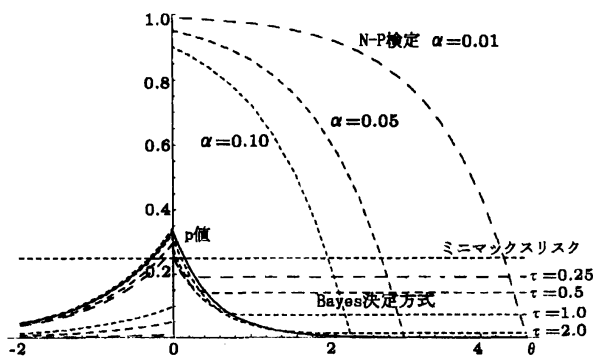


図 10 標本の大きさ $n = 1$

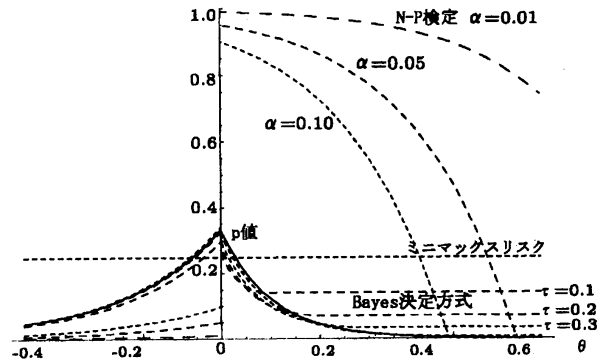


図 11 標本の大きさ $n = 5$

次に、 $\gamma = 1$ 、すなわち荷重 2 乗損失 $L^{(1)}$ のもとでの場合について考える。この場合、Bayes 決定方式は (4.14) より

$$\varphi_{\pi}^*(x_{(1)}) = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq 0), \\ \frac{1 - e^{-n\tau}(n\tau + 1)}{2 + e^{nx_{(1)}}(nx_{(1)} - 1) - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} & (0 < x_{(1)} \leq \tau), \\ \frac{1 - e^{-n\tau}(n\tau + 1)}{2 + e^{n\tau}(n\tau - 1) - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} & (\tau < x_{(1)}) \end{cases} \quad (4.20)$$

ここで、これら3つの決定方式の荷重二乗損失 $L^{(1)}$ によるリスクを求める。まず、Bayes 決定方式のリスクは

$$R^{(1)}(\theta, \varphi_{\pi}^*) = \begin{cases} -\theta \left[\frac{1 + e^{n\tau}(n\tau - 1)}{2 + e^{n\tau}(n\tau - 1) - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} \right]^2 e^{n\theta} e^{-n\tau} \\ -\theta \int_{-n\theta}^{n(\tau-\theta)} \left[\frac{1 + e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta) - 1\}}{2 + e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta) - 1\} - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} \right]^2 e^{-u} du & (\theta \leq 0), \\ \theta \left[\frac{1 - e^{-n\tau}(n\tau + 1)}{2 + e^{n\tau}(n\tau - 1) - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} \right]^2 e^{n\theta} e^{-n\tau} \\ +\theta \int_0^{n(\tau-\theta)} \left[\frac{1 - e^{-n\tau}(n\tau + 1)}{2 + e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta) - 1\} - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} \right]^2 e^{-u} du & (0 < \theta \leq \tau), \\ \theta \left[\frac{1 - e^{-n\tau}(n\tau + 1)}{2 + e^{n\tau}(n\tau - 1) - e^{-n\tau}(n\tau + 1)} \right]^2 & (\theta > \tau) \end{cases} \quad (4.21)$$

となる。N-P 検定と p 値のリスクは通常の 2 乗損失 $L^{(0)}$ のもとでのそれぞれのリスク (4.19) に単に $|\theta|$ を乗じたものになる。

次に、 $\gamma = 2$ 、すなわち荷重 2 乗損失 $L^{(2)}$ のもとでの場合を考える。この場合、Bayes 決定方式は (4.14) より

$$\varphi_{\pi}^*(x_{(1)}) = \begin{cases} 1 & (x_{(1)} \leq 0), \\ \frac{2 - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}}{e^{nx_{(1)}} \{(nx_{(1)})^2 - 2nx_{(1)} + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} & (0 < x_{(1)} \leq \tau), \\ \frac{2 - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}}{e^{n\tau} \{(n\tau)^2 - 2n\tau + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} & (\tau < x_{(1)}) \end{cases} \quad (4.22)$$

となる。

ここで、これら3つの決定方式の荷重二乗損失 $L^{(2)}$ によるリスクを求める。まず、Bayes 決定方式のリスクは

$$R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi}^*) = \begin{cases} \theta^2 \left[\frac{e^{n\tau} \{(n\tau)^2 - 2n\tau + 2\} - 2}{e^{n\tau} \{(n\tau)^2 - 2n\tau + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} \right]^2 e^{n\theta} e^{-n\tau} \\ +\theta^2 \int_{-n\theta}^{n(\tau-\theta)} \left[\frac{e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta)^2 - 2(u + n\theta) + 2\} - 2}{e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta)^2 - 2(u + n\theta) + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} \right]^2 e^{-u} du & (\theta \leq 0), \\ \theta^2 \left[\frac{2 - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}}{e^{n\tau} \{(n\tau)^2 - 2n\tau + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} \right]^2 e^{n\theta} e^{-n\tau} \\ +\theta^2 \int_0^{n(\tau-\theta)} \left[\frac{2 - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}}{e^{n\theta} e^u \{(u + n\theta)^2 - 2(u + n\theta) + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} \right]^2 e^{-u} du & (0 < \theta \leq \tau), \\ \theta^2 \left[\frac{2 - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}}{e^{n\tau} \{(n\tau)^2 - 2n\tau + 2\} - e^{-n\tau} \{(n\tau)^2 + 2n\tau + 2\}} \right]^2 & (\theta > \tau) \end{cases} \quad (4.23)$$

となる。N-P 検定と p 値のリスクは通常の 2 乗損失 $L^{(0)}$ のもとでのそれぞれのリスク (4.19) に単に θ^2 を乗じたものになる。

4.2 尺度母数の片側検定の場合

θ が尺度母数の場合について考える. 無作為標本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ に基づく統計量 $T = T(\mathbf{X})$ が (Lebesgue 測度に関する) p.d.f. $(1/\theta)f(t/\theta)$ ($\theta > 0$) をもつとし, θ の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度を π とする. いま, 帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題において, $\Theta_0 = (0, \theta_0]$ とし, 損失関数

$$\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, d) := \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\gamma \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - d\}^2 \quad (\gamma > 0)$$

を考える. これは, 位置母数の場合と同様に, 仮説の境界 $\theta = \theta_0$ の近傍では損失が敏感に反応するようにしてある. 特に, $\gamma = 0$ とすれば, この損失関数は通常の 2 乗損失になる. 一般に, 決定方式 φ のリスクは

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_\theta [\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\gamma E_\theta [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(T)\}^2]$$

となる. いま, $\theta_0 = 1$ と仮定して一般性を失わない. このとき, Bayes 決定方式は, 位置母数の場合と同様にして

$$\varphi_\pi^*(t) = \int_0^1 \theta^\gamma \frac{1}{\theta} f\left(\frac{t}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta / \int_1^\infty \theta^\gamma \frac{1}{\theta} f\left(\frac{t}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta$$

となる. また, $T = t$ を与えたときの θ の事後密度は

$$p(\theta|t) = \frac{1}{\theta} f\left(\frac{t}{\theta}\right) \pi(\theta) / \int_0^\infty \frac{1}{\theta} f\left(\frac{t}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta$$

になるから

$$\varphi_\pi^*(t) = \int_0^1 \theta^\gamma p(\theta|t) d\theta / \int_0^\infty \theta^\gamma p(\theta|t) d\theta \quad (4.24)$$

と表わせる.

例 4.3 (正規分布の標準偏差). X_1, \dots, X_n を正規分布 $N(0, \sigma^2)$ からの無作為標本とし, $\tau := 1/(2\sigma^2)$ の事前密度 π_a を共役分布であるガンマ分布 $G(a, b)$ ($a > 1, b = 2a - 2$) の p.d.f. とする³⁾, すなわち, $\pi_a(\tau) = b^a \tau^{a-1} e^{-b\tau} / \Gamma(a)$ とする. 変換 $\tau = 1/(2\sigma^2)$ のヤコビアンは $|d\tau/d\sigma| = 1/\sigma^3$ になるから, σ の事前密度は

$$\pi_a(\sigma) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma^3} \propto \sigma^{-2a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}}$$

になる. また, $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2$ とおくと, Y/σ^2 は自由度 n のカイ 2 乗分布 χ_n^2 に従い, Y の分布の p.d.f. は

$$f_Y(y; \sigma) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{(n/2)-1} e^{-(y/\sigma^2)/2} \frac{1}{\sigma^2} \propto \sigma^{-n} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \quad (y > 0)$$

³⁾ ガンマ分布の 2 つのパラメータを変化させて Bayes 決定方式のリスクを考えるのは煩雑になるので, $\sigma^2 = 1$ が定める $\tau = 1/(2 \cdot 1) = 1/2$ を τ の事前分布における最頻値にするために, 2 つのパラメータにこのような関係を持たせた.

になるから, $Y = y$ を与えたときの σ の事後密度は

$$p(\sigma|y) = \frac{f_Y(y; \sigma)\pi_a(\sigma)}{\int_0^\infty f_Y(y; \sigma)\pi_a(\sigma)d\sigma} = \frac{\sigma^{-(n+2a+1)}e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}}}{\int_0^\infty \sigma^{-(n+2a+1)}e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}}d\sigma}$$

になる. ここで, $t = (b+y)/\sigma^2$ という変数変換を用いれば, (4.24) から Bayes 決定方式は

$$\varphi_{\pi_a}^*(y) = 1 - F(b+y; (n+2a-\gamma)/2, 1/2) = Q(b+y; (n+2a-\gamma)/2, 1/2) \quad (4.25)$$

となる. ただし, $F(\cdot; (n+2a-\gamma)/2, 1/2)$, $Q(\cdot; (n+2a-\gamma)/2, 1/2)$ はそれぞれガンマ分布 $G((n+2a-\gamma)/2, 1/2)$ の累積分布関数 (c.d.f.), 上側確率とする.

そこで, 帰無仮説 $H: \sigma \leq \sigma_0$, $K: \sigma > \sigma_0$ の検定問題において, $\gamma = 0$, すなわち通常の 2 乗損失 $\tilde{L}^{(0)}$ を損失関数に用いたときに N-P 検定, p 値のリスクとともに, この Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_a}^*$ のリスクの挙動を図示し, 比較してみる. N-P 検定, p 値は, それぞれ

$$\varphi_{\text{NP}}(y) = \chi_{(0, \chi_{n, \alpha}^2]}(y) = \begin{cases} 1 & (0 < y \leq \chi_{n, \alpha}^2), \\ 0 & (y > \chi_{n, \alpha}^2), \end{cases}$$

$$p(y) = P_1 \{Y \geq y\} = 1 - F_n(y) = Q_n(y)$$

により与えられる. ただし, F_n , Q_n はそれぞれ χ_n^2 分布の c.d.f., 上側確率とし, $0 < \alpha < 1$ を N-P 理論より導かれる UMP 検定の有意水準とし, $\chi_{n, \alpha}^2$ を χ_n^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とする.

次に, Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値それぞれのリスクを求めよう. まず, Bayes 決定方式 $\varphi_{\pi_a}^*$ の荷重 2 乗損失 $\tilde{L}^{(\gamma)}$ によるリスクは

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = \begin{cases} \sigma^\gamma E_{Z_n} \left[\{F(b + \sigma^2 Z_n; (n+2a-\gamma)/2, 1/2)\}^2 \right] & (\sigma \leq 1), \\ \sigma^\gamma E_{Z_n} \left[\{Q(b + \sigma^2 Z_n; (n+2a-\gamma)/2, 1/2)\}^2 \right] & (\sigma > 1) \end{cases} \quad (4.26)$$

となる. ただし, Z_n は χ_n^2 分布に従う確率変数とする. 次に, N-P 検定, p 値の荷重 2 乗損失 $\tilde{L}^{(\gamma)}$ によるリスクはそれぞれ

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\sigma, \varphi_{\text{NP}}) = \begin{cases} \sigma^\gamma Q_n(\chi_{n, \alpha}^2 / \sigma^2) & (\sigma \leq 1), \\ \sigma^\gamma F_n(\chi_{n, \alpha}^2 / \sigma^2) & (\sigma > 1), \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\sigma, p) = \begin{cases} \sigma^\gamma E_{Z_n} \left[\{F_n(\sigma^2 Z_n)\}^2 \right] & (\sigma \leq 1), \\ \sigma^\gamma E_{Z_n} \left[\{Q_n(\sigma^2 Z_n)\}^2 \right] & (\sigma > 1) \end{cases} \quad (4.28)$$

となる. そこで, 求めた (4.26)~(4.28) をもとに, Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスクのグラフを以下に図示する.

まず, $\gamma = 0$ の場合, すなわち通常の 2 乗損失 $\tilde{L}^{(0)}$ をを用いた場合, N-P 検定と p 値のリスクを比較してみると図 12 のようになる.

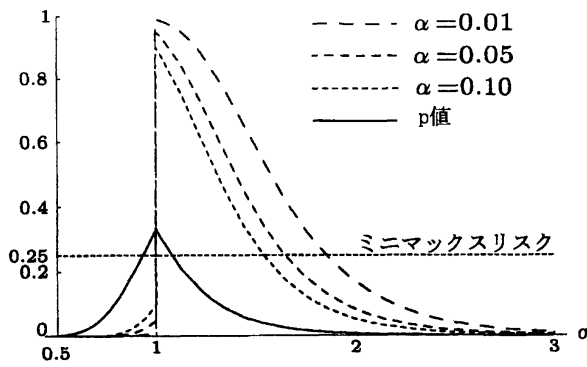


図 12 $\bar{L}^{(0)}$ による N-P 検定, p 値のリスク ($n = 10$).

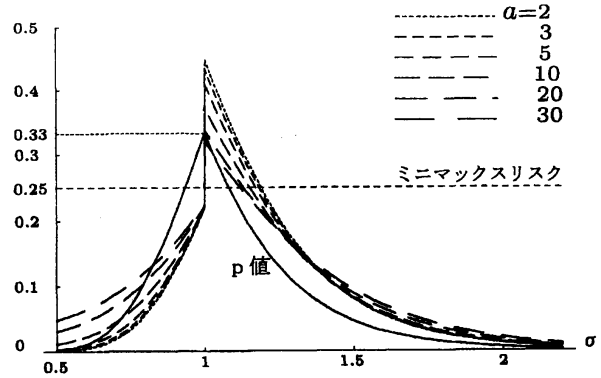


図 13 Bayes 決定方式, p 値のリスク ($n = 10$).

図 12 のように, 正規分布の平均の場合と同様に, やはり, N-P 検定は帰無仮説 H が定める領域 $\Theta_0 = \{\sigma | 0 < \sigma \leq 1\}$ で極端に小さく, 対立仮説 K が定める領域 $\Theta_1 = \{\sigma | \sigma > 1\}$ で極端に大きくなってしまふ. なお, リスクが 0.25 のところに破線を引いているが, これは, 損失関数として通常の 2 乗損失を用いた場合に存在するミニマックス決定方式 $\varphi_0 (= 1/2 \text{ a.e.})$ の定数リスク 0.25 である. 次に, Bayes 決定方式と p 値を比較してみると図 13 のようになる. やはり, 正規分布の場合と同様に Bayes 決定方式のリスクは p 値のリスクに近く, 全体にわたって安定している.

さらに, $\gamma = 1$ とした荷重 2 乗損失 $\bar{L}^{(1)}$ を損失関数として用いたときの Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスクのグラフを描くと次のようになる. なお, 図 14 において, Bayes 決定方式が基づいている事前分布のパラメータ a を $a = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, 60, 100, 150$ としている (図 17 も同様).

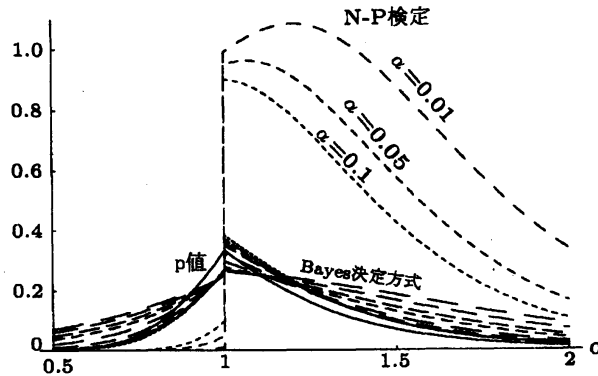


図 14 $\bar{L}^{(1)}$ による N-P 検定, p 値, Bayes 決定方式のリスク ($n = 10$).

図 14 のように, 正規分布の平均の推定の場合と同様に, N-P 検定は帰無仮説 H が定める領域 $\Theta_0 = \{\sigma | 0 < \sigma \leq 1\}$ で極端に小さく, 対立仮説 K が定める領域 $\Theta_1 = \{\sigma | \sigma > 1\}$ で極端に大きくなってしまふ, p 値と Bayes 決定方式は全体にわたって比較的风险が小さく好ましいといえる. そこで, 正規分布の平均の場合と同様に, Bayes 決定方式の中でのミニマックス解を求めることにする.

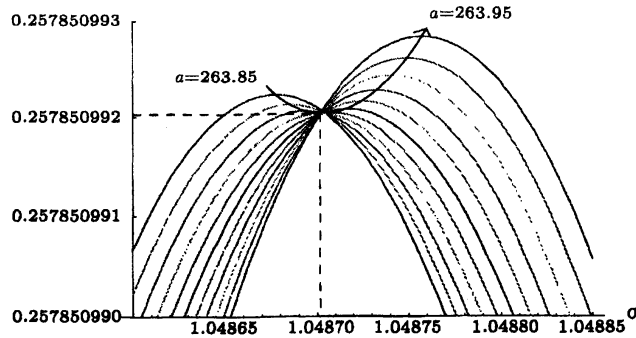


図 15 Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解 $a_0 \cong 263.9$,
 およびミニマックスリスク $\bar{R}^{(1)}(1.05, \varphi_{\pi_{263.9}}^*) \cong 0.25785$
 ($n = 10, a = 263.85 (0.01) 263.95$).

最後に、 $\gamma = 2$ とした荷重 2 乗損失 $\tilde{L}^{(2)}$ を損失関数として用いたときの Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスクのグラフを描く。まず, N-P 検定と p 値のリスクを比較してみると図 16 のようになる。

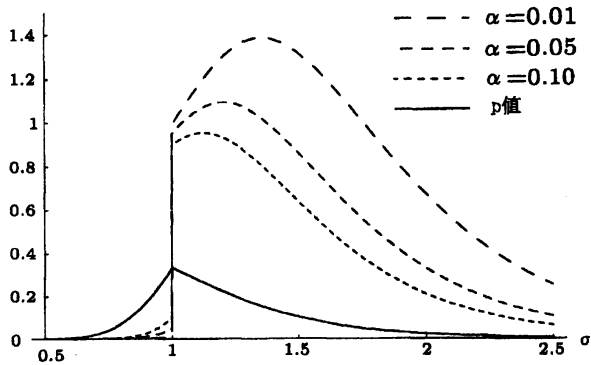


図 16 $\tilde{L}^{(2)}$ による N-P 検定, p 値のリスク ($n = 10$)

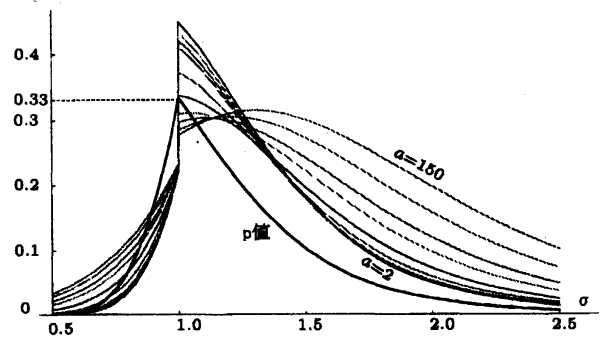


図 17 Bayes 決定方式, p 値のリスク ($n = 10$)

図 16 のように、 $\gamma = 2$ の場合においても、N-P 検定は帰無仮説 H が定める領域 $\Theta_0 = \{\sigma | 0 < \sigma \leq 1\}$ で極端に小さく、対立仮説 K が定める領域 $\Theta_1 = \{\sigma | \sigma > 1\}$ で極端に大きくなってしまふ。次に、Bayes 決定方式と p 値を比較してみると図 17 のようになる。やはり、p 値と Bayes 決定方式は全体にわたって比較的风险が小さく好ましいといえる。

正規分布の平均の場合と同様に、Bayes 決定方式の中でのミニマックス解を求めることにする。

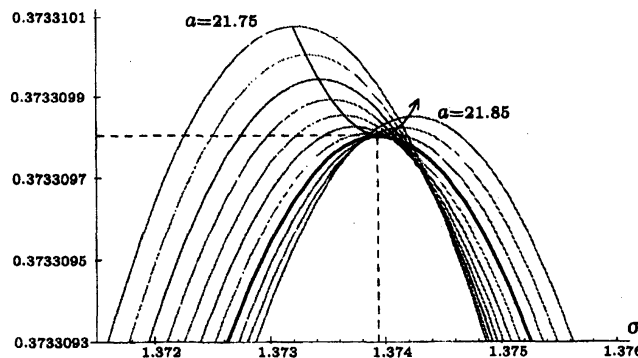


図 18 Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解 $a_0 \cong 21.8$,
 およびミニマックスリスク $\bar{R}^{(2)}(1.37, \varphi_{\pi_{21.8}}^*) \cong 0.37331$
 ($n = 5, a = 21.50 (0.01) 21.85$).

図 18 のように、標本の大きさ $n = 5$ のときには、ミニマックス Bayes 決定方式の最大リスクは p 値の最大リスクより大きい。すなわち、

$$\inf_a \sup_{\sigma} \tilde{R}^{(2)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = \tilde{R}^{(2)}(1.37, \varphi_{\pi_{21.8}}^*) \doteq 0.37331 > 0.33333 = \sup_{\sigma} \tilde{R}^{(2)}(\sigma, p) = \tilde{R}^{(2)}(1, p)$$

となる。しかし、標本の大きさ n を大きくすれば、ミニマックス Bayes 決定方式の最大リスクは p 値の最大リスクを下回る (図 19, 20 参照)。

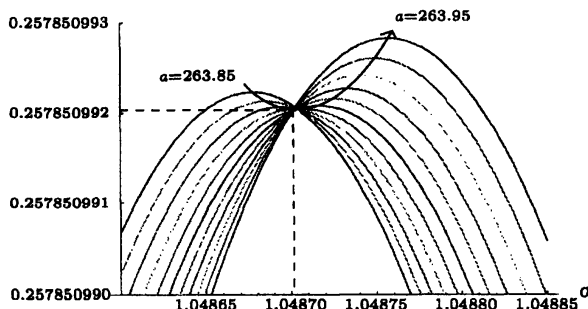


図 19 Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解 $a_0 \doteq 73.1$, およびミニマックスリスク $\tilde{R}^{(2)}(1.15, \varphi_{\pi_{73.1}}^*) \doteq 0.30275$
($n = 10, a = 73.05$ (0.01) 73.15).

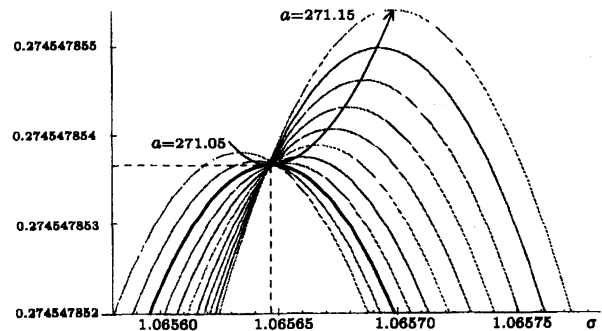


図 20 Bayes 決定方式のリスクに関するミニマックス解 $a_0 \doteq 271.1$, およびミニマックスリスク $\tilde{R}^{(2)}(1.07, \varphi_{\pi_{271.1}}^*) \doteq 0.27455$
($n = 20, a = 271.05$ (0.01) 271.15).

4.3 ノンパラメトリック検定の場合

最後に、ノンパラメトリック検定について考える。 X_1, \dots, X_n を (Lebesgue 測度に関する) p.d.f. $f(x - \theta)$ ($\theta \in \mathbf{R}$) をもつ分布からの大きさ n の無作為標本とし、 θ の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度を π とする。ただし、 $f(x)$ は原点 $x = 0$ に関して対称であるとする。いま、帰無仮説 $H: \theta \leq \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta > \theta_0$ の検定問題を考える。ここで、 $\theta_0 = 0$ としても一般性を失わない。標本分布の型を仮定しない場合や標本分布がコーシー分布のように裾が長く、位置母数 θ の位置の見当が付かない分布である場合には、ノンパラメトリック検定が用いられる。特に、符号検定統計量

$$S := \#\{1 \leq i \leq n | X_i > 0\} = \sum_{i=1}^n \chi_{(0, \infty)}(X_i) \quad (\sim Bi(n, p_\theta))$$

に基づいた符号検定はよく知られている。ただし、 p_θ は確率変数 X_1 が 0 より大きい確率、すなわち

$$p_\theta = P_\theta\{X_1 > 0\} = P_\theta\{X_1 - \theta > -\theta\} = \int_{-\theta}^{\infty} f(x) dx$$

とする。符号検定は UMP 検定を与える⁴⁾。そこで、符号検定統計量 S に基づいた決定方式 $\varphi = \varphi(S)$ を用いて、帰無仮説 H が定める集合 $\Theta_0 = \{\theta | \theta \leq 0\}$ の定義関数 $\chi_{\Theta_0}(\theta)$ の推

⁴⁾ $\vartheta := \log \frac{p_\theta}{1-p_\theta}$ とおくと、 $H: \theta \leq 0$ は $H': \vartheta \leq 0$ と同値であり、 S の確率量関数は ϑ を母数として

$$f_S^\vartheta(s) = \binom{n}{s} \left(\frac{1}{1+e^\vartheta} \right)^n e^{\vartheta s}$$

となり、すなわち、 S は指数型分布に従い、また、 S に関して単調尤度比をもつので、片側複合帰無仮説 H' の検定問題において UMP 検定を導き出すことができる。

定問題を荷重 2 乗損失 $L^{(\gamma)}(\theta, d) = |\theta|^\gamma \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - d\}^2$ の下で考える. このとき, 決定方式 φ の Bayes リスク

$$\begin{aligned} r_\pi(\varphi) &= \int_{\mathbf{R}} |\theta|^\gamma \pi(\theta) \left[\sum_{s=0}^n P_\theta\{S=s\} \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(s)\}^2 \right] d\theta \\ &= \sum_{s=0}^n \left[\int_{\mathbf{R}} |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(s)\}^2 d\theta \right] \\ &= \sum_{s=0}^n \left[\{1 - \varphi(s)\}^2 d \int_{-\infty}^0 |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} \theta + \varphi(s)^2 \int_0^\infty |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} d\theta \right] \end{aligned}$$

を最小化する決定方式, すなわち Bayes 決定方式は, ほとんどすべての s について上の式の和の項 $[\dots]$ を最小にする決定方式 φ である. そこで,

$$A := \int_{-\infty}^0 |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} d\theta, \quad B := \int_0^\infty |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} d\theta$$

とにおいて

$$[\dots] = A(1 - \varphi)^2 + B\varphi^2 = (A + B)\varphi^2 - 2A\varphi + A$$

を最小にする φ は

$$\begin{aligned} \varphi_\pi^*(s) &= \frac{A}{A+B} = \frac{\int_{-\infty}^0 |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} d\theta}{\int_{-\infty}^\infty |\theta|^\gamma \pi(\theta) P_\theta\{S=s\} d\theta} = \frac{\int_{-\infty}^0 |\theta|^\gamma \pi(\theta) \binom{n}{s} p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\theta}{\int_{\mathbf{R}} |\theta|^\gamma \pi(\theta) \binom{n}{s} p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\theta} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^0 |\theta|^\gamma \pi(\theta) p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\theta}{\int_{\mathbf{R}} |\theta|^\gamma \pi(\theta) p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\theta} \end{aligned}$$

となり, そのリスクは

$$R^{(\gamma)}(\theta, \varphi_\pi^*) = |\theta|^\gamma \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \left\{ \chi_{\Theta_0}(\theta) - \frac{\int_{-\infty}^0 |\vartheta|^\gamma \pi(\vartheta) p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\vartheta}{\int_{\mathbf{R}} |\vartheta|^\gamma \pi(\vartheta) p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s} d\vartheta} \right\}^2 p_\theta^s (1-p_\theta)^{n-s}$$

となる.

5 おわりに

本論においては, 正規分布の母数に関する検定について, 2 乗損失よりも自然と思われる荷重 2 乗損失を用いて, Bayes 決定方式, N-P 検定, p 値のリスクについて考察した. また, 正規分布の平均の片側検定問題において, 正規分布を事前分布として, Bayes 決定方式のミニマックス解を数値的に求めることができ, 正規分布の分散の片側検定問題においても, 同様の結果を得た. さらに, 母数に関する両側検定問題についても同様の観点から決定方式のリスクの比較を行いたい.

参考文献

- [BS87] Berger, J. O. and Selleke, T. (1987). Testing a point null hypothesis: The Irreconcilability of p values and evidence (with discussion). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 112–139.
- [CB87] Casella, G. and Berger, R. L. (1987). Reconciling evidence in the one-sided testing problem (with discussion). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 106–111, 123–139.
- [De73] DeGroot, M. H. (1973). Doing what comes naturally: Interpreting a tail area as a posterior probability or as a likelihood ratio. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **68**, 966–969.
- [Di77] Dickey, J. M. (1977). Is the tail area useful as an approximate Bayes factor? *J. Amer. Statist. Assoc.*, **72**, 138–142.
- [HCRWF92] Hwang, J. T., Casella, G., Robert, C., Wells, M. T. and Farrell, R. H. (1992). Estimation of accuracy in testing. *Ann. Statist.*, **20**, 490–509.
- [Le86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*. 2nd ed., Wiley, New York.
- [LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. 2nd ed., Springer, New York.
- [Li57] Lindley, D. V. (1957). A statistical paradox. *Biometrika* **44**, 187–192.
- [MA02a] 舞原 寛祐, 赤平 昌文 (2002). A decision-theoretic approach with some loss functions to a hypothesis testing problem. 京都大学 数理解析研究所講究録 **1273**, 178–196.
- [MA02b] 舞原 寛祐, 赤平 昌文 (2002). Loss functions for decision-theoretic set estimation and testing hypotheses. 科学研究費：基盤研究 (B)(1) 「統計的領域推定における精確な推定方式の開発と実用化の試み」, 科研費シンポジウム「計算機指向の統計手法の理論とその応用」研究集会講演予稿集, 7–14.
- [RC94] Robert, C. and Casella, G. (1994). Distance weighted losses for testing and confidence set evaluation. *Test* **3** (1), 163–182.