数理解析研究所講究録 1334 巻 2003 年 148-157

エントロピー損失の下での順序制約がある２つのガンマ分布の尺度母数の線形関数の推定

目白大・人文　張　元宗(Chang Yuan-Tsung)
Department of Studies on Contemporary Society, Mejiro University
慶応大・理工　篠崎　信雄(Nobuo Shinozaki)
Department of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology, Keio University

１．はじめに

$X_i \sim Gamma(\alpha_i, \lambda_i), i = 1,2$とし、尺度母数$\lambda_i$に順序制約$\lambda_1 \leq \lambda_2$があるとき、尺度母数の線形関数の推定問題を考える。これは異なる２つの分散に順序制約が与えられているとき、分散に関する推定問題を含み、そのとき、最大または最小の分散の推定はKusharyとCohen(1989)によって議論された。また、尺度母数に順序制約があるときの尺度母数の線形関数の推定は下記のような一元ランダム効果モデルに応用できる。

つぎのような一元ランダム効果モデル

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, I,\ j = 1, \ldots, J$$

を考える。ここで、$\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$ 、$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_1^2)$ とする。$S_1 = \Sigma\Sigma(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$, $S_2 = J\Sigma(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$とし$\bar{y}_{i.} = J^{-1}\Sigma y_{ij}, \bar{y}_{..} = (IJ)^{-1}\Sigma\Sigma y_{ij}$ とすると。$S_i/\sigma_i^2 \sim \chi^2_{n_i}, i = 1,2,$ である、ここで、 $n_1 = I(J-1), n_2 = I - 1$ とする。このとき、$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + J\sigma_A^2$が得られる。ここで、$\sigma_A^2$ の推定に興味があるとすれば、$\sigma_A^2 = J^{-1}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)$ を推定することになる。これは順序制約がある２つガンマ分布の尺度母数の線形関数の推定問題になる。

順序制約条件を考慮した最尤推定量（ＭＬＥ）は

$$\hat{\lambda}_i = \frac{X_i}{\alpha_i} + (-1)^i \frac{(\alpha_2 X_1 - \alpha_1 X_2)^+}{\alpha_i(\alpha_1 + \alpha_2)}, \qquad i = 1, 2,$$

である。ここで、$a^+ = max(0, a)$ であり、X_i/α_iはλ_iの不偏推定量（ＵＢ）である。平均二乗誤差（ＭＳＥ）を基準に、２つの尺度母数の線形関数$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$、

の推定問題を考えたとき、MLEが不偏推定量よりも優れているための線形関数の係数に対する必要十分条件が張、篠崎（2000, 2001）、Chang & Shinozaki (2002) によって与えられた。

一方、エントロピー損失

$$L(\delta,\theta)=\delta\theta^{-1}-\log(\delta\theta^{-1})-1$$

を基準にしたとき、制約条件を無視した個々のλ_iの最良不変推定量はx_i/α_iであり、$\alpha_i>1$のとき、尺度母数λ_iの逆数$\lambda_i^{-1}=\theta_i$の最良不変かつ最小分散不偏推定量は$(\alpha_i-1)/x_i$である。

一方、制約条件$\theta_1\geq\theta_2$を満たした$\theta_i, i=1,2,$の推定量の一つはつぎのように与えられる。

$$\hat{\theta}_1=\frac{\alpha_1-1}{x_1}+\frac{(\alpha_2x_1-(\alpha_1-1)x_2)^+}{x_1(x_1+x_2)}$$

$$\hat{\theta}_2=\frac{\alpha_2-1}{x_2}-\frac{((\alpha_2-1)x_1-\alpha_1x_2)^+}{x_2(x_1+x_2)}.$$

ここでは、尺度母数に順序制約条件がある場合、非負の係数をもつ尺度母数の線形関数の推定を考える。まず、第２章ではMLEが不偏推定量より優れているための線形関数の係数に関する必要十分条件を与える。逆に、一様な改良とならない係数の選び方についても議論する。つぎに、第３章では非負の係数をもつ尺度母数の逆数の線形関数の推定を考える。制約条件を満たすθ_iの推定量,$\hat{\theta}_i$,が最良不変かつ最小分散不偏推定量より優れているための線形関数の係数に関する十分条件を与える。

２．ＭＬＥが不偏推定量より優れているための必要十分条件

$X_i\sim Gamma(\alpha_i,\lambda_i), i=1,2$とし、その密度関数を

$$f_{\lambda_i}(x_i)=x_i^{\alpha_i-1}\lambda_i^{-\alpha_i}e^{-x_i/\lambda_i}/\Gamma(\alpha_i),\qquad 0<x_i<\infty$$

とする。λ_iに順序制約$\lambda_1\leq\lambda_2$があるとする。エントロピー損失 を基準に、$c_1\geq0, c_2\geq0$に対して、$c_1\lambda_1+c_2\lambda_2$の推定問題において、最尤推定量と不偏

推定量との比較を考えるとき、下記の定理が得られる。

定理１．すべての$\lambda_1 \le \lambda_2$に対して、最尤推定量が不偏推定量より一様に優れた推定量であるための十分条件は

$$\frac{c_2}{\alpha_2} \ge \frac{c_1}{\alpha_1}$$

である。

証明：不偏推定量のリスクと最尤推定量のリスクとの差は

$$\begin{aligned}\Delta R &= R\left(\sum_{i=1}^{2} c_i \frac{x_i}{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{2} c_i\lambda_i\right) - R\left(\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\lambda}_i, \sum_{i=1}^{2} c_i\lambda_i\right)\\ &= E\left\{-\frac{c_2'-c_1'}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{(\alpha_2x_1-\alpha_1x_2)^+}{\Sigma_{i=1}^2 c_i\lambda_i} + \log\left(1+\frac{c_2'-c_1'}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{(\alpha_2x_1-\alpha_1x_2)^+}{\Sigma_{i=1}^2 c_i'x_i}\right)\right\}\end{aligned}$$

ここで、$c_i' = c_i/\alpha_i, i=1,2$である。つぎのような変換

$$W = \frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{X_2}{\lambda_2}, \qquad Z = \frac{\frac{X_1}{\lambda_1}}{W}.$$

を行うと、$W \sim Gamma(\alpha_1+\alpha_2, 1)$であり、$Z \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$である。さらに、W とZは互いに独立である。

$X_1 = \lambda_1 WZ$、$X_2 = \lambda_2 W(1-Z)$と表されるので、リスクの差は$\Delta R = E\{h(Z)\}$になる。ここで、

$$h(z) = -\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(\alpha_1+\alpha_2)(z-d)^+}{\Sigma_{i=1}^2 c_i\lambda_i} + \log\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)^+}{c_1'\lambda_1 z + c_2'\lambda_2(1-z)}\right),$$

$b = \dfrac{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2}{(\alpha_1+\alpha_2)\lambda_2}$、$d = \dfrac{\alpha_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2}$である。

つぎに、$c_2' \ge c_1'$のとき、すべての$z \ge d$に対して、$h(z) \ge 0$を証明する。$h(d) = 0$になるので、$c_2' \ge c_1'$のとき、すべての$z \ge d$に対して、$h(z)$がzの非減少関数であることを証明すればよい。いま、$h(z)$を微分すると、

$$h'(z) = (c_2'-c_1')\lambda_2 b\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z + c_2'\lambda_2(1-z)}\right)^{-1} \times$$

$$\left\{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\left(1+\frac{(c_2'\lambda_2-c_1'\lambda_1)(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right\}$$

になる。$c_2'\geq c_1'$のとき、

$$(c_2'-c_1')\lambda_2 b\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)^{-1}\geq 0$$

であるので、

$$\left\{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\left(1+\frac{(c_2'\lambda_2-c_1'\lambda_1)(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right\}\geq 0 \qquad (1)$$

を証明すればよい。$b\leq 1$ と$\lambda_2\geq\lambda_1$から、(1) 式の左辺は

$$\left\{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\left(1+\frac{(c_2'\lambda_2-c_1'\lambda_1)(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)\right\}$$
$$\geq\left(\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}\right)\left(1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)$$

になる。$c_2'\geq c_1'$のとき、

$$1+\frac{(c_2'-c_1')\lambda_2 b(z-d)}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\geq 0$$

であるので、

$$\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i-(\alpha_1+\alpha_2)(c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z))}{(c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z))(\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i)}\geq 0 \qquad (2)$$

を証明すればよい。

一方、(2) 式の分母が非負なので、分子について、$c_2' \geq c_1'$のとき、すべての$1 > z \geq d$に対して、

$$g(z) = \sum_{i=1}^{2} c_i\lambda_i - (\alpha_1 + \alpha_2)(c_1'\lambda_1 z + c_2'\lambda_2(1-z)) \geq 0$$

を証明すればよい。

$$g(d) = \frac{\alpha_1\alpha_2(c_2'\lambda_2 - c_1'\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\alpha_2\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2} \geq 0$$

を簡単に確認ができ、また

$$g'(z) = (\alpha_1 + \alpha_2)(c_2'\lambda_2 - c_1'\lambda_1) \geq 0$$

になる。よって、$c_2' \geq c_1'$のとき、すべての$1 > z \geq d$に対して、$g(z)$が非負になる。したがって、$h(z) \geq 0$になる。

$\lambda_1(c_1 = 1, c_2 = 0)$ の推定について、下記のような結果が得られる。

定理2． すべての$\lambda_1 \leq \lambda_2$に対して、λ_1の最尤推定量$\hat{\lambda}_1$はx_1/α_1より一様に優れた推定量である。

証明：$c_1 = 1(c_1' = \frac{1}{\alpha_1}), c_2 = 0$のとき、

$$h(z) = \frac{\lambda_2 b(\alpha_1 + \alpha_2)(z-d)^+}{\alpha_1\lambda_1} + \log\left(1 - \frac{\lambda_2 b(z-d)^+}{\lambda_1 z}\right)$$

になり、$h(d) = 0$になる。一方、すべての$z \geq d$に対して、$h(z)$の微分は

$$h'(z) = \frac{\lambda_2 b}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\lambda_2 b(z-d)}{\lambda_1 z}\right)^{-1} \times \left\{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2 b(z-d)}{\lambda_1 z}\right) - \frac{\alpha_1}{\lambda_1 z}\left(1 - \frac{z-d}{z}\right)\right\}$$

になる。一方、

$$\frac{\lambda_2 b}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\lambda_2 b(z-d)}{\lambda_1 z}\right)^{-1} \geq 0$$

なり、$d=\dfrac{\alpha_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2}$と$1>z\geq d$によって、

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2 b(z-d)}{\lambda_1 z}\right)-\frac{\alpha_1}{\lambda_1 z}\left(1-\frac{z-d}{z}\right)\\
&\qquad=\left(\frac{\lambda_1 z}{\alpha_1}\right)^{-2}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)z^2}{\alpha_1}+\frac{\lambda_2 z}{\alpha_1}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2}\right\}\\
&\qquad\geq\left(\frac{\lambda_1 z}{\alpha_1}\right)^{-2}\left\{\frac{\lambda_1 z}{\alpha_1}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2}\right\}\geq 0
\end{aligned}$$

を得る。よって、すべて$z\geq d$に対して、$h(z)$はzの非減少関数になり、$h(z)\geq 0$になる。

つぎの定理により、最尤推定量が不偏推定量の一様な改良とはならない係数の選び方が存在することが分かる。

定理３． $c_1'>c_2'(c_2\neq 0)$のとき、$c_2'\lambda_2>c_1'\lambda_1$ならば

$$R\left(\sum_{i=1}^2 c_i\frac{x_i}{\alpha_i},\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i\right)<R\left(\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\lambda}_i,\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i\right)$$

が成り立つ。

証明：すべて$x\geq 0$に対して、下記の不等式

$$\log(1+x)\leq x$$

が成立するので、

$$h(z)\leq(c_1'-c_2')\lambda_2 b(z-d)^+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}-\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\right)$$

になり、第一項は$c_1'>c_2'$のときは非負になる。よって、

$$\begin{aligned}
k(z)&=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}-\frac{1}{c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z)}\\
&=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)(c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z))-\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i}{\sum_{i=1}^2 c_i\lambda_i(c_1'\lambda_1 z+c_2'\lambda_2(1-z))}\leq 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

を証明すればよい。(3) 式の分母が非負なので、分子

$$l(z) = (\alpha_1 + \alpha_2)(c_1'\lambda_1 z + c_2'\lambda_2(1-z)) - \sum_{i=1}^{2} c_i\lambda_i$$

が非正になることを証明すればいよい。
一方、$c_2'\lambda_2 \geq c_1'\lambda_1$のとき

$$l(d) = \frac{\alpha_1\alpha_2(c_2'\lambda_2 - c_1'\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_2\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2} \leq 0$$

になり、

$$l'(z) = (\alpha_1 + \alpha_2)(c_1'\lambda_1 - c_2'\lambda_2) \leq 0$$

になる。よって、すべての$z \geq d$に対して、$c_1' > c_2'$のとき$c_2'\lambda_2 > c_1'\lambda_1$ならば$k(z) < 0$になる。

3．尺度母数の逆数の線形関数の推定

$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda_i), i = 1, 2$とし、尺度母数に順序制約$\lambda_1 \leq \lambda_2$が与えられたとき、尺度母数の逆数,$\theta_i = \lambda_i^{-1}$の線形関数の推定を考える。そのとき、$\theta_i$に対する制約条件は$\theta_1 \geq \theta_2$であり、順序制約を満たす$\theta_i, i = 1, 2,$の推定量の一つは

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{x_1} + \frac{(\alpha_2 x_1 - (\alpha_1 - 1)x_2)^+}{x_1(x_1 + x_2)}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\alpha_2 - 1}{x_2} - \frac{((\alpha_2 - 1)x_1 - \alpha_1 x_2)^+}{x_2(x_1 + x_2)}$$

と考えられる。

$c_1\theta_1 + c_2\theta_2$の推定において、順序制約を満たしている推定量とエントロピー損失の下で最良不変かつ最小分散不偏推定量との比較を考えるとき、下記の定理が得られる。

定理４．すべての$\theta_1 \geq \theta_2$に対して、$c_1\hat{\theta}_1 + c_2\hat{\theta}_2$が$c_1\dfrac{\alpha_1 - 1}{x_1} + c_2\dfrac{\alpha_2 - 1}{x_2}$より一様に優れた推定量であるための十分条件は$c_1 = 0$または$c_2 = 0$である。

証明：リスクの差は

$$
\begin{aligned}
\Delta R &= R\left(\sum_{i=1}^{2} c_i \frac{\alpha_1 - 1}{x_i}, \sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i\right) - R\left(\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\theta}_i, \sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i\right) \\
&= E\left\{-\frac{c_1(\alpha_2 x_1 - (\alpha_1 - 1)x_2)^+}{x_1(x_1 + x_2)\sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i} + \frac{c_2((\alpha_2 - 1)x_1 - \alpha_1 x_2)^+}{x_2(x_1 + x_2)\sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i} + \right. \\
&\qquad \log\left(1 + \left(\frac{c_1(\alpha_2 x_1 - (\alpha_1 - 1)x_2)^+}{x_1(x_1 + x_2)} - \frac{c_2((\alpha_2 - 1)x_1 - \alpha_1 x_2)^+}{x_2(x_1 + x_2)}\right) \times \right. \\
&\qquad \left.\left. \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{c_i(\alpha_i - 1)}{x_i}\right)^{-1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

前節と同じように$X_1 = \lambda_1 WZ$、$X_2 = \lambda_2 W(1 - Z)$変換を行うとリスクの差は$\Delta R = E(s(z))$になる。ここで

$$
\begin{aligned}
s(z) &= t_2(z)(z - k_2)^+ - t_1(z)(z - k_1)^+ + \log(1 + t_3(z)) \\
t_1(z) &= \frac{c_1\theta_1 l_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i)z(z\theta_2 + (1 - z)\theta_1)} \\
t_2(z) &= \frac{c_2\theta_2 l_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\sum_{i=1}^{2} c_i\theta_i)(1 - z)(z\theta_2 + (1 - z)\theta_1)} \\
t_3(z) &= \frac{w_1(z) l_1 (z - k_1)^+}{(\alpha_1 - 1)(z\theta_2 + (1 - z)\theta_1)} - \frac{w_2(z) l_2 (z - k_2)^+}{(\alpha_2 - 1)(z\theta_2 + (1 - z)\theta_1)}
\end{aligned}
$$

$l_1 = \alpha_2\theta_2 + (\alpha_1 - 1)\theta_1$、$l_2 = (\alpha_2 - 1)\theta_2 + \alpha_1\theta_1$、$k_1 = ((\alpha_1 - 1)\theta_1)/l_1$、$k_2 = (\alpha_1\theta_1)/l_2$、$w_1(z) = \dfrac{d_1\theta_1(1 - z)}{d_1\theta_1(1 - z) + d_2\theta_2 z}$、$w_2(z) = \dfrac{d_2\theta_2 z}{d_1\theta_1(1 - z) + d_2\theta_2 z}$、$d_i = (\alpha_i - 1)c_i, i = 1, 2$ である。

いま、$s(k_1) = 0$になる。よって、すべての$z \geq k_1$に対して、$s(z)$がzの非減少関数になるための係数に対する条件を求める。$s(z)$を微分すると、

$$
\begin{aligned}
s'(z) &= \frac{1}{1 + t_3(z)} \times \\
&\left\{\left[t_2(z)\left(\frac{1 - k_2}{1 - z} + \frac{(z - k_2)^+(\theta_1 - \theta_2)}{z\theta_2 + (1 - z)\theta_1}\right)(1 + t_3(z))\right.\right. \\
&\left. - \frac{w_2(z) l_2}{(\alpha_2 - 1)(z\theta_2 + (1 - z)\theta_1)}\left(1 + \frac{(z - k_2)^+(\theta_1 - \theta_2)}{z\theta_2 + (1 - z)\theta_1}\right)\right] I_{z \geq k_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[t_1(z)\left(\frac{k_1}{z}+\frac{(z-k_1)^+(\theta_1-\theta_2)}{z\theta_2+(1-z)\theta_1}\right)(1+t_3(z))\right.\\
&\left.+\frac{w_1(z)l_1}{(\alpha_1-1)(z\theta_2+(1-z)\theta_1)}\left(1+\frac{(z-k_1)^+(\theta_1-\theta_2)}{z\theta_2+(1-z)\theta_1}\right)\right]I_{z\geq k_1}\\
&-\frac{d_1d_2\theta_1\theta_2}{(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)^2(z\theta_2+(1-z)\theta_1)}\left(\frac{l_2(z-k_2)^+}{\alpha_2-1}+\frac{l_1(z-k_1)^+}{\alpha_1-1}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

になる。ここで、$I_{z\geq k}$はインディケター関数である。
一方、

$$
1+t_3(z)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2-1)\theta_1\theta_2z(1-z)(c_1+c_2)}{(z\theta_2+(1-z)\theta_1)(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)}, & k_2\leq z\leq 1\\ \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2-1)\theta_1\theta_2z(1-z)c_1}{(z\theta_2+(1-z)\theta_1)(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)}+w_2(z), & k_1\leq z\leq k_2\end{cases}
$$

になり、$k_1\leq z\leq k_2$なので、$k_1/z\leq 1$、$(1-k_2)/(1-z)\geq 1$になる。よって、

$$
\begin{aligned}
&s'(z)\geq\frac{1}{1+t_3(z)}\times\\
&\Bigg\{\frac{c_1\theta_1l_1(1-z)(\theta_1-\theta_2)(c_1\theta_1(1-z)-c_2\theta_2z)}{(\sum_{i=1}^2c_i\theta_i)(z\theta_2+(1-z)\theta_1)^2(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)}\times\\
&\qquad\qquad\left(1+\frac{(z-k_1)(\theta_1-\theta_2)}{z\theta_2+(1-z)\theta_1}\right)I_{z\geq k_1}\\
&+\frac{c_2\theta_2l_2z(\theta_1-\theta_2)(c_2\theta_2z-c_1\theta_1(1-z))}{(\sum_{i=1}^2c_i\theta_i)(z\theta_2+(1-z)\theta_1)^2(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)}\times\\
&\qquad\qquad\left(1+\frac{(z-k_2)(\theta_1-\theta_2)}{z\theta_2+(1-z)\theta_1}\right)I_{z\geq k_2}\\
&-\frac{d_1d_2\theta_1\theta_2}{(d_1\theta_1(1-z)+d_2\theta_2z)^2(z\theta_2+(1-z)\theta_1)}\left(\frac{l_2(z-k_2)^+}{\alpha_2-1}+\frac{l_1(z-k_1)^+}{\alpha_1-1}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

になり、$c_1=0$ または $c_2=0$ のとき、$s'(z)\geq 0$ になる。よって、すべての $z\geq k_1$ に対して、$s(z)$ は非減少関数になり、$s(z)\geq 0$になる。

定理４の結果により、θ_iに制約条件$\theta_1\geq\theta_2$がある場合、$\hat{\theta}_i$は$(\alpha_i-1)/x_i, i=1,2$より優れていることがわかった。残念ながら、そのほかの範囲について

まだよい結果を得られていないが、θ_1の推定において、つぎの推定量は

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{\alpha_1 - 1}{x_1} + \frac{((\alpha_2 - 1)x_1 - (\alpha_1 - 1)x_2)^+}{x_1(x_1 + x_2)}$$

$(\alpha_1 - 1)/x_1$より優れていることもわかった。

参考文献

(1)Chang, Y.-T. and Shinozaki, N. (2002). A comparison of restricted and unrestricted estimators in estimating linear functions of order scale parameters of two gamma distributions. Ann. Inst. Statist. Math. vol 54, N0.4 848-860.
(2)Dipak K. Dey, Malay Ghosh and C. Srinivasan (1987) Simultaneous estimation of parameters under entropy loss. Journal of Statistical Planning and Inference, 13, 347-363.
(3)Kaur, A. and Singh, H. (1991). On the estimation of ordered means of two exponential populations. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 43, 347-356.
(4)Kushary, D and Cohen, A. (1989) Estimating ordered location and scale parameters, Statist. Decisions, 7, 201-213.
(5)Shinozaki, N. and Chang, Y.-T. (1999). A comparison of maximum likelihood and best unbiased estimators in the estimation of linear combinations of positive normal means. *Statistics & Decisions*, 17, 125-136.
(6) 張元宗、篠崎信雄(2000) 順序制約がある２つのガンマ分布の尺度母数の線形関数の推定－形状母数が異なる場合－。第68回日本統計学会予稿集
(7) 張元宗、篠崎信雄(2001) 順序制約がある２つのガンマ分布の尺度母数の線形関数の推定についての一注意。第69回日本統計学会予稿集