数理解析研究所講究録 1335 巻 2003 年 111-118

頂点作用素代数研究の計算機による証明支援

横山 和弘

KAZUHIRO YOKOYAMA

九州大学 大学院数理学研究院

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY*

1 計算機による支援

頂点作用素代数 (以下では、VOA と書く) と呼ばれる代数構造は、無限次元 Lie 代数の一種で、物理学の共形場理論の数学構造を記述したものであり、現在、代数系において最も注目されている分野のひとつである。今回、VOA 研究に計算機による支援を試み、非常に有効に活用できたことを報告する。(研究結果は [3] を参照されたい。) 併せて、今後の見通しなども検討する。

ここでは、実際の計算に焦点をあてるので、元となる数学構造 (VOA) に関する記述は最小限に留める。興味のある方は別途文献 [2, 4] を参照されたい。

今回、具体的に計算機によって計算したことは、以下の 2 点である。

- W 代数と呼ばれる代数構造の中から singular vector と呼ばれるものを計算すること。これは、以下の 2 つの具体的な計算からなる。W 代数に関しては、[1] を参照されたい。
  1. W 代数は無限次元線形空間でもあり、基底の形を定めた上で、各元を基底の線形和で表現する。この表現を正規形表現と呼ぶ。各元にある種の線形作用素が作用しており、この作用は、ある規則で与えられているが、基底とは異なる形になってしまう。そこで、表現を正規表現 (つまり、基底の線形和) へと変換する必要があるが、この変換の計算は、ある項書き換え規則を適用することで得られる。つまり、そこでの計算は、項書き換え計算に他ならない。
  2. singular vector とは、いくつかの線形作用素を適応すると 0 vector になるものと言うことができる。そこで、この計算は、有理数体上の連立線形方程式を正確に解くことに他ならない。
- Zhu 代数と呼ばれる、W 代数と密接に関係する代数の計算とその分解。実際には、今回のケースでは、Zhu 代数は多項式環の剰余類環となり、Zhu 代数を計算するということは、以下の計算を行なうことになる。(一般には、Zhu 代数は非可換である。)
  1. Zhu 代数は剰余類環であり、0 である元は、元の多項式環で言えば、イデアルに属する元である。そこで、このイデアルの生成元を 0 になるべき元 (これを 0 element と呼ぶ) を集めて求める。実際には、Zhu 代数の 0 element に対応する W 代数の元のいくつかの候補を計算し、その Zhu 代数での表現を計算する。(つまり、0 になるべき表現であり、これがイデアルの生成元となる。) この表現計算は、W 代数同様に与えらており、項書換え計算を行なうことになる。

*yokoyama@math.kyushu-u.ac.jp

2. 集めた 0 element (多項式で表現されている) たちの生成するイデアルの Gröbner 基底を計算し、その剰余類環の線形次元を計算することで、正しいイデアルかどうかを判定する。(今回、剰余類環の線形次元の下限が別の理論により分かっているので、イデアルは包含関係での上限がある。元を集め、この上限に達したときに計算は終了する。)
3. イデアルを準素分解する。理論により、各成分が W 代数の既約表現に対応しており、その既約表現をチェックする。(これにより、最終的な計算の正当性のチェックが行なわれる。)

1.1 成功事例

具体的には、以下の問題に適用し、すべての計算に成功した。

モンスター単純群に関係する VOA 部分代数 M^τ の構造を決定する (山田裕理教授 (一橋大) からの依頼)

ここで、M^τ は、以下で定義される。

- 格子 $L = \sqrt{2}A_2$ より構成される VOA を V_L で表す。(A_2 は A_2 型のルート系を表す。格子から作られる VOA は lattice VOA と呼ばれる。)
- M は V_L の部分代数で、以下の形で表される。

$$(L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{7}{10},0))\oplus(L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{7}{10},\frac{3}{2}))$$

- τ は V_L の位数 3 の自己同型であり、格子 A_2 上の位数 3 の自己同型より得られる。
- M^τ は M の部分代数で、自己同型 τ により不変なすべての元よりなる。

1.2 計算の道筋 (具体的計算への帰着)

今回、上記の例に対して、目標および計算目標について簡単に説明する。

最終目的: $M^\tau = W$ であることの証明を与える。ここで、W は W_3 代数と呼ばれるもので、M^τ の中の Virasoro element ω と weight 3 の元 J の 2 つにより生成される。(weight については、2.1 節を参照。)

$$\Updownarrow$$

等価な計算目標: W の Zhu 代数 $A(W)$ の線形次元が 20 を越えないこと.

上の 2 つが等価になる理由は以下の事実による。

- 一般に、VOA V の既約加群の個数 (同型を除く) は、Zhu 代数 $A(V)$ の線形次元が有限であれば、その線形次元に等しい。
- 今回は、Zhu 代数 $A(M^\tau)$ の線形次元は少なくとも 20 である。というのは、20 個の既約 M^τ 加群がすでに分かっているからである。
- もし、$M^\tau \neq W$ であるならば, $A(W)$ の線形次元は 20 を越えなければならない。

さらに、上の等価な計算目標は、以下の具体的な計算目標へと帰着される。

等価な計算目標: W の Zhu 代数 $A(W)$ の線形次元が 20 を越えないこと.

$$\Updownarrow$$

具体的な計算目標: いくつかの 0 element を集めて、それにより生成されるイデアル I で、$\mathbf{C}[x,y]/I$ の線形次元が丁度 20 になるようにする。ここで、x は ω に対応し、y は J に対応する。この時、I は正しいイデアル $\mathcal{I}$ に一致する。

ここで、

- $A(W) \cong \mathbf{C}[x,y]/\mathcal{I}$, であり、$\mathcal{I}$ はすべての 0 element により生成されるイデアルを表す。
- u を singular vector とし、$U(W)$ を W の universal enveloping algebra とする時、$U(W)u$ の元 はすべて 0 element となる。ここで、$U(W) = U(W^-) \otimes U(W^0) \otimes U(W^+)$ と分解され、計算では $U(W^-)$ が本質的なものとなる。

1.3 計算結果とその意味

以上の計算について、計算機代数システム Risa/Asir 上で実装し、実験を行なった。結果、

- 4 個の元 (singular vector u, $J(-1)u$, $J(-2)u$, $J(-1)(-1)u$) に対応する 4 個の 0 element により生成されるイデアルを I とすると、$\mathbf{C}[x,y]/I$ の線形次元は丁度 20 になった。これより、$I = \mathcal{I}$ であり、

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{問題 } M^{\tau} = W \text{ は肯定的に証明された。}}$$

すべての計算は 10 分以内で終わった。しかし、実装に 2 週間以上費された。

Remark: singular vector を手で計算するのは不可能に思える。というのは、正規形表現 (基底での表現) の計算には非常に多くの項書換えを必要とするからである。例えば、今回の計算では、1 万回を越える項書き換えを必要とする元がいくつもあった。

2 具体的計算

2.1 Singular Vector 計算

ここでは、singular vector u を計算する。この計算は、正規形計算を繰り返すことで実現される。まず、基本を列挙する。

1. vector space $U(W^-)\mathbf{1}$ は以下の基底で生成される。

$$\{L(-m_1)\cdots L(-m_s)J(-n_1)\cdots J(-n_t)\mathbf{1} \mid$$
$$m_1 \geq \cdots \geq m_s \geq 2, n_1 \geq \cdots \geq n_t \geq 3\}.$$

2. $u \in U(W^-)\mathbf{1}$ が singular vector とは、すべての $m \geq 1$ に対して、$L(m)u = 0$ であり、かつすべての $n \geq 0$ に対して $J(n)u = 0$ であるときに言う。

3. 正規形への書き換え規則は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
[L(m), L(n)] &= (m-n)L(m+n) + \frac{m^3-m}{12}c\delta_{m+n,0}, \\
[L(m), J(n)] &= (2m-n)J(m+n), \\
[J(m), J(n)] &= (m-n)[22(m+n+2)(m+n+3) \\
&\quad +35(m+2)(n+2)]L(m+n) \\
&\quad -120(m-n)[\sum_{k\le -2} L(k)L(m+n-k) \\
&\quad +\sum_{k\ge -1} L(m+n-k)L(k)] \\
&\quad -\frac{7}{10}m(m^2-1)(m^2-4)\delta_{m+n,0},
\end{aligned}
$$

ここで、$[A,B] = AB - BA$ とし、δ は Kronecker's delta を表す。さらに、c は中央電荷 (central charge) と呼ばれる定数であり、今回は $\frac{5}{6}$ である。

4. 追加の有効な規則は以下である。
すべての $m \ge -1$ に対して $L(m)\mathbf{1} = 0$、
すべての $n \ge -2$ に対して $J(n)\mathbf{1} = 0$、
さらに、k が v の weight の時、$L(0)v = kv$ となる。

5. vector の weight とは、以下で定義される。
$L(-m_1)\cdots L(-m_s)J(-n_1)\cdots J(-n_t)\mathbf{1}$ の weight は $m_1+\cdots+m_s+n_1+\cdots+n_t$ である。

この時、上の設定の下より、singular vector が存在すれば、すべての同じ weight の基底の線形和たちの中に singular vector が存在することが分かる。よって、singular vector が見つかるまで、weight を下から順に上げて行く戦略が有効となる。

そこで、各 weight k において、すべての $L(m), m \ge 1$ と $J(n), n \ge 0$ に対して、以下を計算する。

1. weight k の各基底 b に対して、$L(m)b$ の正規形を計算する。

2. weight k の各基底 b に対して、$J(n)b$ の正規形を計算する。

3. 基底たち b の線形和 u で $L(m)u = 0$ かつ $J(n)u = 0$ となるものを計算する。

もし、weight k の singular vector が存在すれば、上記計算で、自明でない線形和 u が得られる。

Computed Data : 実際、weight 12 で以下の singular vector が見つかった。

```
-5877264800/3501*a12+3404072000/3501*a10a2
-2653990000/3501*a9a3-266376800/3501*a8a4
+282988000/1167*a8a2a2-23744800/1167*a7a5-30824000/1167*a7a3a2
+1242377600/1167*a6a6-61947200/3501*a6a4a2-1313806000/1167*a6a3a3
-45496000/1167*a6a2a2a2-3046768400/3501*a5a5a2
+299424800/1167*a5a4a3+2347094000/3501*a5a3a2a2
-17280400/1167*a4a4a4-2036373200/3501*a4a4a2a2
+82996000/3501*a4a3a3a2+1074512000/3501*a4a2a2a2a2
+511628125/3501*a3a3a3a3-418850000/3501*a3a3a2a2a2
```

-59680000/3501*a2a2a2a2a2a2-505200/389*a6b3b3+3380480/1167*a4a2b3b3
+1150*a3a3b3b3-184400/1167*a2a2a2b3b3 +3788680/1167*a5b4b3
-8788400/3501*a3a2b4b3-12761440/3501*a4b5b3-5727500/10503*a4b4b4
+352400/389*a2a2b5b3+5727500/10503*a2a2b4b4+1593900/389*a3b6b3
+12935800/10503*a3b5b4+4108000/3501*a2b7b3-2811800/1167*a2b6b4
-3131600/10503*a2b5b5-14904160/3501*b9b3+32677600/10503*b8b4
+9423200/10503*b7b5+2432375/1167*b6b6+b3b3b3b3

ここで、a2 は $L(-2)$ を表し、b6 は $J(-6)$ を表すものとする。

2.2 Zhu 代数の計算

ここでは、Zhu 代数のおいて、0 element を集めてそれらにより生成されるイデアルを計算していく。0 element としては、前節で求めた singular vector u と $U(W^-)u$ の元、つまり、u に $J(n)$ を作用させて得られる元、を使う。

まず、$U(W^-)\mathbf{1}$ の各元をそれに対応する Zhu 代数の元へと変換する。それには、以下の変換規則を用いる。ここで、v に対応する Zhu 代数の元を $[v]$ で表すことにする。(ω は Virasoro 元, J は weight 3 の元であることを思い出して欲しい。)

$$
\begin{aligned}
[L(-m)v] &= (-1)^m(m-1)[\omega][v] + (-1)^m[L(0)v], \\
[J(-n-4)v] &= -3[J(-n-3)v] - 3[J(-n-2)v] \\
&\quad -[J(-n-1)v] \text{ for } n \geq 0, \\
[J(-3)v] &= [J][v] - 2[J(-2)v] - [J(-1)v]
\end{aligned}
$$

そこで、上の規則を u, $J(-1)u$,.. に適用し、0 element を構成し、それらにより生成されるイデアルを計算して行く。計算上では、$[\omega]$ を変数 x、$[J]$ を変数 y に割り振ることで、Zhu 代数 $A(W)$ は 2 変数多項式環の剰余類環 $\mathbf{C}[x,y]/\mathcal{I}$ として計算されることになる。ここで、$\mathcal{I}$ はすべての 0 element により生成されるイデアルとなる。

逐次的に追加していくことで、次のイデアル列が計算された。

$$
\begin{aligned}
<[u]> &\subset <[u],[J(-1)u]> \\
&\subset <[u],[J(-1)u],[J(-2)u]> \\
&\subset <[u],[J(-1)u],[J(-2)u],[J(-1)J(-1)u]>
\end{aligned}
$$

そして、$<[u],[J(-1)u],[J(-2)u],[J(-1)J(-1)u]>$ が望んでいたイデアルであった。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= <[v] \mid v \in U(W)u> \\
&= <[u],[J(-1)u],[J(-2)u],[J(-1)J(-1)u]>
\end{aligned}
$$

である。

Computed Data : 以下に計算結果を示す。
[u]: $-59680000/3501*x^6+156040000/3501*x^5-115878400/3501*x^4+(-184400/1167*y^2+32328400/3501)*x^3+(536500/1167*y^2-3155968/3501)*x^2+(-87812/389*y^2+93184/3501)*x+y^4+75776/3501*y^2$

[J(-1)u]: $-89856000/389*y*x^5+228945600/389*y*x^4-555607520/1167*y*x^3+(-926640/389*y^3+57790304/389*y)*x^2+(1637064/389*y^3-19542016/1167*y)*x-668408/389*y^3+186368/389*y$
[J(-2)u]: $179712000/389*y*x^5-457891200/389*y*x^4+1111215040/1167*y*x^3+(1853280/389*y^3-115580608/389*y)*x^2+(-3274128/389*y^3+39084032/1167*y)*x+1336816/389*y^3-372736/389*y$
[J(-1)J(-1)u]: $21565440000/389*x^7+513849856000/1167*x^6-552497504000/389*x^5+(-680659200/389*y^2+1285515063040/1167)*x^4+(3994427840/389*y^2-121501591744/389)*x^3+(-8220864912/389*y^2+36103315456/1167)*x^2+(-5559840/389*y^4+3836073072/389*y^2-363417600/389)*x-9879324/389*y^4-355536896/389*y^2$
The Ideal generated by the above:

$$
\begin{aligned}
[&-1094189891315123592 09*y^{17}\\
&-5999882951362242862 8540*y^{15}-5960427377063494647783456*y^{13}\\
&-2057727388519203705954 83520*y^{11}-2866431884203237645100715264*y^{9}\\
&-1420468651390730633131 6177920*y^{7}-4297362795170987583466602496*y^{5}\\
&-2946398888659649420682 85440*y^{3}-193111822554849377412 7104*y,\\
&520407060787538049178717818281948388348310014079795200000*y*x\\
&-2618754232668990628209632644517096072184921012 6699*y^{15}\\
&-1435036435946399807412281965842719524141167373885 7904*y^{13}\\
&-1421422459434133752999480179214170345806766799409169952*y^{11}\\
&-4874406008216522444657549612933501589221347044124597 1712*y^{9}\\
&-6688161443644378481745790654507773520598291454064046 96832*y^{7}\\
&-3163774892220248835899430079896994249654595183691529101312*y^{5}\\
&+1206526632161443203022660258548733616293199235019349 03296*y^{3}\\
&-2207743915991533628841206255594528546052400277954651 7504*y,\\
&208451129826691515750732136984107554746468969379718286540 8000000*x^{4}\\
&-45859248561872133465161070136503662044223173263538023038 97600000*x^{3}\\
&+21053564112495843090823945835394863029393365907351546940 62080000*x^{2}\\
&-1667609038613532126005857095872860437971751755037746292 32640000*x\\
&-2007920954394137364957218530441329585756179006289978 22059*y^{16}\\
&-1101094571880900040282746406225102168334696558586119815 48464*y^{14}\\
&-1094171518726881326885495215945227567467484679184941671 6275232*y^{12}\\
&-3779935052171685563857845455434470393652306720487740154 32488192*y^{10}\\
&-5273359518470184975054586502055238927871010769216659113 408109312*y^{8}\\
&-2624924346353638815116354393866453424439161733719699218 9724270592*y^{6}\\
&-8758050010284310899373483985402545417135853712417478297 799819264*y^{4}\\
&-5612162635443053575515176190419766633633174467400715962 30180864*y^{2}]
\end{aligned}
$$

2.3 イデアル分解計算

計算結果の確認も兼ねて、イデアル $\mathcal{I}$ の準素分解を計算した。元となる理論より、M^τ のいくつかの既約加群が知られていて、それらの情報より、イデアル $\mathcal{I}$ は以下を零点に持たねばならなかった。

$(0, 0)$	$(8/5, 0)$
$(1/2, 0)$	$(1/10, 0)$
$(2, 12\sqrt{-3})$	$(2, -12\sqrt{-3})$
$(3/5, 2\sqrt{-3})$	$(3/5, -2\sqrt{-3})$
$(1/9, (14/81)\sqrt{-3})$	$(1/9, -(14/81)\sqrt{-3})$
$(1/9+2/3, (238/81)\sqrt{-3})$	$(1/9+2/3, -(238/81)\sqrt{-3})$
$(1/9+4/3, (374/81)\sqrt{-3})$	$(1/9+4/3, -(374/81)\sqrt{-3})$
$(2/45, (4/81)\sqrt{-3})$	$(2/45, -(4/81)\sqrt{-3})$
$(2/45+1/3, (22/81)\sqrt{-3})$	$(2/45+1/3, -(22/81)\sqrt{-3})$
$(2/45+2/3, (176/81)\sqrt{-3})$	$(2/45+2/3, -(176/81)\sqrt{-3})$

Computed Data：一方、計算で求まった $\mathcal{I}$ の準素分解は以下となり、

$$
\begin{aligned}
&[2187y^2+196, 9x-1],\ [2187y^2+484, 45x-17],\\
&[2187y^2+56644, 9x-7],\ [y^2+12, 5x-3],\\
&[2187y^2+30976, 45x-32],\ [y^2+432, x-2],\\
&[2187y^2+139876, 9x-13],\ [2187y^2+16, 45x-2],\\
&[y, 10x-1],\ [y, 2x-1],\ [y, x],\ [y, 5x-8]
\end{aligned}
$$

すべての M^τ の既約加群に対応する零点が現れていることが確認された。

3 今後の方向

VOA の研究に計算機を用いた証明支援を行ない、うまく成功した事例を報告したが、今回の事例では、まだ直接的な計算支援の段階に過ぎない。しかし、VOA 研究は、より深い計算機支援が可能であり、これらの事例を通して、計算機の能力を活かした研究支援のあり方が議論できるのではないかと考えている。最後に、VOA 研究での今後の研究方向を述べて本報告を終わる。

- 今後も種々の lattice VOA の構造を解析して行く。そのためには、計算機代数の支援が不可欠と考える。というのは、今回の事例では W 代数の構造 (書き換え規則) が手計算により判明していたが、より大きな問題では、W 代数構造自体の決定に膨大な時間が必要となり、計算機支援が求められる。また、ここで必要な計算は、記号・代数計算であり、まさに計算機代数が必要となる。
- さらに、今回の事例で報告したように、ひとたび W 代数の構造が定まれば、計算機代数により、singular vector や Zhu 代数の計算が可能になるものと思われる。

参 考 文 献

[1] P.Bouwknegt, J.McCarthy, and K.Pilchm The W_3 Algebra, Lecture Notes in Physics, **m42**, Springer, Belin, 1996.

[2] I.B.Frenkel, J.Lepowsky, and A.Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Applied Math., **134**, Academic Press, 1988.

[3] C.Dong, C.H.Lam, K.Tanabe, H.Yamada, and K.Yokoyama, Z_3 symmetry and W_3 algebra in lattice vertex operator algebras, submitted to Comm. Math. Phys, 2003.

[4] M.Wakimoto, Infinite-Dimensional Lie Algebras, AMS Translations of Mathematical Monographs, **195**.