数理解析研究所講究録 1335 巻 2003 年 157-164

部分終結式と近接根

佐々木 建昭
筑波大学 数学系*
TATEAKI SASAKI
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

部分終結式は計算機代数では非常に重要な概念である。部分終結式は多項式 GCD の計算 [Col67, BT71] や量限子消去 (quantifier elimination)[Col75, CJ96] に対する実際的算法を与えるのみならず、種々の理論解析でも重要な役割を果たす。

多項式 $A(X), B(X) \in \mathbf{C}[X]$ に対する k 次部分終結式 (次数が k) を $R_k(A,B)$ と表す。$R_0(A,B)$ は終結式であり、それに関しては非常に多くのことが知られている。特に、$R_0(A,B)$ を $A(X)$ と $B(X)$ それぞれの根の差、即ち根差で表す、美しくて有用な公式がある。部分終結式も 19 世紀の中頃に発見されて以来、よく研究されてきた（部分終結式の歴史については [GG99], Sec. 6 を参照)。しかしながら、終結式に関する豊富な知識に比べれば、疑問点が多々ある。疑問点をいくつか列挙すると、疑問 1: $R_k(A,B)$ を根差で表す簡潔かつ有用な公式はあるか？、疑問 2: $R_k(A,B)$ の余因子を根差で表すことはできるか？、疑問 3: $A' = \mathrm{d}A/\mathrm{d}X$ とするとき、$R_k(A,A')$ を $A(X)$ の根の差で表す公式はあるか？、疑問 4: $A(X)$ と $B(X)$ が相互に近接根を持つとき $R_1(A,B), R_2(A,B), \cdots$ はどう振舞うか？、疑問 5: $R_k(A,B)$ を互除法で計算する際の桁落ちはどれ位か？、等。本稿ではこれらの疑問に十分とは言えないが答える。

疑問 1 に関して、Sylvester[Syl1853] が一つの公式を導いており、最近 Hoon[Hoo02] も別の公式を発見している。Sylvester の公式は美しいが、多数の項の和で表されていて、実際的に扱いにくい。Hoon の公式は、形は簡潔だが数式としてはかなり複雑である。３章では、部分終結式とその余因子を根差の行列式で表す非常に簡潔な公式が導かれる。$B(X) = A'(X)$ の場合、それらの公式は $A(X)$ の根の差で表されることになり、疑問１〜３が解明される。

疑問 4 に関して次の事実がある。$A(X)$ と $B(X)$ が n' 個の相互近接根を持つ場合、$(P_1 = A, P_2 = B, \cdots, P_k, \cdots)$ を多項式剰余列、$\deg(P_k) = n'$ とすれば、P_k は $A(X)$ と $B(X)$ の近似共通因子であり、P_{k+i} は i が大きいほど、より小さな許容度の近似共通因子となる。この現象は当り前のように思えるが、なぜ生じるのか、専門家でも答えられる者は少い。P_k と P_{k+1} の関係については、[SN89, HS97, DD97] が剰余列に関する関係式を用いて調べている。P_{k+i} $(i = 1, 2, \ldots)$ に対しては、除算の観点から調べた [SS89] の研究が唯一と思う。４章と５章では、$A(X)$ と $B(X)$ がそれぞれ近接度 δ の近接根クラスターを持ち、それらのクラスターが一対づつ互いに重なる場合について、$R_k(A,B), R_{k-1}(A,B), \cdots$ の係数が δ にどう依存するかを明らかにする。これらにより、上記の現象はかなり解明される。しかしながら、本稿では単にオーダー評価をするのみで、$\|R_k\|, \|R_{k-1}\|, \cdots$ の合理的上限を求めるまでには到っていない。

疑問 5 に関して、[SS89] は典型的な４つの場合について桁落ち誤差を多項式除算の観点から調べている。

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

６章で見るように、桁落ち量は部分終結式と余因子のノルムに密接に関係している。したがって、４・５章で得られた結果を基に、$R_k(A,B)$ を互除法で計算するときの桁落ち量が解明される。

なお、本稿では証明の詳細は割愛する。詳しくは論文 [Sas03] を参照されたい。

2　部分終結式の一般論

本稿では１変数多項式 P の次数、主係数、ノルムをそれぞれ $\deg(P), \mathrm{lc}(P), \|P\|$ と表す。δ は微小正数を表し、$|a| = O(\delta^k)$ および $|a| \le O(\delta^k)$ はそれぞれ $\lim_{\delta\to 0}|a|/\delta^k \ne 0,\infty$ および $\lim_{\delta\to 0}|a|/\delta^k \ne \infty$ を意味するものとする。

$\mathbf{C}$ 上の１変数多項式 $A(X), B(X)$ を次のように表す。

$$
\begin{aligned}
A(X) &= a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0, \qquad a_m \ne 0,\\
B(X) &= b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0, \qquad b_n \ne 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$A(X)$ と $B(X)$ の根をそれぞれ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ および $\beta_1,\cdots,\beta_n$ とする：

$$
\begin{aligned}
A(X) &= a_m(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_m),\\
B(X) &= b_n(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_n).
\end{aligned} \tag{2}
$$

定義 1 (正常多項式) $A(X)$ が $a_m = \max\{|a_{m-1}|,\cdots,|a_0|\} = 1$ を満たすとき $A(X)$ は正常といい、$A(X), B(X)$ が $a_m = b_n = \max\{|a_{m-1}|,\cdots,|a_0|,|b_{n-1}|,\cdots,|b_0|\} = 1$ を満たすとき、$\langle A(X), B(X)\rangle$ は正常という。（注釈：正常多項式の根はすべて複素数平面で半径２の円盤内にある。したがって、近接度 δ の近接根とは、相互距離が δ 程度の大きさの根を意味する。）□

$A(X)$ と $B(X)$ に対する k 次の部分終結式 $R_k(A,B)$ は次式で定義される。

$$
R_k(A,B) = \begin{vmatrix}
a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2k+2-n} & X^{n-k-1}A\\
 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_{2k+3-n} & X^{n-k-2}A\\
 & & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots\\
 & & & a_m & \cdots & a_{k+1} & X^0 A\\
b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2k+2-m} & X^{m-k-1}B\\
 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_{2k+3-m} & X^{m-k-2}B\\
 & & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots\\
 & & & b_n & \cdots & b_{k+1} & X^0 B
\end{vmatrix}. \tag{3}
$$

ここで $j<0$ のとき $a_j = b_j = 0$ であり、空白は 0 を意味する。

各 $R_k(A,B)$ に対し、次式を満たす $S_k(A,B)$ と $T_k(A,B)$ が存在する。

$$
\begin{gathered}
R_k(A,B) = S_k(A,B)\,A(X) + T_k(A,B)\,B(X),\\
\deg(S_k) < n-k, \quad \deg(T_k) < m-k.
\end{gathered} \tag{4}
$$

S_k と T_k は R_k の余因子と呼ばれ、一意的である。$S_k(A,B)$ と $T_k(A,B)$ は (3) の最後の列をそれぞれ ${}^t(X^{n-k-1}, X^{n-k-2}, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0)$ と ${}^t(0,0,\cdots,0, X^{m-k-1}, X^{m-k-2}, \cdots, 1)$ で置き換えた行列式で表現される。

次の定理はよく知られているが、後々の必要上、証明を付ける。

定理 1 $C(X) = c_l X^l + c_{l-1}X^{l-1} + \cdots + c_0$ とするとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} R_k(AC, BC) &= c_l^{m+n+2l-2k-1} C(X) R_{k-l}(A, B), &(5)\\ S_k(AC, BC) &= c_l^{m+n+2l-2k-1} S_{k-l}(A, B), &(6)\\ T_k(AC, BC) &= c_l^{m+n+2l-2k-1} T_{k-l}(A, B). &(7)\end{aligned}$$

($j < 0$ のとき $R_j = S_j = T_j = 0$ と定めれば、上式は $k < l$ の場合にも成立する。)

証明 $R_k(AC, BC)$ は次の行列式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} c_l a_m & c_l a_{m-1}+c_{l-1}a_m & c_l a_{m-2}+c_{l-1}a_{m-1}+c_{l-2}a_m & \cdots & * \\ & c_l a_m & c_l a_{m-1}+c_{l-1}a_m & \cdots & * \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ c_l b_n & c_l b_{n-1}+c_{l-1}b_n & c_l b_{n-2}+c_{l-1}b_{n-1}+c_{l-2}b_n & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

右端の列は $C(X)\ {}^t(X^{n+l-k-1}A, \cdots, X^0A, X^{m+l-k-1}B, \cdots, X^0B)$ である。(第2列) $- c_{l-1}/c_l \times$(第1列)、(第3列) $- c_{l-2}/c_l \times$(第1列) $- c_{l-1}/c_l \times$(引き算後の第2列)、等を計算すれば、上記行列式は

$$\begin{vmatrix} c_l a_m & c_l a_{m-1} & c_l a_{m-2} & \cdots & X^{n+l-k-1}AC \\ & c_l a_m & c_l a_{m-1} & \cdots & X^{n+l-k-2}AC \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ c_l b_n & c_l b_{n-1} & c_l b_{n-2} & \cdots & X^{m+l-k-1}BC \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

となる。これより直ちに定理が得られる。 □

上記の定理を拡張する。
簡単のため $C(X)$ はモニックとし ($c_l = 1$)、$D(X)$ と $E(X)$ を次数 $< l$ なる次の多項式とする。

$$D(X) = d_{l-1}X^{l-1} + \cdots + d_0, \quad E(X) = e_{l-1}X^{l-1} + \cdots + e_0. \tag{8}$$

$X^l/C(X)$ を $X^l/C(X) = 1 - c_{l-1}/X - (c_{l-2} - c_{l-1}^2)/X^2 - (c_{l-3} - 2c_{l-2}c_{l-1} + c_{l-1}^3)/X^3 + \cdots$ のように $1/X$ のべき級数に展開し、数値 $\check{d}_i$ と $\check{e}_i$ $(i = l-1, l-2, \ldots)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \check{D}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} D(X)/C(X) = \check{d}_{l-1}X^{-1} + \check{d}_{l-2}X^{-2} + \cdots, \\ \check{E}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} E(X)/C(X) = \check{e}_{l-1}X^{-1} + \check{e}_{l-2}X^{-2} + \cdots. \end{aligned} \tag{9}$$

$R_k(X^l(A+\check{D}), X^l(B+\check{E}))$ を形式的に (3) と同様に次数 $m+l+n+l-2k$ の行列式と定める。この行列式の右端列を ${}^t(X^{n+l-k-1}P, X^{n+l-k-2}P, \cdots, X^0P, X^{m+l-k-1}Q, \cdots, X^0Q)$ で置き換えたものを $\check{R}_{k-l}(P, Q)$ とする:

$$\check{R}_{k-l}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_0 & \check{d}_{l-1} & \check{d}_{l-2} & \cdots & X^{n+l-k-1}P \\ & a_m & \cdots & a_0 & \check{d}_{l-1} & \cdots & X^{n+l-k-2}P \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ b_n & \cdots & b_0 & \check{e}_{l-1} & \check{e}_{l-2} & \cdots & X^{m+l-k-1}Q \\ & b_n & \cdots & b_0 & \check{e}_{l-1} & \cdots & X^{m+l-k-2}Q \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}. \tag{10}$$

定理 2 (これは新しい定理であろう。)

$$
\begin{aligned}
R_k(AC{+}D, BC{+}E) &= C(X)\breve{R}_{k-l}(A,B) + \breve{R}_{k-l}(D,E), &(11)\\
S_k(AC{+}D, BC{+}E) &= \breve{R}_{k-l}(1,0), &(12)\\
T_k(AC{+}D, BC{+}E) &= \breve{R}_{k-l}(0,1). &(13)
\end{aligned}
$$

証明概略 定理1と同様に各列を簡単化していけばよい。あるいは、$AC{+}D = (A{+}\breve{D})C$, $BC{+}E = (B{+}\breve{E})C$ とおき、$R_k((A{+}\breve{D})C, (B{+}\breve{E})C)$ に定理1を適用してもよい。 □

3 部分終結式の根差表現

次式は部分終結式を根差で表す Sylvester の公式である。

$$
\begin{cases}
R_k(A,B) = \displaystyle\sum_{\substack{I,J \\ |I|+|J|=k}} \frac{R_0(A_I,B_J)\,R_0(A_{\bar{I}},B_{\bar{J}})}{R_0(A_I,A_{\bar{I}})\,R_0(B_J,B_{\bar{J}})} A_I(X)B_J(X), \\
I \subset \{1,2,\cdots,m\} = I \cup \bar{I}, \quad I \cap \bar{I} = \phi, \\
J \subset \{1,2,\cdots,n\} = J \cup \bar{J}, \quad J \cap \bar{J} = \phi, \\
A_I(X) = \prod_{i\in I}(X-\alpha_i) \ \text{ and } \ B_J(X) = \prod_{j\in J}(X-\beta_j).
\end{cases} \tag{14}
$$

美しい公式だが、$k>1$ のとき右辺は多くの項の和となる。一方、Hoon の公式は

$$
\begin{cases}
R_k(A,B) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} |M_{k,j}|\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{j-1}), \\
M = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_m-\beta_j & 1 \end{pmatrix}, \\
M_{k,j} \Longleftarrow \begin{cases} j\text{-th \& right } m-k-1 \text{ columns,} \\ \text{and lower } m-k \text{ rows of } M. \end{cases}
\end{cases} \tag{15}
$$

である。この公式は簡潔だが、表現がかなり複雑である。もっと簡潔明快な公式を導こう。
γ を数値とし、$\hat{A}(X) \stackrel{\text{def}}{=} A(X{+}\gamma)$ および $\hat{B}(X) \stackrel{\text{def}}{=} B(X{+}\gamma)$ とする。

$$
\begin{aligned}
\hat{A}(X) &= a_m(X+\gamma-\alpha_1)\cdots(X+\gamma-\alpha_m), \\
&= \hat{a}_m X^m + \hat{a}_{m-1}X^{m-1} + \cdots + \hat{a}_0 \quad (\hat{a}_m = a_m), \\
\hat{B}(X) &= b_n(X+\gamma-\beta_1)\cdots(X+\gamma-\beta_n), \\
&= \hat{b}_n X^n + \hat{b}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \hat{b}_0 \quad (\hat{b}_n = b_n).
\end{aligned} \tag{16}
$$

補題 1 任意の数 γ に対し、次式が成立する。

$$
R_k(A,B) = R_k(\hat{A},\hat{B})\Big|_{X\to X-\gamma}. \tag{17}
$$

証明 $A(X)$ と $B(X)$ は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
A(X) &= \hat{a}_m(X-\gamma)^m + \hat{a}_{m-1}(X-\gamma)^{m-1} + \cdots + \hat{a}_0, \\
B(X) &= \hat{b}_n(X-\gamma)^n + \hat{b}_{n-1}(X-\gamma)^{n-1} + \cdots + \hat{b}_0.
\end{aligned}
$$

部分終結式 $R_k(\hat{A},\hat{B})$ は $\hat{A}(X)$ と $\hat{B}(X)$ から順に項 $X^{\max\{m,n\}}, X^{\max\{m,n\}-1}, \ldots, X^{k+1}$ を消去して得られる。同様に部分終結式 $R_k(A,B)$ は、$A(X)$ と $B(X)$ を上のように $(X{-}\gamma)$ の多項式として表し、順に

項 $(X-\gamma)^{\max\{m,n\}}, (X-\gamma)^{\max\{m,n\}-1}, \ldots, (X-\gamma)^{k+1}$ を消去して得られる。これらの消去手順は全く同一であることから、補題が得られる。 □

この補題において $\gamma=\alpha_1$ とすれば、$\hat{a}_i$ $(i=1,2,\ldots)$ は根差 $(\alpha_m-\alpha_1),\cdots,(\alpha_2-\alpha_1)$ の基本対称式で、$\hat{b}_i$ $(i=0,1,\ldots)$ は根差 $(\beta_n-\alpha_1),\cdots,(\beta_1-\alpha_1)$ の基本対称式で表される。さらに $A(X)'$ も $A(X)$ の根の差で表されるから、次の定理が得られる。

定理 3 R_k, S_k および T_k を $A(X)$ と $B(X)$ の根差で以下のように表すことができる。

$$
\begin{aligned}
R_k(A,B) &= \left|\begin{array}{cccccc}
\hat{a}_m & \hat{a}_{m-1} & \cdots & \cdots & \hat{a}_{2k+2-n} & \hat{X}^{n-k-1}\hat{A}(\hat{X}) \\
 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & \hat{a}_m & \cdots & \hat{a}_{k+1} & \hat{X}^0\hat{A}(\hat{X}) \\
\hat{b}_n & \hat{b}_{m-1} & \cdots & \cdots & \hat{b}_{2k+2-m} & \hat{X}^{m-k-1}\hat{B}(\hat{X}) \\
 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & \hat{b}_n & \cdots & \hat{b}_{k+1} & \hat{X}^0\hat{B}(\hat{X})
\end{array}\right|, \qquad (18) \\
& \quad \textit{where} \;\; \hat{X}=X-\alpha_1, \\
S_k(A,B) &= \text{右端列を } {}^t((X-\alpha_1)^{n-k-1},\cdots,(X-\alpha_1)^0,0,\cdots,0) \text{ とする}, \\
T_k(A,B) &= \text{右端列を } {}^t(0,\cdots,0,(X-\alpha_1)^{m-k-1},\cdots,(X-\alpha_1)^0) \text{ とする}.
\end{aligned}
$$

$A'(X)=\mathrm{d}A/\mathrm{d}X$ のとき、$R_k(A,A')$ は $A(X)$ の根差で表すことができる。 □

4 近接根クラスターが1個の場合

部分終結式 $R_k(A,B)$ で、$A(X)$ と $B(X)$ が相互近接根を持たなければ、そのノルムは一般に $O(1)$ であるが、$A(X)$ と $B(X)$ が相互近接根を持つ場合には、k がある値以下に対してノルムは非常に小さくなる。行列式 (3) の要素は $O(1)$ であるから、このことは行列式を展開すれば大きなキャンセーレーションが発生することを意味する。$\|R_k(A,B)\|$ の評価をこのキャンセーレーションの評価に帰着するのは厄介である。補題1でのアイデアに従い、$A(X+\gamma)$ と $B(X+\gamma)$ の係数が小さくなるように γ を選べば、比較的簡単に部分終結式のノルムを評価できる。

本章では、$\langle A(X),B(X)\rangle$ は正常で共通根を持たず、$X=\gamma$ の δ 近傍にそれぞれ m' 個と n' 個の近接根を持ち、それ以外には近接根を持たないとする。すなわち、

$$
\begin{aligned}
|\alpha_i-\gamma| &= O(\delta) \quad (1\le i\le m'), \\
|\beta_i-\gamma| &= O(\delta) \quad (1\le i\le n'),
\end{aligned} \qquad (19)
$$

で、上記以外の根差は $O(\delta^0)$ であると仮定する。さらに、簡単のため、$m'\ge n'$ と仮定する。このとき、$A(X)$ と $B(X)$ を $X=\gamma$ で展開すれば、次の補題を得る(証明は省略)。

補題 2 $A(X)$ と $B(X)$ を下記のように表す。

$$
\begin{aligned}
A(X) &= \hat{a}_m^{(0)}(X-\gamma)^m+\cdots+\hat{a}_{m'}^{(0)}(X-\gamma)^{m'}+\hat{a}'_{m'-1}(X-\gamma)^{m'-1}+\cdots+\hat{a}'_0, \\
B(X) &= \hat{b}_n^{(0)}(X-\gamma)^n+\cdots+\hat{b}_{n'}^{(0)}(X-\gamma)^{n'}+\hat{b}'_{n'-1}(X-\gamma)^{n'-1}+\cdots+\hat{b}'_0.
\end{aligned} \qquad (20)
$$

このとき、展開係数は $|\hat{a}_i^{(0)}|\le O(\delta^0)$, $|\hat{b}_i^{(0)}|\le O(\delta^0)$、および次式を満たす。

$$
\begin{aligned}
|\hat{a}'_i| &\le O(\delta^{\max\{1,m'-i\}}) \quad (i=m-1,\ldots,1,0), \\
|\hat{b}'_i| &\le O(\delta^{\max\{1,n'-i\}}) \quad (i=n-1,\ldots,1,0).
\end{aligned} \qquad (21)
$$

特に、$B(X) = \mathrm{d}A(X)/\mathrm{d}X$ かつ $\gamma = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{m'})/m'$ ならば次式が成立する。

$$\begin{array}{lll} |\hat{a}'_{m-1}| = 0, & |\hat{a}'_i| \le O(\delta^{\max\{2,\, m'-i\}}) & (i = m-2, \ldots, 0), \\ |\hat{b}'_{n-1}| = 0, & |\hat{b}'_i| \le O(\delta^{\max\{2,\, n'-i\}}) & (i = n-2, \ldots, 0). \end{array} \tag{22}$$

定理 4 (19) の下で、次のオーダー評価が成立する。

$$\begin{array}{l} \|R_k(A,B)\| = O(\delta^0) \quad (k \ge n'), \\ \|R_k(A,B)\| \le O(\delta^{(m'-k)(n'-k)}) \quad (n' > k \ge 0). \end{array} \tag{23}$$

さらに、$R_k(A,B)$ $(k \le n')$ の各係数に対しては、

$$R_k(A,B) = \hat{r}_k(X-\gamma)^k + \hat{r}_{k-1}(X-\gamma)^{k-1} + \cdots + \hat{r}_0 \tag{24}$$

と表すとき、次のオーダー評価が成立する。

$$\begin{array}{l} |\hat{r}_{k-i}| = O(\delta^{(m'-k)(n'-k)+i}) \quad (k \le n',\ i \le k), \\ |\hat{r}_{n'-1}| \le O(\delta^2) \quad \text{if } k = n' \text{ and } B(X) = \mathrm{d}A(X)/\mathrm{d}X. \end{array} \tag{25}$$

証明概略 $R_k(A(X+\gamma), B(X+\gamma))$ は (20) の係数で表される。これらの係数は (21) を満たすので、行列式の値を丁寧に評価すれば、上記定理が得られる。 □

5 近接根クラスターが複数個の場合

本章では、$\langle A(X), B(X)\rangle$ は正常で共通根を持たず、$X = \gamma_i$ $(i=1,\ldots,\lambda)$ の δ 近傍にそれぞれ m' 個と n' 個の近接根を持ち、それ以外には近接根は持たないとする。すなわち、

$$\begin{array}{l} |\alpha_{(l-1)m'+i} - \gamma_l| = O(\delta) \quad (1 \le l \le \lambda;\ 1 \le i \le m'), \\ |\beta_{(l-1)n'+i} - \gamma_l| = O(\delta) \quad (1 \le l \le \lambda;\ 1 \le i \le n'), \end{array} \tag{26}$$

で、上記以外の根差は $O(\delta^0)$ であると仮定する。さらに、簡単のため、$m' \ge n'$ と仮定する。

近接根の中心を表す多項式 $C(X)$ を次式で定める。

$$C(X) \stackrel{\text{def}}{=} (X-\gamma_1)\cdots(X-\gamma_\lambda). \tag{27}$$

$A(X)$ と $B(X)$ を $C(X)$ で次々と割っていくことにより、次の補題が得られる(証明は省略)。

補題 3 $A(X)$ と $B(X)$ は次のように表すことができる。

$$\begin{array}{rcl} A(X) & = & \bar{A}_{m'}(X)C^{m'} + \bar{A}_{m'-1}(X)C^{m'-1} + \cdots + \bar{A}_0(X), \\ & & \deg(\bar{A}_{m'}) = m-m', \quad \deg(\bar{A}_{m'-i}) < \lambda \ \ (i \ge 1), \\ B(X) & = & \bar{B}_{n'}(X)C^{n'} + \bar{B}_{n'-1}(X)C^{n'-1} + \cdots + \bar{B}_0(X), \\ & & \deg(\bar{B}_{n'}) = n-n', \quad \deg(\bar{B}_{n'-i}) < \lambda \ \ (i \ge 1). \end{array} \tag{28}$$

このとき、展開係数は次の式を満たす。

$$\begin{array}{ll} \|\bar{A}_i\| \le O(\delta^{m'-i}), & (i = m'-1, \ldots, 0), \\ \|\bar{B}_i\| \le O(\delta^{n'-i}), & (i = n'-1, \ldots, 0). \end{array} \tag{29}$$

特に、$B(X)=\mathrm{d}A(X)/\mathrm{d}X$ かつ $\gamma_l=(\alpha_{(l-1)m'+1}+\cdots+\alpha_{lm'})/m'$ $(l=1,\ldots,\lambda)$ ならば次式が成立する。

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_i\| &\le O(\delta^{\max\{2,\,m'-i\}}), \qquad (i=m'-1,\ldots,0),\\ \|\bar{B}_i\| &\le O(\delta^{\max\{2,\,n'-i\}}), \qquad (i=n'-1,\ldots,0). \end{aligned} \tag{30}$$

□

前章と異なり、本章の場合、たとえば $\bar{A}_{m'}(X)C^{m'}$ も定数項を与えるので、部分終結式を与える行列式のオーダー評価は容易ではない。行列式の値を評価するには、定理 2 を再帰的かつ巧妙に適用する必要がある。すると次の定理が得られる（詳細は [Sas03] を参照)。

定理 5 $k=q\lambda+r,\ \lambda>r\ge 0,$ とする。(26) の下で次のオーダー評価が成立する。

$$\begin{aligned} &\|R_k(A,B)\|=O(\delta^0) \quad (k\ge \lambda n'),\\ &\|R_k(A,B)\|=O(\delta^{\lambda(m'-q)(n'-q)-(m'+n'-2q-1)r}) \quad (k<\lambda n'). \end{aligned} \tag{31}$$

$R_k(A,B),\ k\le\lambda n',$ の各係数については、

$$\begin{aligned} R_k(A,B)&=\bar{R}_q(X)C(X)^q+\bar{R}_{q-1}(X)\,C(X)^{q-1}+\cdots+\bar{R}_0(X),\\ \deg(\bar{R}_q)&=r, \qquad \deg(\bar{R}_i)<\lambda \quad (i=q-1,\ldots,0), \end{aligned} \tag{32}$$

と表すとき、次のオーダー評価が成立する。

$$\begin{aligned} &\|\bar{R}_{q-i}\|\le O(\delta^{\lambda(m'-q)(n'-q)-(m'+n'-2q-1)r+i}) \quad (0<i\le q),\\ &\|\bar{R}_{q-1}\|\le O(\delta^2) \quad \text{if } k=\lambda n' \text{ and } B(X)=\mathrm{d}A(X)/\mathrm{d}X. \end{aligned} \tag{33}$$

6 互除法における桁落ちについて

多項式 A,B,E が、$\|A\|\simeq\|B\|\gg\|E\|$ かつ $A-B=E$ を満たすとき、A,B から E を計算するとき $\|A\|/\|E\|$ の大きさの桁落ちが発生するという。

$(P_1=A,P_2=B,\cdots,P_k,\cdots)$ を多項式剰余列、その余因子列を $(S_1=1,S_2=0,\cdots,S_k,\cdots)$, $(T_1=0,T_2=1,\cdots,T_k,\cdots)$ とする。剰余列計算における桁落ち量は、[SS89] に従い "規格化剰余列" を考察すれば分る。規格化剰余列 $(P'_1=A,P'_2=B,\cdots,P'_k,\cdots)$ とは、

$$Q_i:=\mathrm{quotient}(P'_{i-1},P'_i),\quad P'_{i+1}:=\mathrm{remainder}(P'_{i-1},P'_i)/\max\{1,\|Q_i\|\} \qquad (i=2,3,\ldots)$$

なる算式で計算される。$\|P_{i+1}\|/\|P_i\|\ll 1$ のとき桁落ちが発生するが、その量は $\|Q_i\|$ となる。規格化剰余に対応する余因子は $S'_{i+1}:=[S_{i-1}-Q_iS_i]/\max\{1,\|Q_i\|\}$, $T'_{i+1}:=[T_{i-1}-Q_iT_i]/\max\{1,\|Q_i\|\}$ と計算されるから、$\|S'_i\|,\|T'_i\|\approx 1$ となる。規格化剰余列から部分終結式剰余列に戻すことにより、A と B から P_k を互除法で計算する過程で発生する桁落ちの総和は、ほぼ次の式で与えられることが分る。

$$\text{total-cancellation}=\frac{\max\{\|S_k\|,\|T_k\|\}}{\|R_k\|}. \tag{34}$$

4・5 章では R_k のノルムと各係数のオーダー評価を行ったが、S_k と T_k についても全く同様にオーダー評価ができる。その結果を簡単に表すと次式となる。

$$\|S_k\|,\|T_k\|=O(\|R_{k+1}\|). \tag{35}$$

これらより、R_k の計算における全桁落ち量を容易に見積もることができる。

次の表は、$A(X)$ と $B(X)$ が近接度 δ の近接根クラスターを 1 個だけ持つ場合の桁落ち量を表している（表中で $\nu=m'-n'$ である)。

k	$\|R_k\|$	$\|S_k\|$	$\|S_k\|/\|R_k\|$
n'	$O(\delta^0)$	$O(\delta^0)$	$O((1/\delta)^0)$
$n'-1$	$O(\delta^{1(\nu+1)})$	$O(\delta^0)$	$O((1/\delta)^{\nu+1})$
$n'-2$	$O(\delta^{2(\nu+2)})$	$O(\delta^{1(\nu+1)})$	$O((1/\delta)^{\nu+3})$
$n'-3$	$O(\delta^{3(\nu+3)})$	$O(\delta^{2(\nu+2)})$	$O((1/\delta)^{\nu+5})$
$n'-4$	$O(\delta^{4(\nu+4)})$	$O(\delta^{3(\nu+3)})$	$O((1/\delta)^{\nu+7})$

Table I. Magnitude of the total cancellation ($\|S_k\|/\|R_k\|$).
Case of single cluster of close roots ($\nu = m'-n'$).

参考文献

[BT71] W. S. Brown and J. F. Traub: On Euclid's algorithm and the theory of subresultants. J. ACM **18** (1971), 505-514.

[CJ96] B. Caviness and J. Johnson: *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition.* Springer Verlag, 1996. Texts and Monographs in Symbolic Computation.

[Col67] J. E. Collins: Subresultants and the reduced polynomial remainder sequences. J. ACM **14** (1967), 128-142.

[Col75] J. E. Collins: Quantifier elimination for the elementary theory of real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. in *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 33, 134-183. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[GG99] J. von zur Gathen and J. Gerhard: *Modern Computer Algebra.* Cambridge University Press, 1999.

[Hoo02] Hoon Hong: Subresultants in roots. in *Abstracts of 8th Intern'l Conference on Applications of Computer Algebra*, 27-28. June 2002, Univ. of Thessarly, Volos, Greece.

[HS97] V. Hribernig and H. J. Stetter: Detection and validation of clusters of zeros of polynomials. J. Symbolic Comput. **24** (1997), 667-681.

[LP01] A. Lascoux and P. Pragacz: Double sylvester sums for Euclidean division, multi-shur functions, and gysin maps for grassmann bundles. 2001 (submitted).

[Sas03] T. Sasaki: The subresultants and close roots. Preprint of Univ. of Tsukuba (18 pages), Jan. 2003.

[SN89] T. Sasaki and M-T. Noda: Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. J. Inf. Process., **12** (1989), 159-168.

[SS89] T. Sasaki and M. Sasaki: Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients. J. Inform. Proces. **12** (1989), 394-403.

[SS97] T. Sasaki and M. Sasaki: Polynomial remainder sequence and approximate GCD. SIGSAM Bulletin **31** (1997), 4-10.

[Syl1853] J. J. Sylvester: On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's function and that of the greatest algebraic common measure. Trans. Roy. Soc. London, 1853. Reprinted in *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, Chelsea Publ., New York 1973, Vol. 1, 429-586.