数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 104-108

数列 $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+x_n}$ の面白さと関連する話題

山形大・工　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
岩手大・人社　三浦康秀 (Yasuhide Miura)
山形大・工　三浦　毅 (Takeshi Miura)
東邦大・理　塚田　真 (Makoto Tsukada)

ここに掲げた話は誰にでもわかるものであるが、何か奥の深いものを感じさせ、わからないことだらけの話でもある。

1．問題発見

「何か方程式が与えられたときその解を研究せよ」という問題は普遍的であろう。数年前、Gibbons-Kulenovic-Ladas [1] は、差分方程式：

(#) $$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+x_n},\quad x_{-1},x_0>0,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

の解 $\{x_n\}$ の中にそれが収束するものが存在するかという問題を提起した。最近 S. Stevic [3] はこの問題を肯定的に解き、更にもっと一般の差分方程式：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{g(x_n)},\quad x_{-1},x_0>0\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

の場合に拡張した。実は極最近我々は更に一般の差分方程式：

$$x_{n+1}=f(x_{n-1},x_n),\quad x_{-1},x_0>0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

の場合に上の問題を言及し、Stevic よりもっと広い結果を得ている。しかもその証明は彼の複雑なものと違って、単純で且つ短い。詳しくは文献 [4] を参照されたい。

2．原点に戻る

我々は原点に戻って、差分方程式 (#) の解の振る舞いをもっと研究してみたいというのが本講の目的である。すぐ分かることは、

$$x_0>x_2>x_4>\cdots>0 \text{ and } x_{-1}>x_1>x_3>\cdots>0$$

であるから、$\exists\lim_{n\to\infty}x_{2n}=p, \exists\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=q$．このとき $p=\dfrac{p}{1+q}$ が成り立つから $pq=0$ である。従って次の３つの場合が考えられる：

(1) $p>0$ and $q=0$.

(2) $q>0$ and $p=0$.

(3) $p=q=0$.

これを環境生物学的に述べると、偶数と奇数という名前の２種の競争種がいて、お互い (#) という牽制をするためにその数を互い違いに減らしている。この場合次の３通りが考えられるという訳である：

(1) 偶数種が生き残り、奇数種が滅亡する。

(2) 奇数種が生き残り、偶数種が滅亡する。

(3) どちらも滅亡する。

実際差分方程式 (#) は適当な変換によって、生物の２種間のある遅れ型競争問題を表しいると考える事ができる (cf. [2])。ところで現実問題として、どちらも滅亡することは考えにくい。しかしそれでも「そういう場合が起こり得るか？」と問うたのが、上の Gibbons-Kulenovic-Ladas 問題と考えられる。

3．予 想

前節の減少をもう少し数学的に考えてみよう。先ず次の命題を用意する。

命題１。 $x_{2n-2} = p + \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j-1}x_{2j}$ $(n \geq 1)$ and $x_{2n-1} = q + \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1}$ $(n \geq 0)$

Proof. Let $n \geq 1$. Since

$$x_{m+1} - x_{m-1} = (x_m - x_{m-2})\frac{1}{1+x_m} = (x_{m-1} - x_{m-3})\frac{1}{1+x_m}\frac{1}{1+x_{m-1}}$$
$$= \cdots = (x_n - x_{n-2})\prod_{i=n}^{m}\frac{1}{1+x_i}$$

for each $m \geq n$, it follows that

$$x_{2N+1} - x_{2n-1} = \sum_{j=n}^{N}(x_{2j+1} - x_{2j-1}) = (x_n - x_{n-2})\sum_{j=n}^{N}\prod_{i=n}^{2j}\frac{1}{1+x_i}$$

for each $N \geq n$. Hence after taking the limit with respect to N, we obtain

(1) $$q = x_{2n-1} + (x_n - x_{n-2})\sum_{j=n}^{\infty}\prod_{i=n}^{2j}\frac{1}{1+x_i}.$$

Similarly, we obtain

(2) $$p = x_{2n-2} + (x_n - x_{n-2})\sum_{j=n}^{\infty}\prod_{i=n}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i}.$$

Note that

(3) $$\prod_{i=n}^{2j}\frac{1}{1+x_i} = \prod_{i=n}^{2j}\frac{x_{i+1}}{x_{i-1}} = \frac{x_{2j}x_{2j+1}}{x_{n-1}x_n} \quad \text{and} \quad \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}x_n} = -1.$$

By (1) and (3), we obtain $q = x_{2n-1} - \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1}$. Moreover, we have that

$$q = x_1 - \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1} = x_1 + x_0x_1 - \sum_{j=0}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1} = x_{-1} - \sum_{j=0}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1}$$

and hence $q = x_{2n-1} - \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1}$ holds for $n = 0$. Also by (2) and (3) we obtain

$$p = x_{2n-2} + (x_n - x_{n-2})\sum_{j=n}^{\infty}\prod_{i=n}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i}$$
$$= x_{2n-2} + (x_n - x_{n-2})\sum_{j=n}^{\infty}(1+x_{2j})\prod_{i=n}^{2j}\frac{1}{1+x_i}$$
$$= x_{2n-2} + \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}x_n}\sum_{j=n}^{\infty}(1+x_{2j})x_{2j}x_{2j+1}$$
$$= x_{2n-2} - \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j}x_{2j-1}$$

and hence $x_{2n-2} = p + \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j-1}x_{2j}$. Q. E. D.

上の命題は次の系を引き起こす。

系２。 (#) の解 $\{x_n\}$ が収束することと、$x_{-1} > x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > 0$ と同値である。

Proof. Sufficiency : Trivial.
Necessity : Suppose that $\{x_n\}$ converges. Let $n \geq 1$. Since $p = q = 0$, it follows from the

above lemma that

(4) $$x_{2n-2} = \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j-1}x_{2j} \quad (n \geq 1);$$

(5) $$x_{2n-1} = \sum_{j=n}^{\infty} x_{2j}x_{2j+1} \quad (n \geq 0).$$

Since $\{x_{2n-1}\}$ is strictly decreasing, it follows from (4) and (5) that $x_{2n-2} > x_{2n-1}$ $(n \geq 1)$. Also since $\{x_{2n}\}$ is strictly decreasing, it follows from (4) and (5) that

$$x_{2n-1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{2j-2}x_{2j-1} > \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{2j-1}x_{2j} = x_{2n} \quad (n \geq 0).$$

Consequently, $x_{-1} > x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$. Q. E. D.

注意：系 2 で述べている結果は Stevic も得ているが我々の方がより詳しい (cf. [3, Theoerm 1, (g)].

いま初期値 $x_{-1} = b > 0, x_0 = a > 0$ を考え、x_n は a, b の関数とみると、系から次の 2 つの命題は同値である事がわかる：

(a) 差分方程式 (#) の解 $\{x_n\}$ の中にそれが収束するものが存在する。
(b) $S_\# = \{(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : b > a > x_1(a, b) > x_2(a, b) > \cdots > 0\} \neq \varnothing$.

実は S. Stevic は「$\forall b > 0, \exists a > 0 : (a, b) \in S_\#$」を証明した (cf. [3, Corollary 2])。更に我々は [4] の中で一般論を展開しその特別な場合として、「$\forall a > 0, \exists b > 0 : (a, b) \in S_\#$」を証明した。しかしながら一般論の証明は少し複雑であり、また本論の趣旨にそぐわないので割愛したい。
さて、そこで我々は次の予想を提起したい：

予想。$S_\#$ は狭義単調増加な C^∞ − 関数 $y = f_\#(x)$ $(x > 0)$ の表すグラフに一致する。

しかしながら現在のところ、この予想を証明することは我々にとって至難の業である。そこでこの予想を少しでも理解するため、コンピュータを酷使してみよう。先ず各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、

$$S_n = \{(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : b > a > x_1(a, b) > x_2(a, b) > \cdots > x_n(a, b)\}$$

と置き。次に 2×2 正方形の中に等間隔の格子点 1 万個について $S_0, S_1, \cdots, S_{11}$ 及び S_{20} を描いて見たのが図 1, 2 である。勿論 $S_\# = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ であるから、少し大胆であるが我々の予想が正しい事が推察されよう。次に我々の予想が正しいと仮定すると、関数方程式：

$$f_\#^{-1}(x)(1 + x) = f_\#(x) \quad (x > 0)$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}(a, b) \in S_\# &\Leftrightarrow b = f_\#(a), a > 0, b > 0 \\ &\Leftrightarrow b > a > x_1(a, b) > x_2(a, b) > \cdots > 0 \\ &\Leftrightarrow a = f_\#\big(x_1(a, b)\big) \text{ and } b > a > 0 \\ &\Leftrightarrow a = f_\#\left(\frac{b}{1 + a}\right) \text{ and } b > a > 0\end{aligned}$$

であるから、与式が成り立つ。この関数方程式を数値解析的に解こう。それには $\lim_{x \to +0} f_\#(x) = 0$ に注意し、$f_\#(0) = 0$ と定義すれば、Taylor の定理から次式を得る：

$$f_\#(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{48}x^5 + \cdots.$$

（手計算では $n = 5$ ぐらいで精一杯！）しかしそれでもこの関数は小さい範囲では実験値と良く合うことがわかる（図 3 参照）。

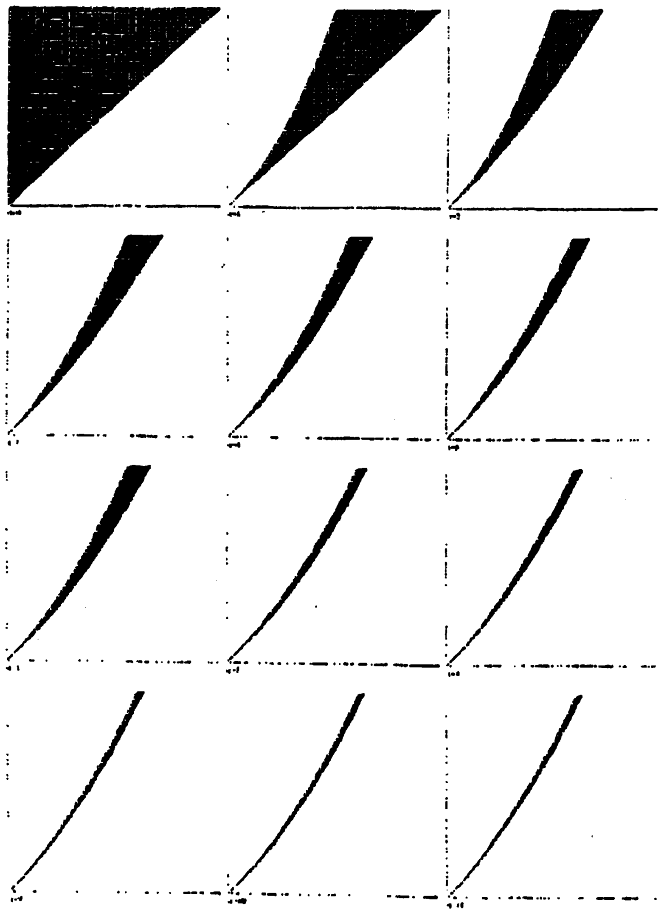

図 1

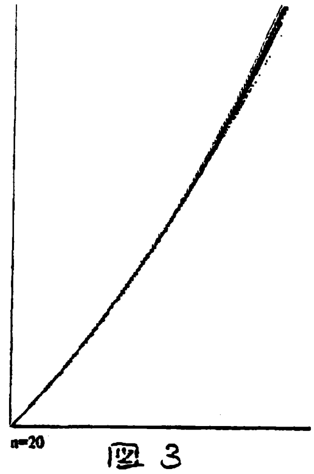

図 3

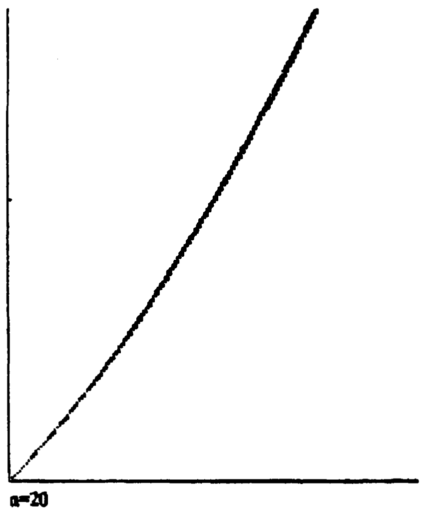

図 2

4．一杯の酒から生じる未解決問題

お金のない昔、よく居酒屋で一杯のお酒をもって粘る工夫をしたものである。妙案は常に現在あるお酒の半分しか飲まないことであった。もっとも当然とはいえ、この妙案は達成されることはなかったが、この現象を少し数学的に書いてみよう。最初の量を a とし、n 回飲んだ後残っている量を x_n とすると、 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ が成り立つ。また容易な検証で

(M_1) $$x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

が成り立つ（過去まで拡張した！）ところで $\{x_n\}$ が (#) を満たすとすると、

$$x_{2n-2} = p + \sum_{k=n}^{\infty} x_{2k-1}x_{2k} \quad (n \geq 1) \quad \text{and} \quad x_{2n-1} = q + \sum_{k=n}^{\infty} x_{2k}x_{2k+1} \quad (n \geq 1)$$

を証明することができる。従ってもし $\{x_n\}$ が収束すれば、

(M_2) $$x_n = x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+5}x_{n+6} + \cdots \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

が成り立つ（過去まで拡張した！）いま順に multiplicity 1 の数列、multiplicity 2 の数列と名付ければ、当然 multiplicity 3 の数列が考えられる。それは勿論次式が成り立つ数列である：

(M_3) $$x_n = x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+4}x_{n+5}x_{n+6} + x_{n+7}x_{n+8}x_{n+9} + \cdots \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

これを差分方程式に直すと、差し当たり

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-1}x_n}, \; x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 0, \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。このとき、この方程式の解 $\{x_n\}$ の中にそれが収束するものが存在するかという問題が自然に生じるが、現在未解決である。勿論上の伝で行けば、これは3種間競争問題がありそうで興味の湧くところである。

参考文献

1. C. H. Gibbons, M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, Math. Sci. Res. Hot-Line 4-2 (2000), 1-11.

2. P. H. Leslie, A stochastic model for studying the properties of certain biological systems by metrical methods, Biometrika 45(1958),16--31.

3. S. Stevic, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-1} / g(x_n)$, Taiwnese. J. Math., 6-3(2002), 405-414.

4. S.-E. Takahasi, Y. Miura and T. Miura, On convergency of a recursive sequence $x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_n)$, submitted.