数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 61-69

CALABI-YAU 超曲面、判別式、QUILLEN 計量

吉 川 謙 一（東京大学大学院数理科学研究科）

§1. Calabi-Yau 多様体と偏極 Hodge 構造.

この稿では、Calabi-Yau 多様体を以下のように定義する：

Definition 1. 標準束が自明な連結コンパクト Kähler 多様体を Calabi-Yau 多様体という。 □

この定義では、Abel 多様体も Calabi-Yau 多様体に含まれる。以下の条件が成り立つ Calabi-Yau 多様体 X を後に扱う（通常この条件を課すことが多い）：

$$\dim H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad (0 < q < \dim X).$$

n 次元 Calabi-Yau 多様体 X の標準束を Ω_X^n あるいは K_X で表す。Hodge の分解定理によれば、以下の包含関係が成り立つ：

$$H^0(X, \Omega_X^n) \subset H^n(X, \mathbb{C}) = H^n(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}.$$

このとき、射影空間 $\mathbb{P}(H^n(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C})$ の点 $[H^0(X, \Omega_X^n)]$ を X の周期という。$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $H^n(X, \mathbb{Z})$ 上の交叉形式とする。このとき、

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle \omega, \omega' \rangle_{L^2} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_X \omega \wedge \overline{\omega'}$$

は $H^0(X, \Omega_X^n)$ 上の自然な、即ち X の複素構造のみから定まる Hermite 構造である。この $H^0(X, \Omega_X^n)$ 上の Hermite 構造を $\| \cdot \|_{L^2}$ で表す。このとき、Hermite 直線 $(H^0(X, \Omega_X^n), \| \cdot \|_{L^2})$ は Calabi-Yau 多様体 X の不変量である。(通常、X の偏極 Hodge 構造と呼ばれる。)

この稿の目的は、以下の事項を解説することである：

● Calabi-Yau 多様体に附随するもう 1 つ別の自然なHermite 直線 $(\lambda(\Omega_X^\bullet), \| \cdot \|_{Q*})$ をコホモロジーの行列式と Quillen 計量を用いて構成する。

● 2 つの自然な Hermite 直線 $(H^0(X, \Omega_X^n), \| \cdot \|_{L^2})$ と $(\lambda(\Omega_X^\bullet), \| \cdot \|_{Q*})$ を、X が固定された Fano 多様体 V の反標準超曲面である場合に比較する。さらにこの場合には、両者の比が (V, K_V^{-1}) の判別式と同一視できる。

● X が $\mathbb{P}^3$ の4 次超曲面の場合に、$(\mathbb{P}^3, K_{\mathbb{P}^3}^{-1})$ の判別式が Borcherds 積（無限積を持つ IV 型領域上の保型形式）と同一視される。

§2. コホモロジーの行列式と Quillen 計量.

(X, κ) をコンパクト Kähler 多様体とする。以下、Kähler 計量とその Kähler 形式とを区別しない。X 上の正則 p-形式の層（及び対応する正則ベクトル束）を Ω_X^p で表す。以下、1 次元複素ベクトル空間を複素直線と呼ことにする。複素直線 L に対し、L の双対空間を L^{-1} で表す。また、複素ベクトル V に対し、$\det V = \bigwedge^{\max} V$ と定める。$V = \{0\}$ のときは、$\det V = \mathbb{C}$ と定める。

Definition 2. 整数 $p \geq 0$ に対し、複素直線 $\lambda(\Omega_X^p)$ を以下のように定める：

$$\lambda(\Omega_X^p) = \bigotimes_{q \geq 0} (\det H^q(X, \Omega_X^p))^{(-1)^q}.$$

さらに、複素直線 $\lambda(\Omega_X^\bullet)$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}\lambda(\Omega_X^\bullet) &:= \bigotimes_{p \geq 0} \lambda(\Omega_X^p)^{(-1)^p p} \\ &= \bigotimes_{p,q \geq 0} (\det H^q(X, \Omega_X^p))^{(-1)^{p+q} p}. \quad \square\end{aligned}$$

$\bar{\partial}$ を X 上の Dolbeault 作用素とし、$\bar{\partial}^*$ を Kähler 形式 κ に関する共役作用素とする。各双次数 (p, q) に対し、$\square_{p,q} = (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)^2$ を X 上の (p, q)-型微分形式に作用するラプラシアンとする。$\mathcal{H}^{p,q}(X) = \ker \square_{p,q}$ のベクトルを (X, κ) 上の調和 (p, q)-形式という。Hodge の定理によれば、$H^q(X, \Omega_X^p)$ は $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ と自然に同型である。

$\mathcal{H}^{p,q}(X)$ 上には、調和形式の積分を通して自然に Hermite 構造が入る。この Hermite 構造を L^2-計量といい、$(\cdot, \cdot)_{L^2}$ で表す。さらに、Hodge の同型 $\det H^q(X, \Omega_X^p) \cong \det \mathcal{H}^{p,q}(X)$ を通じて $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ から複素直線 $\det H^q(X, \Omega_X^p)$ に誘導される Hermite 構造も L^2-計量と呼ばれ、$\|\cdot\|_{\det H^q(X, \Omega_X^p), L^2}$ で表される。$\lambda(\Omega_X^p)$, $\lambda(\Omega_X^\bullet)$ 上の L^2-計量をこれらの積として定義する：

$$\|\cdot\|_{\lambda(\Omega_X^p), L^2} := \bigotimes_{q \geq 0} \|\cdot\|_{\det H^q(X, \Omega_X^p), L^2}^{(-1)^q},$$

$$\|\cdot\|_{\lambda(\Omega_X^\bullet), L^2} := \bigotimes_{p \geq 0} \|\cdot\|_{\lambda(\Omega_X^p), L^2}^{(-1)^p p}.$$

L^2-計量は自然な計量であるが、一般にあまり良い計量ではない。そこで、L^2-計量を以下に述べるように補正する。

ラプラシアン $\square_{p,q}$ のスペクトルを $\sigma(\square_q)$ で表す。ラプラシアンの楕円性から、$\sigma(\square_{p,q})$ は離散的で、各固有空間は有限の重複度を持つ。このとき、$\square_{p,q}$ のスペクトル・ゼータ関数を以下の級数で定める：

$$\zeta_{p,q}(s) := \sum_{\lambda \in \sigma(\square_{p,q}) \setminus \{0\}} \lambda^{-s}.$$

この級数は $\mathrm{Re}\, s > \dim_{\mathbb{C}} X$ のとき絶対収束し、全平面に有理型に解析接続され、さらに $s = 0$ で正則であることが知られている。

Definition 3. 次の実数を (X, κ) の解析的トーション (Ray-Singer トーション) という：

$$\tau(X, \kappa) := \exp\left(- \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} pq\, \zeta'_{p,q}(0) \right). \quad \square$$

Definition 4. $\lambda(\Omega_X^\bullet)$ 上の（Kähler 形式 κ に関する）Quillen 計量を以下で定める：

$$\|\cdot\|^2_{\lambda(\Omega_X^\bullet),Q} = \tau(X,\kappa)\,\|\cdot\|^2_{\lambda(\Omega_X^\bullet),L^2}. \quad \square$$

以上の設定の相対化を考えると、Quillen 計量の重要性が明らかになる。

$\mathcal{X}, S$ を複素多様体、$\pi\colon \mathcal{X}\to S$ を固有スムーズ Kähler 全射とする。このとき、相対接束 $T\mathcal{X}/S = \ker\pi_*$ は接束 $T\mathcal{X}$ の正則部分束であり、相対余接束 $\Omega^1_{\mathcal{X}/S} = (T\mathcal{X}/S)^\vee$ は余接束 $\Omega^1_{\mathcal{X}}$ の商束である。相対 p-形式のベクトル束を、$\Omega^p_{\mathcal{X}/S} = \bigwedge^p \Omega^1_{\mathcal{X}/S}$ として定める。

各ファイバーを $X_s = \pi^{-1}(s)$ で表す。点 $s\in S$ を動かすことにより、複素直線の集合 $\bigcup_{s\in S}\lambda(\Omega^\bullet_{X_s})$ は S 上の正則直線束になる。実際、この直線束は、以下のように表される：

$$\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}) = \bigotimes_{p\geq 0}\lambda(\Omega^p_{\mathcal{X}/S})^{(-1)^p p},$$

$$\lambda(\Omega^p_{\mathcal{X}/S}) = \bigotimes_{q\geq 0}(\det R^q\pi_*\Omega^p_{\mathcal{X}/S})^{(-1)^q}.$$

$g_{\mathcal{X}/S}$ をファイバー毎に Kähler な相対接束 $T\mathcal{X}/S = \ker\pi_*$ 上の Hermite 計量とする。各 $\lambda(\Omega^\bullet_{X_s})$ 上の Quillen-計量の族を考えることにより、$\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S})$ 上に滑らかな Hermite 計量が入る。この計量を $\|\cdot\|_{\lambda(\Omega^p_{\mathcal{X}/S}),Q}$ で表す。

$c_1(\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}), \|\cdot\|_{\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}),Q})$ を Hermite 直線束 $(\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}), \|\cdot\|_{\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}),Q})$ の Chern 形式とする。

Theorem 5 [BGS]. *S の各点 s に対し、近傍 $U\ni s$ が存在し、$\pi^{-1}(U)$ が Kähler であるとする。($g_{\mathcal{X}/S}$ がこのような Kähler 計量の制限であることは仮定しない。) このとき、以下の等式が成り立つ：*

$$c_1(\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}), \|\cdot\|_{\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}),Q}) = [\pi_*\{\mathrm{Td}(T\mathcal{X}/S, g_{\mathcal{X}/S})\sum_{p\geq 0}(-1)^p p\,\mathrm{ch}(\Omega^p_{\mathcal{X}/S}, g_{\mathcal{X}/S})\}]^{(1,1)}.$$

ここで、$\mathrm{Td}(TX/S, g_{X/S})$ は Hermite ベクトル束 $(TX/S, g_{X/S})$ の Todd 形式を表し、$\mathrm{ch}(\Omega^p_{\mathcal{X}/S}, g_{\mathcal{X}/S})$ はベクトル束 $\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ の $g_{\mathcal{X}/S}$ から誘導される計量に関する Chern 指標形式を表す。さらに、$[\omega]^{(1,1)}$ は微分形式 ω の双次数 $(1,1)$-次の部分である。 $\square$

この定理により、コホモロジーの行列式上の計量として Quillen 計量を選べば、Grothendieck-Riemann-Roch の定理（の次数 1 の部分）が微分形式のレベルで成り立つ。

さて、再び単独の n 次元 Calabi-Yau 多様体 X を考える。$\lambda(\Omega^\bullet_X)$ 上に自然な Hermite 構造を定義するために、以下の量を導入する：

κ を X 上の勝手な Kähler 形式、$\eta\in H^0(X,\Omega^n_X)\setminus\{0\}$ とする。このとき、実数 $A(X,\kappa)$ を以下のように定める：

$$A(X,\kappa) = \exp\left\{\frac{1}{12}\int_X \log\left(\frac{\kappa^n/n!}{\eta\wedge\overline{\eta}}\cdot\frac{\|\eta\|^2_{L^2}}{\mathrm{Vol}(X,\kappa)}\right)c_n(X,\kappa) + \frac{1}{12}\chi_{\mathrm{top}}(X)\mathrm{Vol}(X,\kappa)\right\}.$$

ただし、$\chi_{\mathrm{top}}(X)$ は X の位相的 Euler 数を表し、$\mathrm{Vol}(X,\kappa)$ は Kähler 多様体 (X,κ) の体積を表す。κ が Ricci- 平坦のとき、等式

$$\frac{\kappa^n}{n!} = \frac{\|\eta\|^2_{L^2}}{\mathrm{Vol}(X,\kappa)}\eta\wedge\overline{\eta}$$

が成り立つ。従って、この場合 $A(X,\kappa)$ は以下のように簡単になる：

$$A(X,\kappa) = e^{\frac{1}{12}\chi_{\mathrm{top}}(X)\mathrm{Vol}(X,\kappa)}.$$

Definition 6. X 上の Kähler 形式 κ に関する $\lambda(\Omega_X^\bullet)$ 上の Quillen 計量を $\|\cdot\|_{\lambda(\Omega_X^\bullet),Q}$ とする。このとき、$\lambda(\Omega_X^\bullet)$ 上の Hermite 構造 $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ を以下のように定める：

$$\|\cdot\|_{\hat{Q}}^2 := A(X,\kappa)\,\|\cdot\|_{\lambda(\Omega_X^\bullet),Q}^2. \quad \square$$

Theorem 7. $\lambda(\Omega_X^\bullet)$ 上の *Hermite* 構造 $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ は、X 上の *Kähler* 形式 κ に依らない。特に、*Hermite* 直線 $(\lambda(\Omega_X^\bullet), \|\cdot\|_{\hat{Q}})$ は X の複素構造のみに依存する。 $\square$

X 上に Kähler 形式 κ_0, κ_∞ が与えられたとき、Theorem 5 を自明な族 $X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 上の非自明な Kähler 形式の族

$$\kappa_s = \frac{1}{1+|s|^2}\kappa_0 + \frac{|s|^2}{1+|s|^2}\kappa_\infty, \qquad s \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

に対して適用することにより、κ_0 に関する $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ と κ_1 に関する $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ の一致が示される。こうして、Calabi-Yau 多様体に附随するもう 1 つの自然な Hermite 直線束が得られる。

§3. 2 つの Hermite 直線の比較.

以下、V を $n+1$ 次元 Fano 多様体とする。さらに、反標準束 K_V^{-1} が非常に豊富であると仮定する。(例えば、射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$, 2 次超曲面 Q^{n+1} etc.)

$N = \dim H^0(V, K_V^{-1})$ とし、$H^0(V, K_V^{-1})$ の基底 $\{s_I\}$ を固定する。$a = (a_I)_I$ を $\mathbb{C}^N$ の座標とし、$\mathcal{P} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^N)$ とおけば、$\{a_I\}_I$ は $H^0(\mathcal{P}, \mathcal{O}_\mathcal{P}(1))$ の基底である。自然な射影を

$$\pi\colon \mathcal{P} \times V \to \mathcal{P}, \qquad p\colon \mathcal{P} \times V \to V$$

とする。$\mathcal{P} \times V$ 上の正則直線束 $\mathcal{L}$ を、

$$\mathcal{L} = \pi^*\mathcal{O}_\mathcal{P}(1) \otimes p^* K_V^{-1} \to \mathcal{P} \times V$$

として定める。このとき、$\mathcal{L}$ は自然な切断 $s(a,x)$ を持つ：

$$s(a,x) = \sum_I a_I \otimes s_I(x) \in H^0(\mathcal{P} \times V, \mathcal{L}).$$

$\mathcal{P} \times V$ の超曲面 $\mathcal{X}$ を s の因子として定める：

$$\mathcal{X} := \operatorname{div}(s) = \{([a], x) \in \mathcal{P} \times V;\ s(a,x) = 0\} \subset \mathcal{P} \times V.$$

自然な射影を $\mathcal{X}$ 上に制限することにより、V の反標準因子の普遍族が得られる：

$$\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}.$$

同伴公式により、非特異ファイバー

$$X_a = \{x \in V;\ s(a,x) = \sum_I a_I s_I(x) = 0\}, \qquad [a] \in \mathcal{P}$$

は Calabi-Yau 多様体である。K_V^{-1} の判別式軌跡 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ を以下のように定める：

$$\mathcal{D} = \{[a] \in \mathcal{P};\ \operatorname{Sing} X_a \neq \emptyset\}.$$

射影 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ の臨界軌跡を $\Sigma_\pi = \{x \in \mathcal{X};\ \operatorname{rank} d\pi(x) < \dim \mathcal{P}\}$ で表せば、$\mathcal{D} = \pi(\Sigma_\pi)$ である。判別式軌跡の補集合を $\mathcal{P}^0$ とおく：

$$\mathcal{P}^0 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}.$$

$\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ を $\mathcal{X}$ 上の相対微分の層とし、$\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}} = K_{\mathcal{X}} \otimes \pi^* K_{\mathcal{P}}^{-1}$ を相対標準層とする。このとき、$\pi_* \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ は $\mathcal{P}$ 上の正則直線束である。$\mathcal{P}$ 上の直線束として、以下の等式が成り立つ：

$$\pi_* \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(1).$$

一方、$\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ が $\mathcal{X} \setminus \Sigma_\pi$ 上で局所自由であることから、$\mathcal{P}^0$ 上の正則直線束を次のように定めることができる：

$$\lambda^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) := \bigotimes_{p,q\geq 0} (\det R^q \pi_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})^{(-1)^{p+q}p}.$$

我々は以下に述べるように $\lambda^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ を $\mathcal{P}$ 上の直線束に拡張する：

$\Omega^1_V|_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{L}$ の大域切断 $ds|_{\mathcal{X}}$ を

$$ds|_{\mathcal{X}} := (\nabla s)|_{\mathcal{X}}$$

で定める。ここで、∇ は $\mathcal{L}$ の勝手な接続である。s が $\mathcal{X}$ 上で消えるので、上の定義は接続 ∇ によらない。$ds|_{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X} \setminus \Sigma_\pi$ 上の直線束 $N^*_{\mathcal{X}/(\mathcal{P}\times V)} \otimes \mathcal{L}|_{\mathcal{X}}$ の至る所消えない正則切断である。ただし、$N^*_{\mathcal{X}/(\mathcal{P}\times V)}$ は $\mathcal{X} \setminus \Sigma_\pi \subset (\mathcal{P} \times V) \setminus \Sigma_\pi$ の正則余法束である。

切断 $ds|_{\mathcal{X}}$ を用いると、$\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ を $\mathcal{X} \setminus \Sigma_\pi$ 上で次の完全系列により表すことができる：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{L}^{-1}) \xrightarrow{\otimes ds|_{\mathcal{X}}} \Omega^1_V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{r} \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{P}} \longrightarrow 0.$$

この完全列をつなぎ合わせることにより、以下の完全列 $(***)$ を $\mathcal{X} \setminus \Sigma_\pi$ 上で得る：

(***)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-p} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \Omega^1_V \otimes \mathcal{L}^{-p} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \cdots \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \Omega^p_V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{r} \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}} \longrightarrow 0.$$

この完全列を $\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ の手前で切って得られる $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-加群の複体を $\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ と置く：

$$\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}} : 0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-p} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \Omega^1_V \otimes \mathcal{L}^{-p} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \cdots \xrightarrow{\wedge ds|_{\mathcal{X}}} \Omega^p_V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0.$$

各 $\Omega^{p-i}_V \otimes \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ $(0 \leq i \leq p)$ は $\mathcal{X}$ 全体で定義された局所自由層である。このとき、コホモロジーの行列式を

$$\lambda(\Omega^{p-i}_V \otimes \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) := \bigotimes_{q\geq 0} \{\det R^q \pi_* (\Omega^{p-i}_V \otimes \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}})\}^{(-1)^q}$$

で定めれば、$\lambda(\Omega^{p-i}_V \otimes \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ は $\mathcal{P}$ 上の正則直線束である。そこで、複体 $\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ に対し、そのコホモロジーの行列式 $\lambda(\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ を以下のように定める：

$$\lambda(\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) := \bigotimes_{i=0}^{p} \lambda(\Omega^{p-i}_V \otimes \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{(-1)^i}.$$

明らかに、$\lambda(\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ は $\mathcal{P}$ 全体で定義された正則直線束である。以下の命題により、$\lambda^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ を $\mathcal{P}$ 全体に拡張することができる。

Proposition 8. $\mathcal{P}^0$ 上で、以下の標準的な同型が存在する：

$$\lambda(\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) = \lambda(\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})|_{\mathcal{P}^0}. \quad \square$$

そこで、我々は次のように $\lambda^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ の拡張を定義する：

Definition 9.

$$\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) := \bigotimes_{p\geq 0} \lambda(\mathcal{E}^p_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})^{(-1)^p p}. \quad \square$$

§4. 主結果.

さて、$\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ のファイバーは $H^0(X_a,\Omega^n_{X_a})$ であるから、自然な L^2-計量を持つ。各ファイバーに L^2-計量を入れることにより定まる $\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}$ の Hermite 計量を再び L^2-計量と呼び、$\|\cdot\|_{L^2}$ で表す。$\|\cdot\|_{L^2}$ は $\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}|_{\mathcal{P}^0}$ 上の C^∞-Hermite 計量である。

同様に、$\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ のファイバーは $\lambda(\Omega^\bullet_{X_a})$ であるから、Hermite 計量 $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ を持つ。各ファイバーに $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ を入れることにより定まる $\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ 上の Hermite 計量を再び $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ で表せば、$\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ は $\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})|_{\mathcal{P}^0}$ 上の C^∞-Hermite 計量である。$\|\cdot\|_{L^2}$ と $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ のどちらも $\mathcal{P}$ 上に連続に拡張することはできない。

さて、$\mathcal{P}$ は射影空間であるから、その上の正則直線束は $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(l)$ の形である。$\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(1)$ であるので、$\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})$ の次数を ν とすれば、

$$(*)\qquad \lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})\cong(\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})^{\otimes\nu}.$$

このとき、Riemann-Roch の定理から次数 ν は以下のように与えられる：

$$\nu=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}p(i+1)\,\chi(V,\Omega_V^{p-i}\otimes K_V^{i+1})-\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}pi\chi(V,\Omega_V^{p-i}\otimes K_V^{i}).$$

ただし、$\chi(V,E)$ は V 上のベクトル束 E の Euler 数を表す。

以下、上の同型 $(*)$（定数倍を除いて定まる）を一つ固定する。同一視 $\lambda(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})=(\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})^{\otimes\nu}$ により、$\|\cdot\|^2_{\hat{Q}}/\|\cdot\|^{2\nu}_{L^2}$ は $\mathcal{P}^0$ 上の C^∞-関数である。関数 $\|\cdot\|^2_{\hat{Q}}/\|\cdot\|^{2\nu}_{L^2}$ を記述することが本稿の目標である。

点 $a_0\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ を固定する。さらに、X_{a_0} のみに対数極を持つ V 上の有理標準形式 $\Omega_{a_0}\in H^0(V,\Omega_V^{n+1}(\log X_{a_0}))\setminus\{0\}$ を固定する。同伴公式によれば、このような有理標準形式は定数倍を除き一意的である。各 $a\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ に対し、X_a 上の標準形式 $\eta_a\in H^0(X_a,\Omega^n_{X_a})$ を以下のように定める：

$$\eta_a:=\mathrm{Res}_{X_a}\left(\Omega_{a_0}\cdot\frac{s(a_0,x)}{s(a,x)}\right).$$

ただし、留数は Poincaré の留数である。η_a は $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ への作用に関して不変でないので、$[a]\in\mathcal{P}$ に対しては定義されていない。そこで、$\mathbb{C}^*$-作用を打ち消すために、以下の構成を行う。

$\Delta_V(a)\in\mathbb{C}[a]$ を、因子 $\mathcal{D}$ の定義方程式とする（定数倍を除き一意的）：

$$\mathcal{D}=\mathrm{div}(\Delta_V).$$

$\delta(V)$ を $\Delta_V(a)$ の次数とする。N. Katz の公式によれば、$c(V)=1+c_1(V)+\cdots+c_{n+1}(V)$ を全 Chern 類とするとき、$\delta(V)$ は以下の公式により与えられる：

$$\delta(V)=\deg(\Delta_V)=\int_V\frac{c(V)}{(1+c_1(V))^2}.$$

このとき、$\mathcal{P}^0$ 上の関数 $\|\Delta_V^{1/\delta(V)}\|\in C^\infty(\mathcal{P}^0)$ を

$$\|\Delta_V^{\frac{1}{\delta(V)}}\|([a]):=|\Delta_V(a)|^{\frac{1}{\delta(V)}}\cdot\|\eta_a\|_{L^2}$$

により定めることができる。実際、右辺は $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ への作用に関して不変なので、$\mathcal{P}^0$ 上の関数を与える。$\|\Delta_V^{1/\delta(V)}\|$ は、$\mathcal{P}^0$ 上の至る所で消えない。

最後に、有理数 $I(n)$ を以下のように定める：

$$I(n):=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{12}+\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i p\binom{n+1}{i}\frac{(p-i+1)^{n+2}-(p-i)^{n+2}}{(n+2)!}\right\}.$$

Main Theorem 10. 以下の関係式が成り立つ：

$$\nu = \deg \lambda(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) = I(n)\delta(V) + \frac{\chi_{\mathrm{top}}(X)}{12}.$$

さらに、$\mathcal{P}$ 上の正則直線束の同型 $\lambda(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}) \cong (\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}})^{\otimes\nu}$ を適当に選ぶことにより、以下の $\mathcal{P}^0$ 上の関数の等式が成り立つ：

$$\frac{\|\cdot\|_{\hat{Q}}}{\|\cdot\|_{L^2}^{\otimes\nu}} = \|\Delta_V^{\frac{1}{\delta(V)}}\|^{I(n)}.$$

特に、$\mathcal{P}^0$ 上の *Hermite* 直線束の同型

$$(\lambda(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}), \|\cdot\|_{\hat{Q}}) \cong (\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}, \|\cdot\|_{L^2})^{\otimes\nu} \otimes (\mathcal{O}_{\mathcal{P}}, \|\Delta_V^{\frac{1}{\delta(V)}}\|^{I(n)} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}})$$

が成り立つ。ただし、$\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}$ は自明束 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ 上の自明な計量である。 □

Remark. 計量 $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ はともに自然な $PGL(N,\mathbb{C})$-作用で不変であるから、Theorem 10 により関数 $\|\Delta_V^{1/\delta(V)}\|$ も $PGL(N,\mathbb{C})$-作用で不変である。従って、$\|\Delta_V^{1/\delta(V)}\|$ を商空間 $\mathcal{P}^0/PGL(N,\mathbb{C})$ 上の関数と見なすことができる。 □

Theorem 10 の証明は、以下のカレントの等式を $\mathcal{P}$ 上で示すことに帰着される：

$$c_1(\lambda(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}), \|\cdot\|_{\hat{Q}}) = I(n)\,\delta_{\mathcal{D}} + \frac{\chi_{\mathrm{top}}(X)}{12}\omega_{\mathrm{WP}}, \tag{1}$$

$$-\,dd^c \log\|\Delta^{\frac{1}{\delta(V)}}\|^2 = -\frac{1}{\delta(V)}\delta_{\mathcal{D}} + \omega_{\mathrm{WP}}, \tag{2}$$

$$c_1(\pi_*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{P}}, \|\cdot\|_{L^2}) = \omega_{\mathrm{WP}}. \tag{3}$$

ここで、$\delta_{\mathcal{D}}$ は因子 $\mathcal{D}$ に台を持つ Dirac δ-カレント、ω_{WP} は Weil-Petersson 形式である。(正確には、Weil-Petersson 形式を周期写像により $\mathcal{P}$ に引き戻して得られる $(1,1)$-カレントである。)

(2), (3) は定義から直ちに従う。(1) は Theorem 5 を用いた計算 [BCOV, (5.30)] と $\mathcal{D}$ の近傍で計量 $\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ の特異性を調べることにより示される。$\|\cdot\|_{\hat{Q}}$ の特異性を決定することが技術的に最も困難である。完全列 $(***)$ に対し Quillen 計量のアノマリー公式 [BGS, Th.0.3] を適用することにより、この問題は適当な Bott-Chern 二次特性類の特異性を決定することに帰着する。族 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ に対し、一般の特異ファイバーが高々孤立通常二重点を一つしか持たないことから、Bott-Chern 二次特性類の評価は孤立通常二重点の変形族に対して行えば良いことになる。このように問題を局所化した上で、孤立超曲面特異点に附随する Gauss 写像を経由して、最終的に問題を射影空間上の普遍ベクトル束の Bott-Chern 二次特性類の計算に帰着させる。

§5. Borcherds 積に関連する例.

以下、V として $\mathbb{P}^3$ を考える。このとき、$\delta(V) = 108$ である。$X \in |K_{\mathbb{P}^3}^{-1}|$ は 4 次超曲面であり、従って次数 4 の $K3$ 曲面である。4 次曲面のモジュライ空間は $\mathcal{P}^0/PGL(N,\mathbb{C})$ であり、これは 19 次元 IV 型領域 D_{19}の算術商 D_{19}/Γ_4 のある Zariski 開集合 D_{19}^0/Γ_4 と同一視される。この同一視は以下に述べるように周期写像により与えられる：

U を行列 $U = \left(\begin{smallmatrix} 0&1\\1&0 \end{smallmatrix}\right)$ に附随する双曲型格子、E_8 を負定値 E_8-ルート格子とする。このとき、格子 T を

$$T = U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus \langle -4 \rangle$$

により定める。ここで、$\langle -4\rangle$ は、$\mathbb{Z}$ に内積 $\langle x,y\rangle = -4xy$ を入れて得られる 1 次元格子である。T は符号が $(2,19)$ で階数が 21 の格子である。T 上の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ で表す。

D_{19} を以下の集合とする：

$$D_{19} = \{[x] \in \mathbb{P}(T\otimes\mathbb{C});\ \langle x,x\rangle_T = 0,\ \langle x,\bar{x}\rangle_T > 0\}.$$

$\Delta(T) = \{d \in T;\ \langle d,d\rangle_T = -2\}$ とし、D_{19} の Zariski 開集合 D_{19}^0 を以下のように定める：

$$D_{19}^0 = \{[x] \in D_{19};\ \langle x,\delta\rangle_T \neq 0 \quad \forall\delta \in \Delta(T)\}.$$

D_{19}, D_{19}^0 には算術的群 $\Gamma_4 := O(T)$ が作用し、商空間 D_{19}/Γ_4 および D_{19}^0/Γ_4 は準代数多様体の構造を持つ (Baily-Borel)。このとき、

$$\mathcal{H} = D_{19} \setminus \mathcal{D}_{19}^0$$

は D_{19} の因子である。

$X \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 4 次曲面とする。$H = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ とおけば、$H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^\perp \cong T$ が知られている。従って、$H_2(X,\mathbb{Z})$ の基底を適当に定めることにより、周期写像

$$\varpi\colon \mathcal{P}^0/PGL(N,\mathbb{C}) \ni [X_a] \to \left(\int_\alpha \eta_a\right)_{\alpha\in H_2(X_a,\mathbb{Z})} \in D_{19}^0/\Gamma_4$$

が得られる。ここで、Γ_4 の作用は、H を保つ $H_2(X,\mathbb{Z})$ の基底の変換として現れる。$\varpi(\mathcal{P}^0/PGL(N,\mathbb{C}))$ は D_{19}^0/Γ_4 のある Zariski 開集合であることが知られている (J. Shah)。

さて、上の Remark から、関数 $\|\Delta_{\mathbb{P}^3}^{1/108}\|$ を D_{19}^0/Γ_4 上の関数と同一視できる。この関数を D_{19} 上の Γ_4 に関する保型形式（の Petersson ノルム）として表すことができる。以下、それについて述べ、本稿を終える。

D_7 を D_7-型ルート格子とする。$\gamma \in D_7^\vee/D_7$ に対し、テータ級数 $\theta_{D_7+\gamma}(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{H})$ を $\theta_{D_7+\gamma}(\tau) = \sum_{m\in D_7+\gamma}\exp(\langle m,m\rangle_{D_7}\pi i\tau)$ により定める。さらに群環 $\mathbb{C}[D_7^\vee/D_7]$ に値を取るテータ級数 $\Theta_{D_7}(\tau)$ を、

$$\Theta_{D_7}(\tau) = \sum_{\gamma\in D_7^\vee/D_7} \theta_{D_7+\gamma}(\tau)\,\mathbf{e}_\gamma$$

により定める。ここで、$\{\mathbf{e}_\gamma\}_{\gamma\in D_7^\vee/D_7}$ は $\mathbb{C}[D_7^\vee/D_7]$ の標準基底である。$\Theta_{D_7}(\tau)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の二重被覆 $Mp(2,\mathbb{Z})$ に関する $\mathbb{C}[D_7^\vee/D_7]$-値保型形式である。($Mp(2,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{C}[D_7^\vee/D_7]$ への作用は Weil 表現を考える。) また、$\Delta(\tau)$ を Jacobi の Δ-関数とする。$q = e^{2\pi i\tau}$ とおく。保型性から $\tau = +i\infty$ の近傍で $\Theta_{D_7}(\tau)/\Delta(\tau)$ を以下のように展開することができる：

$$\frac{\Theta_{D_7}(\tau)}{\Delta(\tau)} = \sum_{\gamma\in D_7^\vee/D_7} \mathbf{e}_\gamma \sum_{k\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}} c_\gamma(k)\,q^k.$$

このとき、$c_\gamma(k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $c_\gamma(k) = 0$ $(k < -1)$ が成り立つ。さらに、同一視 $D_7^\vee/D_7 \cong \frac{1}{4}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ が存在し、$c_\gamma(k) = 0$ $(\gamma - k \notin \mathbb{Z})$ である。

双曲型格子 K を、

$$K = U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus \langle -4\rangle$$

により定める。K の光錐を、$C_K = \{v \in K \otimes \mathbb{R};\ \langle v, v\rangle > 0\}$ により定める。U の標準基底を $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$ とすれば、以下の写像により管状領域 $K \otimes \mathbb{R} + iC_K$ と D_{19} は同型である：

$$K \otimes \mathbb{R} + iC_K \ni z \to \mathbf{f} - \frac{\langle z, z\rangle_K}{2}\mathbf{f}' + z \in T \otimes \mathbb{C}.$$

C_K^+ を光錐の連結成分の一つとし、D_{19}^+ を $K \otimes \mathbb{R} + iC_K^+$ に対応する D_{19} の連結成分とする。

Borcherds によれば、K と $\Theta_{D_7}(\tau)/\Delta(\tau)$ から定まる C_K^+ 上の部屋構造 (chamber structure) が存在する。その部屋の一つを W とする。W の双対錐を、

$$W^\vee = \{v \in K \otimes \mathbb{R};\ \langle v, w\rangle > 0,\ \forall w \in W\}$$

により定める。

Theorem 11 [B, Th. 13.3]. K, $\Theta_{D_7}(\tau)/\Delta(\tau)$, および W により定まるベクトル $\rho \in K \otimes \mathbb{Q}$ が存在し、以下の主張が成り立つ：$z \in K \otimes \mathbb{R} + iW$ で定義された無限積

$$\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta) := e^{2\pi i \langle \rho, z\rangle_K} \prod_{\lambda \in K^\vee \cap W^\vee} \left(1 - e^{2\pi i \langle \lambda, z\rangle_K}\right)^{c_\lambda(\langle \lambda, \lambda\rangle_K/2)}$$

は $\langle \mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, z\rangle_K \gg 0$ のとき絶対収束し、D_{19} 上の Γ_4 に関する保型形式に解析接続される。$\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta)$ の重さは、$c_0(0)/2 = 54$ であり、因子 $\mathcal{H}$ に 1 次の零を持つ。(他の因子にも高い次数の零を持つ。) □

$\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta)$ の Petersson ノルムを以下のように定める：

$$\|\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta)\|^2 := \langle \mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, z\rangle^{54} |\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta)|^2.$$

$\|\Psi_T(\cdot, \Theta_{D_7}/\Delta)\|^2$ は D_{19} 上の Γ_4-不変 C^∞-級関数であり、D_{19}/Γ_4 上の関数と同一視される。この同一視の下に、我々は以下の定理を示すことができる：

Theorem 12. $\mathcal{P}^0$ 上の関数として、以下の等式が成り立つ：

$$\|\Delta_V^{\frac{1}{108}}\|^{108} = \mathrm{Const.}\, \varpi^* \|\Psi_T(\cdot, \Theta_{D_7}/\Delta)\|^2. \quad \square$$

右辺が微分方程式 (2) をみたすことを確認することにより、Theorem 12 が示される。自然な射影 $D_{19} \to D_{19}/\Gamma_4$ が因子 $\mathcal{H}$ で二重に分岐すること (保型形式の重さ 54 と $\Delta_{\mathbb{P}^3}$ の次数 108 に関係する)、および $\Psi_T(z, \Theta_{D_7}/\Delta)$ の零因子で周期写像 ϖ による引き戻しが再び $\mathcal{P}$ の因子になるものは $\mathcal{H}$ に限られることが証明の鍵となる。

References

[BCOV]. Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C., *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311-428.

[BGS]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, I,II,III*. Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[B]. Borcherds, R.E., *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*, Invent. Math. **132** (1998), 491-562.

[Y]. Yoshikawa, K.-I., *Calabi-Yau hypersurfaces, discriminants, and Quillen metrics*, (in preparation).