数理解析研究所講究録 1343 巻 2003 年 99-104

Gap modules for certain finite groups

Toshio Sumi (Kyushu University)

ギャップ表現をもつ有限群について

角 俊雄 (九州大学)

1. 序

ディスク上の作用で得られる固定点集合は、Oliver [10] によって、完全に分類されている。とくに、ディスク上に固定点なしで作用する有限群は、オリバー群とよばれる。オリバー群は、部分群の条件によって特徴づけされる (cf. [9])。すなわち、

$$1 \lhd P \lhd H \lhd G$$

で、P, G/H が素数べき位数で、H/P が巡回群であるような、有限群 G の正規部分群の列が存在しないとき、G はオリバー群という。Laitinen-Morimoto [4] は、同変手術理論をもちいて、オリバー群は球面上に 1 点の固定点をもつ作用をもち、かつそのような作用をもつ群はオリバー群に限ることを示した。Pawałowski, Morimoto らは、精力的に球面上の有限群作用で得られる固定点集合について研究を行っている (cf. [6])。

本稿では、G-表現とは、有限群 G が線形に作用する有限次元の実ベクトル空間を表すこととする。ギャップ G-表現が存在する有限群 G を、ギャップ群という。ギャップ G-表現の定義は次章で述べる。

Morimoto [5] は、オリバーギャップ群（オリバー群、かつ、ギャップ群）G に対し、ディスク D 上の G-作用から、$D^G = S^G$, $\dim S^G > 0$ となるような球面 S 上の G-作用が構成できることを示している。オリバー群とギャップ群には依存関係があるわけではない。非可解群は、すべてオリバー群であるのに対し、ギャップ群でない非可解群が無数に存在する。しかし、オリバー群の「ほとんど」の場合、ギャップ群であることが期待される。

ギャップ表現が存在する有限群の条件を、群の条件で書き下すことを目的とする。

2. 主結果

まず、ギャップ G-表現の定義を述べたい。

有限群 G の位数を割るすべての素数のなす集合 $\pi(G)$ を表す。素数 p に対し、G/N が p-群であるような正規部分群 N のうち、位数最小な正規部分群を $O^p(G)$ で表し、p 型のドレス部分群とよぶ。ここでは、自明な群も p-群とよぶことにする。とくに、区別をしたいときは、非自明な p-群といったりする。また 1 も素数べきに含める。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 20C15.
Key words and phrases. gap group, gap module, representation, centralizer.

素数べき位数の G の部分群全体の集合を、$\mathcal{P}(G)$ で表し、あるドレス部分群を部分群にもつような G の部分群全体のなす集合を $\mathcal{L}(G)$ で表す。

$\mathcal{L}(G)$ の部分集合 $\mathcal{L}$ に対し、G-表現 V が、$\mathcal{L}$-free であるとは、$\mathcal{L}$ の元である部分群 L すべてに対し、常に $V^L = \{0\}$ を満たすときにいう。表現 V が、ギャップ G-表現であるとは、$\mathcal{L}(G)$-free であり、かつ、素数べき位数の部分群 P、および、部分群 $H > P$ すべてに対し、

$$\dim V^P - 2\dim V^H > 0$$

が成立するときにいう。

G がギャップ群であるためには、$\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \varnothing$ が成立していなければならない。以降、有限群 G は、$\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \varnothing$ を満たすものだけ考える。Morimoto-Yanagihara [8] は、初めてギャップ群でない非可解群 S_5 が存在することを示した。ちなみに、n 次対称群 S_n $(n \geq 6)$ はギャップ群である (cf. [1])。また、ギャップ群である一般線形群、射影一般線形群、散在型単純群の自己同形群は、完全にわかっている (cf. [12, 13])。

$G = O^2(G)$ のときは、Laitinen-Morimoto [4] が定義した G-表現 $V(G)$

$$V(G) = (\mathbb{R}[G] - \mathbb{R}) - \bigoplus_{p \in \pi(G)} (\mathbb{R}[G] - \mathbb{R})^{O^p(G)}$$

がギャップ G-表現である。そこで、$G \neq O^2(G)$ のときが、問題である。

定理 1 (cf. [13]). $K/O^2(G)$ が非自明な巡回群であるようなすべての G の部分群 K $(> O^2(G))$ がギャップ群であることが、G がギャップ群であるための必要十分条件である。

以降、さらに、G は $G/O^2(G)$ が非自明な巡回群である有限群とする。G_1 を、G の指数 2 である部分群とする。これは一意に決まる。ここで、$G \setminus G_1$ の部分集合をいくつか定義する。$|\pi(C_G(x))| > 1$ である $G \setminus G_1$ の位数 2 べき (> 2) の元 x 全体のなす集合を $E^o_4(G, G_1)$、$|\pi(C_G(x))| > 2$ である $G \setminus G_1$ の位数 2 の元 x 全体のなす集合を $E^o_{2,1}(G, G_1)$、$O^2(C_G(x)) \notin \mathcal{P}(G)$ を満たす $G \setminus G_1$ の位数 2 の元 x 全体のなす集合を $E^o_{2,2}(G, G_1)$ と定める。これらすべての和集合を $E^o(G, G_1)$ と書く。

$$E^o(G, G_1) = E_4(G, G_1) \cup E^o_{2,1}(G, G_1) \cup E^o_{2,2}(G, G_1)$$

とくに、$G_1 \neq O^2(G)$ ならば、$E^o_{2,1}(G, G_1) = E^o_{2,2}(G, G_1) = \varnothing$ である。

さて、G の正規部分群列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_r = O^2(G)$$

$([G_j : G_{j+1}] = 2, j = 0, 1, \ldots, r-1)$ を考える。このとき、次が成立する。

主定理. G がギャップ群であることと、$E^o(G_0, G_1) \neq \varnothing$, $E^o(G_{r-1}, G_r) \neq \varnothing$ が成立することは同値である。

3. 証明の概略

この章では、主定理の証明の概略を簡単に述べる。

G の元 x に対し、$O^q(N) \neq N, x \in N$ を満たす G の部分群 N が存在するような奇素数 q 全体のなす集合を $\psi(x)$ と表す。$|\psi(x)| > 0$ である $G \setminus G_1$ の位数2べき (> 2) の元 x 全体のなす集合を $E_4(G, G_1)$、$|\psi(x)| > 1$ である $G \setminus G_1$ の位数2の元 x 全体のなす集合を $E_{2,1}(G, G_1)$、$|\pi(C_G(x))| = |\pi(O^2(C_G(x)))| = 2$ を満たす $G \setminus G_1$ の位数2の元 x 全体のなす集合を $E_{2,2}(G, G_1)$ と定める。これらすべての和集合

$$E_4(G, G_1) \cup E_{2,1}(G, G_1) \cup E_{2,2}(G, G_1)$$

を $E(G, G_1)$ と書くと、

$$E^o(G, G_1) \subseteq E(G, G_1)$$

が成立する。

定理 2 (cf. [13]). 素数べき位数の部分群 P および、部分群 $H > P$ すべてに対し、

$$\dim\,(\mathrm{Ind}_{G_j}^{G} W)^P - 2\dim\,(\mathrm{Ind}_{G_j}^{G} W)^H \geq 0$$

が成立し、とくに、$H \setminus P$ が $E(G_j, G_{j+1})$ と交われば、

$$\dim\,(\mathrm{Ind}_{G_j}^{G} W)^P - 2\dim\,(\mathrm{Ind}_{G_j}^{G} W)^H > 0$$

が成立するような、$\mathcal{L}(G_j)$-*free* G_j-表現 W が存在する。

この G_j-表現 W は、ある部分群たち $N < G_j$ に対し、Morimoto-Laitinen が定義した N-表現 $V(N)$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_N^{G_j} V(N)$ の直和として得られる。$\mathrm{Ind}_{G_j}^{G} W$ は、$\mathcal{L}(G)$-free であることに注意する。

$E^o(G_0, G_1) \neq \emptyset$ ならば、$E^o(G_j, G_{j+1}) \neq \emptyset, j = 1, 2, \ldots, r-1$ が成立することは容易にわかる。

問題 1. $E^o(G_0, G_1) \neq \emptyset$ ならば $E^o(G_{r-1}, G_r) \neq \emptyset$ は成立するか？

Proposition 3.1 [7] により、G がギャップ群であれば、$G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}$ もギャップ群である。よって、主定理は、次の定理から導かれる。

定理 3. $j+1 \neq r$ ならば、G_{j+1} はギャップ群であると仮定する。このとき、G_j がギャップ群であることと、$E^o(G_j, G_{j+1}) \neq \emptyset$ であることは同値である。

証明. $j+1 \neq r$ のとき、Z を ギャップ G_{j+1}-表現とし、$j+1 = r$ のとき、$Z = V(O^2(G))$ とする。$U = \mathrm{Ind}_{G_{j+1}}^{G_j} Z$ とおく。W を定理2の G_j-表現とする。C_k $(k \in I)$ を $C_k G_{j+1} = G_j$ なる巡回群 C_k の共役類の代表系とする。I の部分集合 I_0, I_1 をそれぞれ、$C_k \cap E(G_j, G_{j+1}) = \emptyset$ なる $k \in I$ 全体のなす集合、C_k が 2-群である $k \in I_0$ 全体のなす集合とする。$k \in I$ に対し、$s_k = |N_G(C_k)/C_k|$ とおき、また、$m = \prod_{k \in I_1} s_k$ とする。

$E(G_j, G_{j+1}) \neq \emptyset$ の下で、十分大きな整数 n に対して、

$$\bigoplus_{k\in I_1} m s_k{}^{-1} \left(\mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j}(\mathbb{R}[C_k]-\mathbb{R})\right)_{\mathcal{L}(G_j)} \oplus n \left(\bigoplus_{k\in I_0 \smallsetminus I_1} \mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j} V(C_k) \oplus U \oplus W \oplus V(G)\right)$$

はギャップ G_j-表現であることを示すことができる。ここで、$\left(\mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j}(\mathbb{R}[C_k]-\mathbb{R})\right)_{\mathcal{L}(G_j)}$ は $\mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j}(\mathbb{R}[C_k]-\mathbb{R})$ の最大 $\mathcal{L}(G_j)$-free G_j-部分表現である (cf. [7])。

逆に、$E^o(G_j, G_{j+1}) = \emptyset$ としよう。ギャップ G_j-表現 V が存在したとして矛盾を導く。ある有理数 n_k, q、非自明な C_k-表現 ξ_k、G_{j+1}-表現 η $(k \in I)$ で、

$$V = \sum_{k\in I} n_k \,\mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j} \xi_k \oplus q\, \mathrm{Ind}_{G_{j+1}}^{G_j} \eta$$

と表すことができる。$\mathcal{F} = \{O^2(G_j)\}$ とする。G_j-表現 X に対し、$X_{\mathcal{F}}$ で X の最大 $\mathcal{F}$-free G_j-部分表現を表す。V は $\mathcal{F}$-free であるから、

$$V = \sum_{k\in I} n_k \,(\mathrm{Ind}_{C_k}^{G_j} \xi_k)_{\mathcal{F}} \oplus q\, (\mathrm{Ind}_{G_{j+1}}^{G_j} \eta)_{\mathcal{F}}$$

が成立する。G_j のシロー 2-部分群 S をとる。各 $k \in I_1$ に対し、$C_k \leq S$ と仮定してよい。各 $k \in I_1$ に対し、$t_k = \dfrac{|N_S(C_k)|}{|C_k|}$, $P_k = O^2(N_G(C_k))(K \cap C_k)$, $H_k = O^2(N_G(C_k))C_k$ とおくと、P_k は素数べき位数であり、$H_k > P_k$ で、

$$\sum_{k\in I_1} t_k^{-1} \left(\dim V^{P_k} - 2\dim V^{H_k}\right) = \sum_{k\in I_1} m_i \left(1 - \sum_{k\in I_1} t_k^{-1}\right) \tag{4}$$

と計算できる。V はギャップ G_j-表現としているので、この値 (4) は正であるはずである。一方、条件 $E^o(G_j, G_{j+1}) = \emptyset$ から、$S \smallsetminus G_{j+1}$ の元が、G_j で共役ならば、S でも共役であることが得られる。よって、$\sum_{k\in I_1} t_k^{-1} = 1$ が成立し、(4) の値は 0 である。これは、矛盾である。 □

定理 3 の証明から、次が得られる。

命題 5. $j+1 \neq r$ ならば、G_{j+1} はギャップ群であると仮定する。このとき、次が成立する。

$$E(G_j, G_{j+1}) \neq \emptyset \iff E^o(G_j, G_{j+1}) \neq \emptyset$$

定理 6. G がギャップ群でないとき、ある j に対し、$S \smallsetminus G_{j+1}$ の元が G_j で共役ならば S でも共役であり、かつそのときに限る。ただし、S は G_j のシロー 2-部分群とする。

4. 応用

この章でも、G は、$\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \emptyset$ をみたし、かつ、$G/O^2(G)$ は非自明巡回群である有限群とする。

もし、p 型のドレス部分群 $O^p(G)$ が G と一致していない奇素数 p が少なくとも 2 つ以上存在すれば、$V(G)$ はギャップ G-表現であることが知られており、G はギャップ

群である。$O^p(G) \neq G$ なる奇素数 p が唯1つである場合を考察する。定理 1 より、$G \geq F > O^2(G)$, $[F : O^2(G)] = 2$ なる群 F がすべてギャップ群であれば、G はギャップ群である。すなわち、そのような群 F に対して、$E(F, O^2(F)) \neq \emptyset$ が成立するかを考察すればよい（命題 5 参照のこと）。この F に関しても、$O^p(F) \neq F$ が成立しているので、$E \setminus O^2(F)$ の 2 べき位数 (> 2) の元があれば、$E(F, O^2(F)) \neq \emptyset$ が成立する。もし、F がギャップ群でなければ、F のシロー 2-部分群 F_2 に対し、$F_2 \setminus O^2(F)$ の元の位数はすべて 2 でなければならないし、特に、$F_2 \cap O^2(F)$ は可換群でなければならない。非常に特殊な状況である。

移送定理 (cf. [3]) を適用することによって、次を得る。

定理 7. F を $[F : O^2(F)] = 2$ なる有限群（$O^p(F) \neq F$ なる奇素数 p が存在しなくてもよい）、F_2 を F のシロー 2-部分群とする。F_2 が $F_2 \setminus O^2(F)$ の位数 2 の元たちで生成され、かつ、$O^2(F)$ が偶数位数であれば、F はギャップ群である。

系 8. $O^p(G) \neq G$ なる奇素数 p が唯 1 つ存在すると仮定する。$O^2(G)$ が偶数位数であれば（例えば、G は非可解群）、G はギャップ群である。

$[F : \cap_{p \in \pi(G)} O^p(F)] = 2$ なる有限群 F に関しては、はるかに難しいように思える。ソフトウェア GAP [2] を用いて調べると、

$$[F : \cap_{p \in \pi(G)} O^p(F)] = 2$$

を満たす非可解群 F で、ギャップ群でない群は、位数 1919 までに、20 個も存在している：$S_5, C_2 \ltimes S_5, PGL(2,7), (A_5 \times C_3) \ltimes C_2, (A_5 \times C_5) \ltimes C_2, C_2 \ltimes PGL(2,7), PGL(2,9)$, など

[order, Idgroup]= [120,34], [240,90], [336,208], [360,120], [600,145],
[672,1044], [720,415], [720,764], [720,765], [840,136],
[1008,881], [1080,262], [1080,488], [1200,477], [1320,136],
[1440,4593],[1560,146], [1680,403], [1680,924], [1800,558]

例： GAP において、S_5 は、SmallGroup([120,34]) で得られる。

問題 2. $\mathcal{P}(F) \cap \mathcal{L}(F) = \emptyset$, $[F : \cap_{p \in \pi(G)} O^p(F)] = 2$ を満たすが、ギャップ群でない群を F とする。中心化群 $C_G(x)$ が 2-群でないような $F \setminus O^2(F)$ の位数 2 の元 x の共役類の個数は 1 以下か？

条件「$C_G(x)$ が 2-群でない」を除くと、反例がある。

References

[1] Dovermann, K. H. and Herzog, M., *Gap conditions for representations of symmetric groups*, J. Pure Appl. Algebra **119** (1997), 113–137.

[2] GAP – Groups, Algorithms and Programming, http://www.gap-system.org/

[3] D. Gorenstein, *Finite groups*, Chelsea public company, New York, N. Y., 1980.

[4] E. Laitinen and M. Morimoto, *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.

[5] M. Morimoto, *Deleting-inserting theorems of fixed point manifolds*, K-theory **15** (1998), 13–32.

[6] ______ and K. Pawałowski, *Smooth actions of finite Oliver groups on spheres*, to appear in Topology.

[7] ______, T. Sumi and M. Yanagihara, *Finite groups possessing gap modules*, Contemp. Math. **258** (2000), 329–342.

[8] ______ and M. Yanagihara, *The gap condition for S_5 and GAP programs*, Jour. Fac. Env. Sci. Tech., Okayama Univ. **1** (1996), 1–13.

[9] R. Oliver, *Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.

[10] ______, *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces*, Topology **35** (1996), 583–615.

[11] T. Sumi, *Gap modules for direct product groups*, Jour. Math. Soc. Japan **53** (2001), 975–990.

[12] T. Sumi, *Nonsolvable general linear groups are gap groups*, 新しい観点からみた変換群論, 短期共同研究報告集, 数理解析研究所講究録 **1290**, 京都大学数理解析研究所, (2002), 31–41.

[13] ______, *Gap modules for semidirect product groups*, to appear.

FACULTY OF DESIGN, KYUSHU UNIVERSITY, SHIOBARU 4-9-1, FUKUOKA, 815-8540, JAPAN
E-mail address: `sumi@design.kyushu-u.ac.jp`