経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

VaR のバイアスと内挿・外挿による修正

乾　　孝　治

I　はじめに

Value-at-Risk（VaR）は金融機関で標準的に利用されているリスク尺度である。VaR は，通常 $\alpha=1\%$ もしくは5％の確率で起こりえる最大の損失額を表す統計量として，対象となるポートフォリオの損益分布の α ％分位点で与えられる。VaR の推定方法は，分散共分散法，ヒストリカル法，モンテカルロ法などに分類されることが多い。

分散共分散法は，通常，対象資産の収益率分布が正規分布に従うと仮定するため，経験的に知られている損益分布の裾野の厚み（ファットテール）をうまく捉えられないという問題が指摘されている。事実，Platen and Stahl［2003］は世界中の代表的な株式や債券の指数収益率は正規分布よりも裾野が厚い t 分布で良く近似できるという実証結果を示している。実務家の間では，1997年のアジア通貨危機や1998年のLTCM 破綻において分散共分散法で推定した VaR によるリスク管理がうまく機能しなかったことの反省から，以下に示す正規分布を仮定しないヒストリカル法やモンテカルロ法を採用する動きが加速した。

モンテカルロ法は，損益の確率分布もしくは確率過程モデルを仮定した上で，過去データからパラメータを推定し，モンテカルロシミュレーションにより将来の損益分布（シナリオ）を作成して VaR を求める方法である。Pant and Chang［2001］は収益率が t 分布に従う場合のみならず，混合正規分布と確率ボラティリティモデルに従う場合についても研究し，従来の正規分布の場合とは結果が大きくことなることを実証した。モンテカルロ法は，モデルが正しければ漸近的に真の分布に収束することが期待できるため，シナリオの数を十分多くすれば正しい VaR を安定的に計算できる。しかし，計算時間がかかる上に，モデルが複雑になるとパラメータ推定が難しいこと，推定誤差も拡大するなどの問題がある。

ヒストリカル法は，過去データが独立で同一な分布（IID）に従うサンプルと見なして求めた経験分布から VaR を求める方法である。この方法の優れている点は，分布に特定の仮定をしないことで，経験的に知られているファットテールの影響を直接反映できることである。しかし経験分布は離散的であるため，十分長期のサンプルを確保しないと良い推定量が得られない一方で，期間が長すぎると同一分布という仮定に反する可能性が高くなるというトレードオフの関係がある。そのため，どのくらいのデータ期間を採用すべきかが重要な判断となる。一方，ノンパラメトリックな分位点推定方法（経験分布の平滑化法）を適用して，少ないデータ数における推定量の安定性を高めようとする研究がある。Mausser［2001］は順序統計量の線形結合であるＬ統計量の中で，Harrell-Davis 統計量が頑健な VaR 推定値を与えることを示した。なお，Sheather and Marron［1990］が指摘したとおり，Harrell-Davis 統計量はブートストラップ法の解析解に対応しているという関係がある。

Inui, Kijima and Kitano［2003］は，正規分布や t 分布のような裾野が凸である損益分布において，ヒストリカル法で推定した VaR（以下 HS-VaR）が，裾野が厚いほど，経験分布のサンプル数が少ないほど過大評価される（正のバイアスが生じる）ことを示した。また，Harrell-

Davis 統計量を利用すると，場合によってはそのバイアスを拡大するリスクがあることも示した。このような指摘は，実際の資産収益率が t 分布で良く近似できるという実証研究と照らし合わせると，実務で利用されている HS-VaR が過大評価されている可能性を示唆するものである。しかし，Hendricks [1996] が為替ポートフォリオに関する研究で示したとおり，ヒストリカル法で推定した VaR は過小評価になる傾向があるという指摘もある。

本稿では，まず Inui, Kijima and Kitano [2003] が指摘した HS-VaR の正のバイアスを修正し，より正確な VaR を推定するための方法として，内挿法と外挿法の2つの方法を提案し効果を検証する。次にこの方法を実際の株式や為替の損益分布に当てはめた場合の効果を調べた上で，なぜ，実際の資産収益率データにおいては HS-VaR が過大評価されないかを考察する。

II 準　備

本稿では，確率空間を (Ω, F, P) に固定し，実数値確率変数 X をある一定期間におけるポートフォリオの損益額とする。X の分布関数を $F_X(x)=P\{X\leq x\}$, $x\in\mathbf{R}$ とする。単純化のため，$F_X(x)$ は連続で密度関数が $f(x)>0$, $x\in\mathbf{R}$ であるとする。すなわち，$F_X(x)$ は狭義増加関数であり逆関数 $F_X^{-1}(x)$, $0<x<1$ を定義することができる。

定義 1（α 分位点と VaR） α, $0<\alpha<1$ について，$F_X(x)$ の α 分位点は，

$$F_X^{-1}(\alpha)=\inf\{x\mid F_X(x)\geq\alpha\} \qquad (1)$$

で与えられる。このとき，$100(1-\alpha)\%$ の信頼水準の VaR は次のとおり。

$$\mathrm{VaR}_{(1-\alpha)}=-F_X^{-1}(\alpha)=-\inf\{x\mid F_X(x)\geq\alpha\} \qquad (2)$$

VaR は α の可能性で発生し得る最大損失額として定義される。(2)式にマイナスの符号がついているのは，通常，負値を示す損失額にマイナスをつけることで正値として VaR を計測するためである。

さて，確率変数 X の n 個のサンプルを X_1, $X_2\cdots X_n$ とする。これらは同じ分布関数 $F_X(x)$ に従う IID サンプルであると仮定する。このサンプルを昇順にならべた順序統計量を $X_{i:n}$, $i=1,\cdots,n$, $X_{1:n}\leq X_{2:n},\cdots X_{n:n}$ とする。

定義 2（経験分布） X_1, $X_2\cdots X_n$ による経験分布関数は，

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{\{x>X_i\}} \qquad (3)$$

である。ただし，1_A は事象 A に関する指標関数であり，A が真のときに $1_A=1$ となる。

VaR は分布関数の逆関数で定義されたが，経験分布関数は狭義増加関数でないために逆関数を定義できない。そこで逆関数に代わるものとして，LEDV (Lower Empirical Distribution Value) と UEDV (Upper Empirical Distribution Value) を次のとおり定義する。

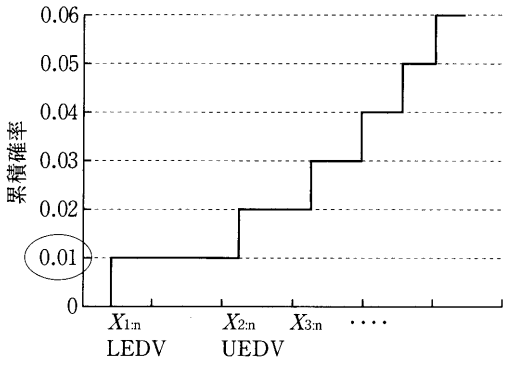
定義 3（LEDV と UEDV） α, $0<\alpha<1$ および X_1, $X_2\cdots X_n$ について，LEDV と UEDV を次のとおり定める。

$$\mathrm{LEDV}: F_n^{\uparrow}(\alpha)=\inf\{x\mid F_n(x)\geq\alpha\}=X_{k:n},\quad \frac{k-1}{n}<\alpha\leq\frac{k}{n}, \qquad (4)$$

$$\mathrm{UEDV}: F_n^{\downarrow}(\alpha)=\sup\{x\mid F_n(x)\geq\alpha\}=X_{k:n},\quad \frac{k-1}{n}\leq\alpha<\frac{k}{n}. \qquad (5)$$

$n\alpha$ が整数でないとき，すなわち $\frac{k-1}{n}<\alpha<\frac{k}{n}$ の場合には，LEDV と UEDV は共に $X_{n\alpha:n}$ に一致するが，$n\alpha$ が整数の場合には，LEDV は $X_{n\alpha:n}$，UEDV は $X_{n\alpha+1:n}$ になる。例えば，サンプル数 $n=100$，$\alpha=0.01$ の場合には $n\alpha=1$ は整数なので，LEDV$=X_{1:n}$，UEDV$=X_{2:n}$ となる（第1図を参照せよ）。定義から明らかなように LEDV≤UEDV の関係が常に成立する。HS-VaR は保守的な観点から，通常 LEDV で定義されるが，UEDV による定義も

第1図　経験分布と LEDV, UEDV
（サンプル数 $n=100$）



注：$n=100$ なので $\alpha=0.01$ の場合，LEDV $=X_{1:n}$，UEDV は $X_{2:n}$ となる。

可能である。

定義 4（HS-VaR 推定量）信頼水準 $(1-\alpha)$ %およびサンプル $X_1, X_2 \cdots X_n$ が与えられている場合，ヒストリカル法による VaR 推定量は，

$$\text{HS-VaR}_{(1-\alpha)}=-F_n^{\uparrow}(\alpha)=-X_{k:n},$$
$$\text{where } \frac{k-1}{n}<\alpha\leq\frac{k}{n}, \tag{6}$$

で与えられる。特に $n\alpha$ が整数の場合には，$\text{HS-VaR}_{(1-\alpha)}=-X_{n\alpha:n}$ である。

これまでの議論で明らかなように，$F_n(x)$ は，$F_X(x)$ に従う IID サンプルで構成された経験分布なので，$n\to\infty$ のときに $F_X(x)$ に収束する。したがって，LEDV $(F_n^{\uparrow}(x))$ および UEDV $(F_n^{\downarrow}(x))$ もまた $n\to\infty$ のときに $F_X^{-1}(x)$ に収束する。ただし，LEDV は下から，UEDV は上から $F_X^{-1}(x)$ に収束する。すなわち，サンプル数が少ない場合，LEDV に下方バイアスが生じるため，符号が逆の HS-VaR は過大評価されることになる。また，バイアスの程度は分布の凸性に依存する。なお，HS-VaR のバイアスに関するより厳密な議論については，Inui, Kijima and Kitano [2003] を参照せよ。

III　内挿と外挿による Var の推定

1　内挿方法

Harrell and Davis [1982] が新しい分位点推定量を提案した論文で比較対象の基準とした推定量は，それまで広く使われてきたもので次のような推定量である。

$$T_p=(1-g)X_{k:n}+gX_{k+1:n} \tag{7}$$

ただし，$(n+1)p=k+g$ で k は $(n+1)p$ を超えない最大の整数である。これは，2つの順序統計量の線形結合で表された内挿方法であり L 統計量の一つである。例えば，$p=0.5$，$n=100$ の場合には $k=50$，$g=0.5$ で，$T_{0.5}=0.5X_{50:100}+0.5X_{51:100}$ となるが，$p=0.01$，$n=100$ の場合には $k=1$，$g=0.01$ で $T_{0.01}=0.99X_{1:100}+0.01X_{2:100}$ となる。後者の場合は，HS-VaR を与える LEDV $=X_{1:100}$ との違いは僅かであり，VaR のバイアスを修正する効果は期待できない。

新たな VaR 推定量として，次のような L 推定量を定義する。

定義 5（内挿による VaR 推定量：IN-VaR）$100(1-\alpha)$%の信頼水準の VaR を与える L 統計量として，内挿による推定量を，

$$\text{IN-VaR}_{(1-\alpha)}=\frac{1}{2}[(1-g)X_{k:n}+X_{k+1:n}+gX_{k+2:n}] \tag{8}$$

の通り定義する。ただし，$n\alpha=k+g$ で k は $n\alpha$ を超えない最大の整数である。

例えば，$\alpha=0.5$, $n=100$ の場合，$\text{IN}-\text{VaR}_{0.5}=\frac{1}{2}[X_{50:100}+X_{51:100}]$ となり，(7) の推定量 T_p の場合と一致する。一方，$p=0.01$, $n=100$ の場合には $\text{IN}-\text{VaR}_{(1-\alpha)}=\frac{1}{2}[X_{1:100}+X_{2:100}]$ となり，$n\alpha$ が整数の場合に LEDV と UEDV の平均値を与える統計量として定義されている。

2　外挿方法

外挿方法とは，ある値に収束する列 $\{s_m\}$ を，それよりも早く同じ値に収束する列 $\{t_m\}$ へ変換する方法である。金融分野では Geske and Johnson [1984] がアメリカンプットオプションの評価に Richardson の外挿法を適用し，よい推定結果を得たという報告がある。

Richardson の外挿法とは次のようなものである。$\{s_m\}$ を s に収束する列とする。ある条件を満たす適当な $\{x_m\}$ および t と a_i に関する連立方程式，

$$s_{m+i}=t+a_1x_{m+i}+a_2x_{m+i}^2+\cdots+a_kx_{m+i}^k,\quad i=0,1,\cdots,k \tag{9}$$

を考える。クラーメルの公式により，

$$t=t_m^{(k)}=\frac{\begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{m+k} \\ x_m & x_{m+1} & \cdots & x_{m+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^k & x_{m+1}^k & \cdots & x_{m+k}^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_m & x_{m+1} & \cdots & x_{m+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^k & x_{m+1}^k & \cdots & x_{m+k}^k \end{vmatrix}},\ m=1,2,\cdots \tag{10}$$

が得られる。これにより得られる新しい列 $\{t_m^{(k)}\}$ は，$\{t_m^{(0)}\}=\{s_m\}$ で，$\{t_m^{(k)}\}$ よりも $\{t_m^{(k+1)}\}$ が s に早く収束する。例えば，$x_m=1/m$，$k=2$ とした場合，

$$t_1^{(2)}=\frac{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/4 & 1/9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/4 & 1/9 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}s_1-4s_2+\frac{9}{2}s_3 \tag{11}$$

となる。同様に，$k=1$, $m=1, 2$ の場合について計算すると次の通りである。

$$\begin{cases} t_1^{(1)}=-s_1+2s_2 \\ t_2^{(1)}=-2s_2+3s_3 \end{cases} \tag{12}$$

さて，損益分布が t 分布等の裾野が凸を満たす分布の場合，HS-VaR 推定量のバイアスは，サンプル数が少ないほど大きいが，サンプル数を無限大にすれば消失する。そこで，サンプル数を $n=N, 2N, \cdots, mN$, $m=1, 2, \cdots$ のとおり増やしながら求めた VaR の列 $\{\mathrm{VaR}_{(1-\alpha)}^{iN}\}$, $i=1, 2, \cdots m$ について Richardson の外挿法を適用して VaR 推定量を得る方法を次ぎの通り定義する。

定義 6（外挿による VaR 推定量：EX-VaR）Richardson の外挿法により求めた VaR を EX-VaR とする。具体的な計算方法は次章のシミュレーション方法において示す。

IV　シミュレーション方法

Huisman et al. [1998], Pant and Chang [2001], Heikkinen and Kanto [2002] はポートフォリオの損益分布が t 分布に従う場合の VaR の研究を行っているが，これらの先行研究では t 分布の自由度を 4 から 6 としてしている。本稿では，損益分布が t 分布と正規分布に従う場合についてシミュレーションを行うが，より裾野が厚い場合についても調べたいという動機から，t 分布の自由度（DF）は 3，4 および 5 を仮定する（t 分布は自由度が小さいほど分布の裾野が厚くなる傾向がある）。また，VaR の信頼水準は99％とする。シミュレーションの手順は次の通りである。

1）300サンプルの乱数を発生させて経験分布を 1 つ定める
2）HS-VaR および IN-VaR をそれぞれの定義（(6)式と(8)式）に従って求める
3）1)で求めた経験分布からランダムに（重複しないように）抽出した100サンプルで作った経験分布について HS-VaR を求める。これは(11)，(12)式における s_1 に対応する。
4）さらに100サンプルをランダムに（重複しないように）抽出し，3)で抽出したサンプルと合わせて200サンプルの経験分布を

作り，HS-VaR 求める。これは(11)，(12)式における s_2 に対応する。

5) 2)で求めた300サンプルの HS-VaR を(11)，(12)式における s_3 とみなし，$\{s_i\}$，$i=1, 2, 3$ について Richardson の外挿法を適用して EX-VaR を求める。なお，外挿式としては(11)および(12)式で示した $t_1^{(2)}, t_1^{(1)}, t_2^{(1)}$ の3つが考えられるので，それぞれに対応する EX-VaR を求める。

6) UEDV で定義した HS-VaR についても2)から5)の手続きを当てはめて EX-VaR を計算する。

7) 2)から6)の手続きを5000回繰り返して行い，求めた HS-VaR，IN-VaR および EX-VaR の平均値や二乗平均誤差等を計測する。

V　シミュレーション結果

第1表にシミュレーション結果を示した。表中の「$\text{EX-VaR}_{\text{L}}^{km}$」における添え字「L」は，LEDV に外挿を適用して得た VaR であることを表している（「U」は UEDV)。また「km」は(10)式の $t_m^{(k)}$ における k, m に対応している。「Mean」は推定量の平均値，「Bias」は真の VaR からのバイアス，「MSE」はバイアスの標準偏差を表している。「Efficiency」は各推定量の HS-VaR に対する相対的な安定性を評価するために，それぞれの推定量の MSE と HS-VaR の MSE の比率として示した。1より大きければ HS-VaR よりも安定した推定量であることを意味する。

結果を見ると，まず，HS-VaR は正のバイアスがあり，分布の裾野が最も厚い DF＝3の t 分布が最も大きいことが確認できる。

IN-VaR の結果を見ると，バイアスは1％台にまで縮小しており，さらに Efficiency も1を超えるなど，HS-VaR よりも正しい結果を与えることが確認できる。

EX-VaR は，いずれも HS-VaR よりもバイアスが減少しているものの，LEDV に外挿を適用したケースについては全般的に修正の効果は低く，Efficiency が悪化する傾向が目立つ。一方，UEDV に外挿を適用したケースはいずれもバイアスが1％未満にまで減少し，特に $\text{EX-VaR}_{\text{U}}^{11}$ は最も高い Efficiency を示している。

UEDV に外挿を適用したケースの方が LEDV のそれよりも良い結果を与える理由は，次のように説明可能である。すなわち，外挿が適用される VaR の列は，LEDV の場合 $\{-X_{1:100}, -X_{2:200}, -X_{3:300}\}$ で与えられるが，UEDV の場合は $\{-X_{2:100}, -X_{3:200}, -X_{4:300}\}$ で与えられるという違いがある。これらの内で第1番目の順序統計量 $X_{1:100}$ の分散が最も大きいため，LEDV に外挿を適用した結果の方が大きな分散を示すことになるのである。

また，$\{-X_{2:100}, -X_{3:200}\}$ に外挿を適用して得られる $\text{EX-VaR}_{\text{U}}^{11}$ が，$\{-X_{3:200}, -X_{4:300}\}$ に外挿を適用した $\text{EX-VaR}_{\text{U}}^{12}$ や $\{-X_{2:100}, -X_{3:200}, -X_{4:300}\}$ に適用した $\text{EX-VaR}_{\text{U}}^{21}$ に比べて高い効率性を示している理由は，重複を許さないサンプリングを行っている結果，サンプルに大きなはずれ値が含まれている場合に，$-X_{4:300}$ がその特殊性の影響を強く反映してしまい，外挿がその特殊性を拡大するためと考えられる。重複を許すサンプリングにすれば，オリジナルサンプルの特殊性を緩和することができるが，その場合には再サンプルされた集団の分散がオリジナルよりも小さくなるために，分布の裾野に関する推定を行うケースでは予期しない影響を被る可能性があるので，今回の分析には適切でないと判断し採用しなかった。

VI　実際の資産データによる VaR の推定

円ドルレート（1987/3/22～2003/1/8，3406個），日経平均株価（1975/1/4～2003/1/8，7403個）の日次収益率データを使って HS-VaR と，外挿法で最も正確な推定量であった $\text{EX-VaR}_{\text{U}}^{11}$ を計算しアウトオブサンプルのパフォーマンスを調べた。具体的には，当日の収益率が前日までの300サンプルで求めた信頼水準99％の VaR を超える頻度を計測した。VaR が正しく推計されていれば，超過頻度は1％前後にな

第1表　VaR の推定結果

		HS-VaR	IN-VaR	EX-VaR$_L^{11}$	EX-VaR$_L^{12}$	EX-VaR$_L^{21}$	EX-VaR$_U^{11}$	EX-VaR$_U^{12}$	EX-VaR$_U^{21}$
Normal	Mean	2.392	2.329	2.326	2.331	2.334	2.319	2.324	2.327
	MSE	0.241	0.212	0.255	0.325	0.419	0.216	0.278	0.330
	Bias (%)	2.46	0.10	0.00	0.18	0.27	−0.29	−0.08	0.02
	Efficiency	1.00	1.14	0.94	0.74	0.57	1.12	0.87	0.73
t (DF=5)	Mean	3.585	3.419	3.294	3.394	3.444	3.358	3.362	3.363
	MSE	0.681	0.554	0.792	0.916	1.232	0.532	0.684	0.829
	Bias (%)	4.93	1.21	−1.59	0.65	1.77	−0.16	−0.08	−0.04
	Efficiency	1.00	1.23	0.86	0.74	0.55	1.28	1.00	0.82
t (DF=4)	Mean	4.001	3.800	3.596	3.668	3.705	3.711	3.733	3.745
	MSE	0.820	0.667	1.041	1.164	1.643	0.644	0.850	1.040
	Bias (%)	4.86	1.02	−2.90	−1.51	−0.81	−0.69	−0.26	−0.05
	Efficiency	1.00	1.23	0.79	0.70	0.50	1.27	0.96	0.79
t (DF=3)	Mean	4.962	4.651	4.234	4.434	4.533	4.501	4.475	4.462
	MSE	1.265	0.975	1.867	1.750	2.484	0.915	1.154	1.424
	Bias (%)	6.01	1.57	−4.37	−1.53	−0.11	−0.57	−0.94	−1.12
	Efficiency	1.00	1.30	0.68	0.72	0.51	1.38	1.10	0.89

注：HS-VaR：ヒストリカル法により求めた VaR。
IN-VaR：内挿により求めた VaR。
X-VaR$_L^{km}$：外挿により求めた VaR。添え字の 'L' は LEDV の意味，'U' は UEDV の意味。'km' は（10）式における k, m に対応。

第2表　円ドルおよび日経平均の VaR 計測

		HS-VaR	EX-VaR$_U^{11}$
円ドル	計測数	3105	3105
	VaR を超過した日数	32	41
	超過率	1.03%	1.32%
日経平均	計測数	7122	7122
	VaR を超過した日数	87	113
	超過率	1.22%	1.59%

注：超過率は「VaR を超過した日数」を「計測数」で割って求めた。

るはずである。

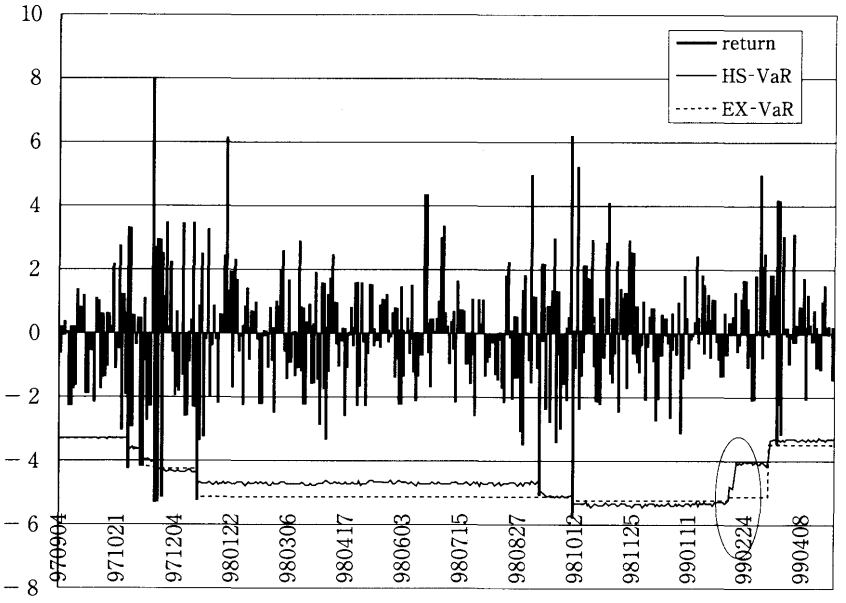
結果は第2表に示した。円ドルレート，日経平均のいずれにおいても，実際の収益率が1％以上の頻度で HS-VaR と EX-VaR$_U^{11}$ を超えている。つまり，どちらの VaR 推定量も過小評価の傾向があると言える。

この実証分析結果は，HS-VaR には正のバイアス（過大評価傾向）があるという前節で示した分析結果と矛盾する。考えられる理由として，実際の収益率分布の裾野部分が凸性を満たしていない，時系列収益率が IID でないなど，シミュレーションで仮定した前提条件を満たしていない可能性を指摘できる。

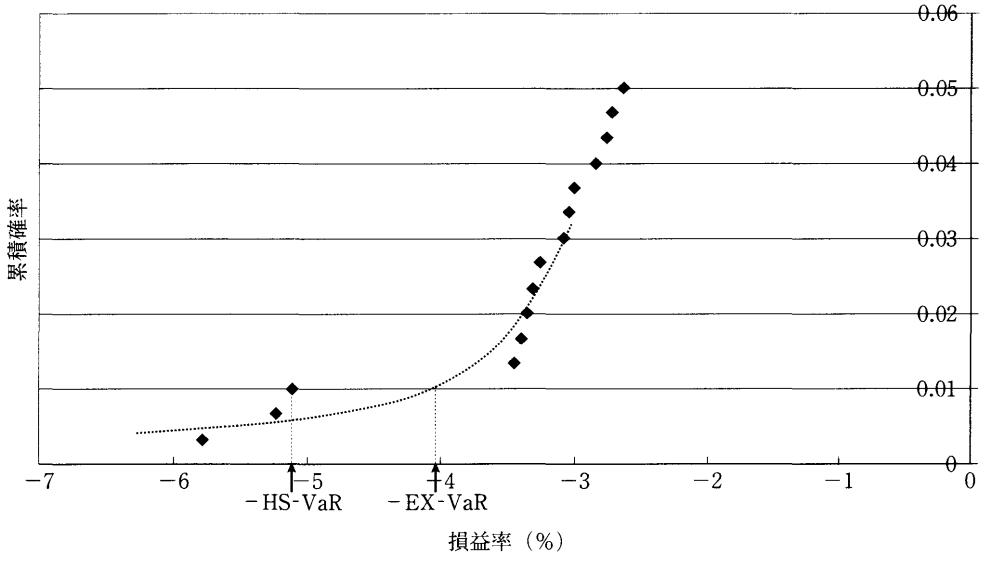
具体例として，第2図には日経平均の HS-VaR と EX-VaR$_U^{11}$ が最も大きく乖離した99/2/16付近の損益率およびそれぞれの VaR を示したが，あわせて，99/2/16に至るまでの300サンプルによる経験分布を第3図に示した。第3図では，1番目から3番目までの順序統計量が中心から大きく乖離していて，第3番目の順序統計量付近で凸性を満たしていないように見える。このような分布関数に外挿を適用すると，補助線で示したように EX-VaR$_U^{11}$ が観測されるため，HS-VaR との順序関係が t 分布や正規分布を仮定した場合と異なる結果になる。

株式や為替などの資産収益率分布は，こうした中心から大きく乖離するデータを多く含むことが知られており，いわゆるファットテールとして理解されている。しかし，一般にファット

第2図　97/9～99/4の日経平均収益率と HS-VaR, EX-VaR



第3図　99/2/16における日経平均収益率の経験分布（300サンプル）



テールと言う場合には分布の裾野が凸であることを前提とするが，実際の経験分布を見ると，必ずしも凸性を満たしていないという印象を受ける。各市場に固有の値幅制限措置が影響を及ぼしている可能性を考えられるが，詳細な検討は今後の課題としたい。いずれにせよ，実際の市場データを使った VaR の推定や，t 分布等のファットテール性を有する分布の推定においては裾野の凸性に注目したより慎重な検討を要することになろう。

VII 結 論

損益分布が正規分布や t 分布に従う場合に，広く一般で利用されているヒストリカル法による VaR 推定量は過大評価されるが，本稿で示した補完／外挿方法を適用することにより，バイアスの縮小と安定性の向上を同時に図ることができることが示された。さらに，通常 VaR は LEDV として与えられるものの，UEDV に外挿法を適用するとより正確で安定した VaR 推定値が得られることが示された。

しかし，実際の資産収益率データでは，HS-VaR の過大評価傾向は観測されず，むしろ，過小評価されている傾向がみられた。実際の収益率データは，全体として t 分布で良く近似できるとの指摘があるが，分布の裾野部分だけに注目すると凸性を満たしているとは言えない場合も想定されることに注意しなければならない。

参考文献

Geske, R. and H. Johnson [1984] "The American put option valued analytically," *Journal of Finance,* 34, pp. 1111-1128.

Harrell, F. E. and C. E. Davis [1982] "A new distribution-free quantile estimator," *Biometrika,* 69, pp. 635-640.

Heikkinen, V. and A. Kanto [2002] "Value-at-Risk estimation using non-integer degrees of freedom of Student's Distribution," *Journal of Risk,* 4(4), pp. 77-84.

Hendricks, D. [1996] "Evaluation of value-at-risk models using historical data," *Economic Policy Review (FRBNY)*, 2(1), pp. 39-70.

Huisman, R., K. G. Koedijk and R. A. J. Pownall [1998] "VaR-x: fat tails in financial risk management," *Journal of Risk,* 1 (1), pp. 47-61.

Inui, K., M. Kijima and A. Kitano [2003] "VaR is subject to a significant positive bias," *Working paper, Kyoto University.*

Mausser, H. [2001] "Calculating quantile-based risk analytics with L-estimators," *Algo Research Quarterly,* 4, pp. 33-47.

Pant, V. and W. Chang [2001] "An empirical comparison of methods for incorporating fat tails into Value-at-Risk models," *Journal of Risk,* 3, pp. 99-119.

Platen, E. and G. Stahl [2003] "A structure of general and specific market risk," *Working paper, University of Technology,* Sydney.

Sheather, S. J. and J. S. Marron [1990] "Kernel quantile estimators," *Journal of the American Statistical Association,* 85, pp. 410-416.