経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

債券市場におけるリスクプレミアムの分解

今　井　俊　夫

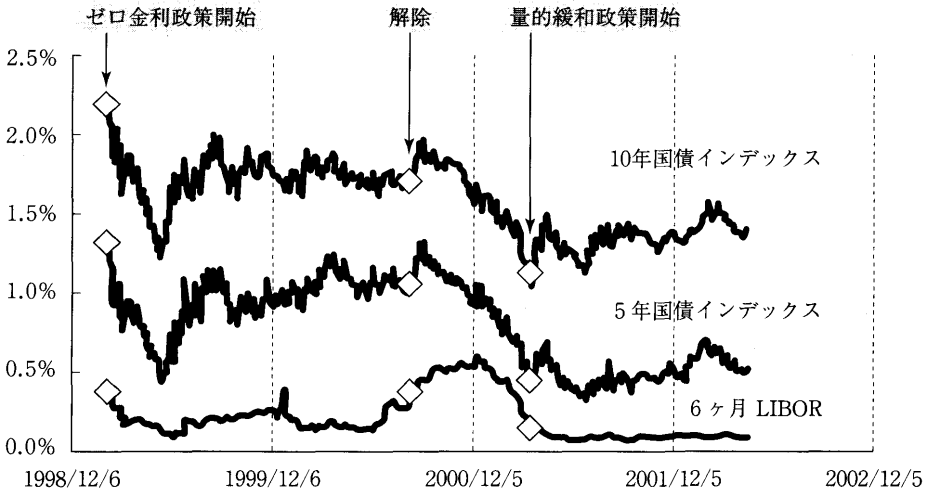
I　はじめに

経済の長期低迷を背景としてわが国の短期金利はこの10年間一方的な低下傾向を示していたが，1999年２月12日にゼロ金利政策が導入されて以降は，2000年８月11日のゼロ金利政策解除と，2001年３月19日の量的緩和政策導入に起因する一時的な動揺こそあったものの，基本的に変化の少ない動きを続けている。一方，より期間の長い利子率を観測するため，日本国債の市場利回りに目を移すと，２年から５年の中期領域の国債利回り，７年から10年の長期領域の国債利回りはいずれも，短期金利変動にみられる硬直性とは無関係に，変化に富んだ推移を続けていることが分かる。これらは，ゼロ金利政策導入以降の３点の金利水準の推移を示した第１図から確認できる。本稿では，このような中長期金利変動と短期金利変動の独立性の発現には，債券市場に求められるリスクプレミアムの変動が主要な役割を果たしているとの立場を取り，無裁定価格理論を利用した金融工学的手法により，そのリスクとプレミアムの特定と分離を試みた。

将来，短期金利があらかじめ決められた経路を確実にたどるのであれば，長期債の利回りは，短期金利商品を再投資し続ける戦略から得られる収益率と等しくなると考えるのが合理的である。現実には将来の短期金利には不確実性が存在する。この場合，長期債の利回りは，短期金利商品を再投資し続ける戦略から得られる期待収益率とはなんらかの関係があるとは考えられるものの，必ずしも等しくなるわけではない。両者の差異は，保有期間が長期化するリスクに付帯するプレミアムという意味をこめて，期間プレミアムと呼ばれている。期間プレミアムの性質に関しては，そもそも期間プレミアムの存在を仮定しない狭義の純粋期待仮説，長期借入を望む借手と短期貸付を好む貸手との間を融通する債券投機家にはリスクに応じた対価が支払われなければならないため，正の値をとると主張する流動性選好仮説（Hicks [1946]，Lutz [1940]），あるいは，年限ごとに異なった市場参加者の思惑を反映してさまざまな値をとりうると主張する市場分断仮説（Culbertson [1957]，Modigliani and Sutch [1966]）など多様な議論がなされている。たとえば，Merton [1973] は短期金利を状態変数とする経済において，投資と消費を連続的に繰り返しながら自らの効用を最大化する経済主体の，短期金利と逆相関すると考えられる債券に対する需要を導き，これが必ずしも正のリスクプレミアムに起因する要因だけではないことを示したが，この結果は，期間プレミアムは負の値をもとりうるとする説を支持していると言える。

利子率の期間構造とその変動性を論ずるアプローチの一つに，無裁定価格理論を利用するものがある。これは Vasicek [1977] に端を発している。Vasicek モデルでは，まず，任意の満期を持った割引債券の価格変動は，すべて短期金利 $r(t)$ の変動によって説明されると仮定する。これらの間の裁定機会を排除するとき，無裁定価格理論によれば，単位リスクあたりの期待超過収益率が，共有されなければならない。したがって，時点 T に満期を迎える割引債券の，時点 t における瞬間的期待収益率を $\mu(t, T)$，短期金利変動をもたらす不確実性へのエクスポージャを $\chi(t, T)$ とするとき，

第１図　ゼロ金利政策導入後の金利推移



注：国債指標利回りは Bloomberg 社算出。
出所：Bloomberg

$$\mu(t,\ T)=r(t)+\Lambda(t)\chi(t,\ T) \qquad (1)$$

が任意の T について成り立つことになる。不確実性一単位に求められるプレミアム $\Lambda(t)$ を，リスクの市場価格と呼ぶ。Vasicek モデルにおいてはリスクの市場価格を時間変化しない一定値として与え，偏微分方程式として表される（1）を境界条件 $P(T,\ T)=1$ の下で解くことによって，任意の満期を持った割引債券の価格を導出する。$\Lambda(t)\chi(t,\ T)$ は，満期 T の割引債券に要求されるリスクプレミアムである。これを期間プレミアムと呼ぶこともできる。期間プレミアムは，リスクの市場価格 $\Lambda(t)$ と割引債券のリスクエクスポージャ $\chi(t,\ T)$ の積として表される。リスクの市場価格は外生的に与えられている点に注意されたい。無裁定価格理論においてリスクプレミアムは外生的に与えられるものであり，したがって，その性質について直接的に何らかの示唆を与えることはない。

しかし，無裁定価格理論にもとづいた実データの観測によって，期間プレミアムの性質を論ずることは有用であろう。たとえば，Vasicek モデルのパラメータを，実データを用いて推計することによって，期間プレミアムの正負を論じることもできる。ただし，その場合には，あくまで期間プレミアムの性質について一定の制約を課した上での推計であり，その範囲内での結論に過ぎないことは留意しておかなければならない。Stanton［1997］は，異なる満期を持つ２種類の割引債券価格推移から，短期金利変動リスクの市場価格を，短期金利水準の関数として，関数形を特定することなく推計する手法を示した。1965年からの３ヶ月財務省証券と６ヶ月財務省証券の日次価格推移を用いた結果によれば，８％程度までの短期金利水準に対しては，おおむね金利が上昇するにしたがって上昇する正のリスクの市場価格が推計されている。

Campbell and Shiller［1991］は，割引債券利回りの期間格差と割引債券利回り変動の間に見られた関係を調べ，期間プレミアムは変化しないとする仮説は，市場参加者が合理的な期待を形成していたとする仮定の下に棄却されることを報告している。これらの報告を受けて，期間プレミアムが金利変動特性とは独立に変動できる無裁定価格モデルとして「本質的アフィンモデル」が，Duffee［2002］によって提唱され，Campbell and Shiller［1991］の結果を再現できる表現力を持っていることが，Dai and

Singleton [2002] によって示されている。Duffee [2002] においても，利子率の期間構造の持つ予測可能性に着目したモデルの検定が行われ，「本質的アフィンモデル」クラスに属する複数のモデルの超過収益率表現力を比較しているが，その結果は，Dai and Singleton [2002] と同じである。本稿では，このモデルを用いて債券市場のリスクとプレミアムについて考察する。債券価格には複数のリスクに対するプレミアムが反映されているが，Duffee [2002] の推計結果，あるいは日本国債市場データから推計した結果から，その中には時期によって負の値をとっていたものも含まれることを示す。このリスクの分解は価格のみを用いた推計からは一意に特定されないため，目的に応じて任意に行うことができることも議論する。

本稿はつぎのように構成される。第Ⅱ章では本質的アフィンモデルを紹介し，債券価格のみを用いてこれを評価するとき，リスク分解には任意性が残っていることを示す。第Ⅲ章は最尤法を用いた推計結果による実証分析および，リスクとプレミアムの考察である。第Ⅳ章はまとめである。

II 本質的アフィンモデル

割引債券利回りが経済を記述する状態変数の線形関数として書ける金利モデルを総称して，アフィンモデルという。アフィンモデルは Duffie and Kan [1996] において体系的に研究されている。アフィンモデルは，債券価格を導出する際，偏微分方程式を直接扱う必要がないことから，とくにマルチファクターモデルにおいて優位性を発揮する。Duffee [2002] は，リスクの市場価格が状態変数のボラティリティと独立に変動できる形に拡張することによって，利子率の期間構造と超過収益率の相互関係を表現する柔軟性を向上させた。これを本質的アフィンモデル，従来のモデルを完全アフィンモデルと呼んで区別している。

1 設定と割引債券価格

不確実性が N 種の独立な標準ブラウン運動 $W(t)=(W_1(t), \ldots, W_N(t))'$ によって生成される経済を考える。t は時点を表す変数である。経済は N 種の状態変数 $Y(t)=(Y_1(t), \ldots, Y_N(t))'$ によって記述され，

$$dY(t)=K(\Theta-Y(t))dt+\Sigma\sqrt{S(t)}\,dW(t) \tag{2}$$

に従って変動するものとする。$K, \Sigma \in R^{N\times N}$, $\Theta \in R^N$ である。$\sqrt{S(t)}$ は対角行列であり，(i, i) 成分は $\alpha_i \in R$, $\beta_i \in R^N$ を用いて，$\sqrt{\alpha_i+\beta_i'Y(t)}$ $(i=1, \ldots, N)$ で表されるとする。

瞬間的に不確実性がないと考えられる資産が存在するとして，この収益率を $r(t)$ とする。安全資産の瞬間収益率は状態変数 $Y(t)$ を用いて，

$$r(t)=\delta_0+\delta_y'Y(t) \tag{3}$$

で表されるとする。$\delta_0 \in R$, $\delta_y \in R^N$ である。また，標準ブラウン運動 $W(t)$ のリスクの市場価格 $\Lambda(t)$ は，やはり状態変数を用いて，

$$\Lambda(t)=\sqrt{S(Y, t)}\,\lambda^0+\sqrt{S^-(t)}\,\lambda^y Y(t) \tag{4}$$

と書けるとする。$\lambda^0 \in R$, $\lambda^y \in R^N$ である。$\sqrt{S^-(t)}$ もまた対角行列であり，

$$\left[\sqrt{S^-(t)}\right]_{ii}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_i+\beta_i'Y(t)}}, & \text{if } \inf(\alpha_i+\beta_i'Y(t))>0\\ 0, & \text{その他}\end{cases} \tag{5}$$

と定義される。式(4)の右辺第二項のために，リスクの市場価格が，状態変数のボラティリティと独立に変動できる構造を持つ。

このモデルにおいて，満期時点 T をもつ割引債券の無裁定価格は，

$$P(t, T)=\exp\big(A(t, T)+B(t, T)'Y(t)\big) \tag{6}$$

の形になる。$A(t, T): R^2 \to R$, $B(t, T): R^2 \to R^N$ は，常微分方程式

$$\dot{A}+(K\Theta-\Sigma\Psi)'B+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i((\Sigma'B)_i)^2=\delta_0$$

$$\dot{B}-(K+\Sigma\Phi)'B+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\beta_i'((\Sigma'B)_i)^2=\delta_y \tag{7}$$

の境界条件 $A(T, T)=0$, $B(T, T)=0$ を満たす解である。また，$\Psi \in R^N$, $\Phi \in R^{N\times N}$ は，

$$\Psi_i = \alpha_i\lambda^0{}_i$$
$$\Phi_{ij} =$$
$$\begin{cases} \lambda^0{}_i[\beta_i]_j+\lambda^y{}_{ij}, & \text{if } \inf(\alpha_i+\beta_i'Y(t))>0 \\ \lambda^0{}_i[\beta_i]_j, & \text{その他} \end{cases} \tag{8}$$

のように定義される。

2　標準表現

前節で設定した経済において，債券価格のみが観測され，たとえば状態変数を直接観測することはできないと仮定する場合，すべてのモデルパラメータを自由パラメータとして扱うと，過少識別となることは明らかである。同じ債券価格を導く，状態変数とパラメータの組が複数存在するためである。したがって，いくつかのパラメータについてはあらかじめ決められた値をとると仮定しても，パラメータの推計に影響はない。一方，状態変数過程（2）に解が存在しない設定は無意味であることから，解が存在するためのパラメータ制約も必要である。Dai and Singleton [2000] は，はじめに完全アフィンモデルを分類し，それぞれのクラスで，同じ債券価格を導く状態変数とパラメータの組を相互に変換する，不変変換を特定した。つぎに，この変換を用いて，各クラスの，過剰識別にも識別不足にもならないパラメータ設定を示し，さらにこれに状態変数過程が解をもつための制約を課し，標準表現とした。この結果は本質的アフィンモデルにも適用が可能である。

Dai and Singleton [2000] によれば，完全アフィンモデルは正方行列 $[\beta_1, \ldots, \beta_N]$ の階数 m によって，$N+1$ クラスに分類でき，これを $A_m(N)$ クラスと表記するとき，$A_m(N)$ クラスに属する任意のモデルは，不変変換によって，

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0_{m\times 1} \\ 1_{(N-m)\times 1} \end{bmatrix},\ [\beta_1, \ldots, \beta_N]=$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times(N-m)} \\ 0_{(N-m)\times m} & 0_{(N-m)\times(N-m)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

の構造を持つモデルに移ることができる。行列 $\sqrt{S(t)}$ を書き下すと，

$$\left[\sqrt{S(t)}\right]_{ii}=$$
$$\begin{cases} \sqrt{Y_i(t)}, & 1\le i\le m \\ \sqrt{1+\beta_{i1}Y_1(t)+\cdots+\beta_{im}Y_m(t)}, & m+1\le i\le N \end{cases} \tag{10}$$

のようになる。状態変数過程（2）に解が存在するためには，$Y_i(t)\,(1\le i\le m)$ の正値性が保証されている必要がある。このために，次のパラメータ制約が課せられる。

$$K_{ij}=0, \quad 1\le i\le m,\ m+1\le j\le N$$
$$K_{ij}\le 0, \quad 1\le i\neq j\le m \tag{11}$$
$$\sum_{j=1}^{m}K_{ij}\Theta_j>0$$

また，

$$\beta_{ij}\ge 0, \quad m+1\le i\le N,\ 1\le j\le m \tag{12}$$

が必要である。ただし，$A_0(N)$ クラスにおいては，状態変数過程が解を持つための追加的な制約は必要にならない。不変変換によって K を下三角行列に規格化することができる。

$A_m(N)$ クラスに属する本質的アフィンモデルにおいて，式（5）は

$$\left[\sqrt{S^-(t)}\right]_{ii}=$$
$$\begin{cases} 0, & 1\le i\le m \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta_{i1}Y_1(t)+\cdots+\beta_{im}Y_m(t)}}, & m+1\le i\le N \end{cases} \tag{13}$$

のように展開される。したがって，$A_N(N)$ クラスに属する本質的アフィンモデルは，完全アフィンモデルに一致する。

他のパラメータについて，Duffee [2002] において標準表現とされているものは，つぎの設定である。

$$\Theta_i = 0, \quad m+1 \leq i \leq N$$
$$\Sigma = \mathbf{I} \tag{14}$$

3 リスク分解の任意性

Dai and Singleton [2000] によれば，不変変換には，不変線形変換，拡散相似変換，ブラウン運動回転変換，状態変数の置換の四種類がある。このうち不変線形変換は，観測されない状態変数に任意の線形変換を施しても，割引債券利回りの線形性は失われないので，対応するパラメータの変換によって債券価格が保存されるというものであり，拡散相似変換は，ボラティリティとリスクの市場価格の間にあるスケール不定性に着目したものである。これらの変換と状態変数の置換は，不確実性 $W(t)$ に直接働きかけるものではないが，ブラウン運動回転変換は，債券価格を変動させる要因を直接変化させる。これは次のようなものである。

直交行列 U によって，$\hat{W}=UW$ のように変換される $\hat{W}$ は，再び互いに独立な標準ブラウン運動である。このような変換によって状態変数が変わらないとき，

$$\hat{\Sigma}\sqrt{\hat{S}(t)} = \Sigma\sqrt{S(t)}\,U' \tag{15}$$

を満たすパラメータ変換が必要である。$\hat{\alpha}=\alpha$, $\hat{\beta}=\beta$ とするとき，U と $\sqrt{S(t)}$ が交換可能であれば，

$$\hat{\Sigma}=\Sigma U' \tag{16}$$

がこれを満たす。さらに，この変換によって債券価格が変化しないとき，

$$\hat{\Sigma}S(t)\hat{\Sigma}'=\Sigma S(t)\Sigma'$$

$$\hat{\Sigma}S(t)\hat{\lambda}^0+\hat{\Sigma}\sqrt{S(t)S^-(t)}\,\hat{\lambda}^y Y = \Sigma S(t)\lambda^0+\Sigma\sqrt{S(t)S^-(t)}\,\lambda^y Y \tag{17}$$

を満たす必要がある。第一式は(16)によってすでに満たされている。第二式は，$\sqrt{S(t)S^-(t)}$ と交換可能な U によって

$$\hat{\lambda}^0 = U\lambda^0,\ \hat{\lambda}^y = U\lambda^y \tag{18}$$

のように変換すれば満たされるが，状態変数過程に解が存在するパラメータ制約の下で，$A_m(N)$ クラスのモデルにおいては，

$$\sqrt{SS^-} = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & 0_{m\times(N-m)} \\ 0_{(N-m)\times m} & \mathbf{I}_{(N-m)\times(N-m)} \end{pmatrix} \tag{19}$$

であることから，そのような U は $m=0$ の場合にのみ存在する。$A_0(N)$ モデルにおいては，$S(t)=\mathbf{I}$ のように規格化できるから，任意の直交行列 U に対して，(16)，(18)によるブラウン運動回転変換が可能である。

一方，$m\geq 1$ の場合にブラウン運動回転変換が存在する可能性があるのは，完全アフィンモデルの設定に限られる。交換可能性から，

$$\left[\sqrt{S}U\right]_{ij} = \sqrt{\alpha_i+\beta_i' Y(t)}\,U_{ij}$$

$$\left[U\sqrt{S}\right]_{ij} = \sqrt{\alpha_j+\beta_j' Y(t)}\,U_{ij}$$

が任意の i, j に対して等しくなる設定は $\alpha_0\in R$, $\beta_0\in R^N$ に対して，

$$\sqrt{S(t)} = \sqrt{\alpha_0+\beta'_0 Y(t)}\,\mathbf{I} \tag{20}$$

と書けるものである。このモデルは $A_1(N)$ に属する。

ブラウン運動回転変換は，債券価格の変動要因を変化させるが，それによって債券価格は変化しない。いま，$A_0(N)$ に属する本質的アフィンモデルを考えると，このモデルのリスクの市場価格は，ブラウン運動の回転変換に対応して，

$$\hat{\Lambda}(t) = \hat{\lambda}^0+\hat{\lambda}^y\hat{Y}(t) = U(\lambda^0+\lambda^y Y(t)) \tag{21}$$

のように変換される。一方，変換されたブラウン運動に対する債券価格の感応度は，

$$\hat{\chi}(t,\ T)=\hat{\Sigma}'\hat{B}(t,\ T)=U\Sigma'B(t,\ T) \quad (22)$$

と変換されるため，期間プレミアムは，

$$\hat{\Lambda}'(t)\hat{\chi}(t,\ T)= (\lambda^0+\lambda^Y Y(t))U'U\Sigma'B(t,\ T)= \Lambda'(t)\chi(t,\ T) \quad (23)$$

となり，保存される。すなわち，同じ債券価格を解釈する場合にも，どのようなリスクに対してどの程度のプレミアムを求めているかという要因分解に関しては，任意性が残っていることになる。

III　実証分析

Duffee [2002] および Dai and Singleton [2002] の報告に共通しているのは，3ファクター本質的アフィンモデル $A_0(3)$, $A_1(3)$, $A_2(3)$, $A_3(3)$ を最尤法によって評価し，その結果，期間構造と超過収益率の間に見られた関係を表現するのに適したモデルは，$A_0(3)$ であったというものである。ここではこの報告に従い，$A_0(3)$ モデルを日本の債券市場について評価し，前章で議論したリスクとプレミアムの分解の任意性を例示する。また，Duffee [2002] の米国債券市場についての結果と，本章で得られたリスクプレミアムの性質を比較する[1)]。

1　パラメータの推計手法

$A_0(3)$ モデルを記述するパラメータは，状態変数過程を規定するパラメータ K, Θ, Σ と安全資産収益率を規定するパラメータ δ_0, δ_y および，リスクの市場価格の特定に必要な係数 λ^0, λ^y である。不変変換によってあらかじめ設定できるパラメータを除けば，自由パラメータの数は22である。さらに，時点 t の利子率の期間構造を式(6)に従って特定するためには，その時点における状態変数の値 $Y(t)$ が必要となる。式(6)を導出する過程から考えれば，時点 t の利子率の期間構造を知るために必要なパラメータは，時点 t 以降の状態変数の推移を規定するパラメータである。したがって，与えられた期間構造に反映されているのは，将来にかけての状態変数の変動に関する市場の合意であると考えられ，そのため，原理的には，各時点でパラメータは異なった値をとることができる。

しかし，各時点で異なったパラメータを得ようとすると，利用できる情報はその時点の利子率の期間構造のみと，ごく限られたものになる。たとえば，このモデルを規定するパラメータは22，状態変数は3であるから，これらの値を決定するためには，最低25点の同時点の利子率が必要となるが，10年までの利子率から取り出した25点がそれぞれ独立な意味を持っているとは考えがたく，その分離は必ずしも明らかではないであろう[2)]。また，パラメータ値が変動することが暗黙の了解として市場参加者に受け入れられているならば，その変動性を反映した価格付けを考えなければ整合的とはいいがたい。ここでは以上の2点を考慮して，すべての利回り変動は式(2)で規定される状態変数 $Y(t)$ の変動のみから導かれ，サンプル期間中実際にそのようであったと仮定する。このように仮定することで，サンプル期間中のすべての利回りデータを1セットのパラメータの推計のために用いることができ，また，厳密な意味で，各時点での債券価格に含まれるリスクプレミアムは，安全資産収益率の不確実性とリスクの市場価格の不確実性のみであったと考えることができる。

サンプル期間中一定の値をとり続けたと仮定されるパラメータは，過程(2)が対象期間中の状態変数変動を適切に記述するように，かつ，対象期間中の各時点での利回り曲線が式(3)で表される割引債券価格によって再現されるように推計する。Pearson and Sun [1994] におい

1)　米国債券市場データ及びパラメータ推計結果が，http://faculty.haas.berkeley.edu/duffee/affine.htm より取得可能である。

2)　実際，債券価格はリスク中立測度下の状態変数過程のみを反映していると解釈できるため，一時点の債券価格のみを用いる推計は，観測測度とリスク中立測度を分離するために主要な役割を果たす，リスクの市場価格の推計には不適切であり，何らかの形で観測測度の情報を導入する必要がある。

て Cox, Ingersoll, and Ross [1985] モデルの検証[3]のために用いられている手法が，この目的に添うものであり，Duffee [2002] もこの手法に従っている。この方法は，原理的には，債券価格が従う条件付き密度分布に対して最尤法を適用するものである。すなわち，推計すべきパラメータセット $\theta=(K, \Theta, \Sigma, \delta_0, \delta_y, \lambda^0, \lambda^y)$ の関数として，尤度関数 $\Psi_{\text{trans}}(Q, \theta)$ を

$$\Psi_{\text{trans}}(\hat{Q}, \theta)=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(\hat{Q}(t_i)|\hat{Q}(t_{i-1})) \tag{24}$$

により構成し，この最大化によってパラメータセット θ の最適解を求める。ここで，$\hat{Q}(t)$ は時点 t における何点かの債券価格の観測値を表し，$f_\theta(Q(t_i)|Q(t_{i-1}))$ はパラメータ θ の下での債券価格の条件付き密度関数を表す。Pearson and Sun [1994] は，債券価格の観測点の数を状態変数の数と等しくし，その値 $\hat{Q}(t)$ がパラメータ θ の下でモデル価格 $Q_\theta(Y(t))$ に等しいと仮定して，債券価格についての条件付密度関数を，状態変数についての条件付密度関数に変数変換した。この変換は，次のように行われる。

$$f_\theta(\hat{Q}(t_i)|\hat{Q}(t_{i-1}))=\frac{1}{|J(t_i)|}f_\theta(\hat{Y}(t_i)|\hat{Y}(t_{i-1}))$$
$$\hat{Q}(t_i)=Q_\theta(\hat{Y}(t_i))$$
$$J(t_i)=\frac{\partial Q_\theta(\hat{Y}(t_i))}{\partial Y} \tag{25}$$

$f_\theta(Y(t_i)|Y(t_{i-1}))$ はパラメータ θ の下での状態変数の条件付き密度関数で，これは仮定された状態変数過程(2)の解として与えられる。$A_0(3)$ モデルの場合には3次元正規分布の密度関数となる。$J(t_i)$ は変数変換に伴うヤコビ行列である。

状態変数の数 N を3にとってあるので，債券価格の観測点も3点となるが，期間構造に含まれる情報をより多く引き出すために，さらに3点の観測点を取る。追加的に観測する3点は誤差を伴って観測されると仮定し，誤差なく観測される3点から決定される「理論利回り」からの誤差の観測尤度を，最大化の目的関数に乗じる。このとき，観測誤差は平均0と一定の標準偏差 ε を持った正規分布に従うと仮定する。すなわち，誤差の観測尤度 $\Psi_{\text{error}}(P, \theta)$ を，

$$\Psi_{\text{error}}(\hat{P}, \theta)=\prod_{t=0}^{n}\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\hat{P}(t_i, t_i+T_j)-\ln P(t_i, t_i+T_j)}{\varepsilon T_j}\right)^2\right] \tag{26}$$

により計算し，Ψ_{error} を乗じてこれを最大化する。観測誤差の標準偏差 ε が新たに推計パラメータに加わる。

以上の推計は，式(25)によって状態変数を求めることで，対象期間中の各時点での利回り曲線が式(6)で表される割引債券価格によって再現され，式(24)で表される尤度関数を最大化することで，過程(2)が対象期間中の状態変数変動を適切に表現するようにパラメータを最適化することになる。

2　推計と結果の確認

標準モデルとして次のパラメータ設定を課した。

$$\delta_0=0,\ \delta_y=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ K=\Sigma\hat{K}\Sigma^{-1},\ \lambda^0=\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_3^0\end{pmatrix},$$
$$\lambda^y=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\lambda_{31}^y&\lambda_{32}^y&\lambda_{33}^y\end{pmatrix} \tag{27}$$

$\hat{K}$ は下三角行列である。$\hat{K}$ の6成分，Θ の3成分，Σ の9成分を自由パラメータに取ることで，過剰識別でも識別不足でもない設定となる。パラメータ数は22である。推計すべきパラメータは，これに観測誤差の標準偏差 ε が加わり，全部で23となる。

推計に用いた割引債券価格は，満期20年までの10年利付国債と20年利付国債の引値から，Vasicek and Fong [1982] の方法により作成

3)　Cox-Ingersoll-Ross モデルは均衡モデルに属し，リスクの市場価格が一定の経済モデルから内生的に導かれる点で，無裁定モデルとは異なる。

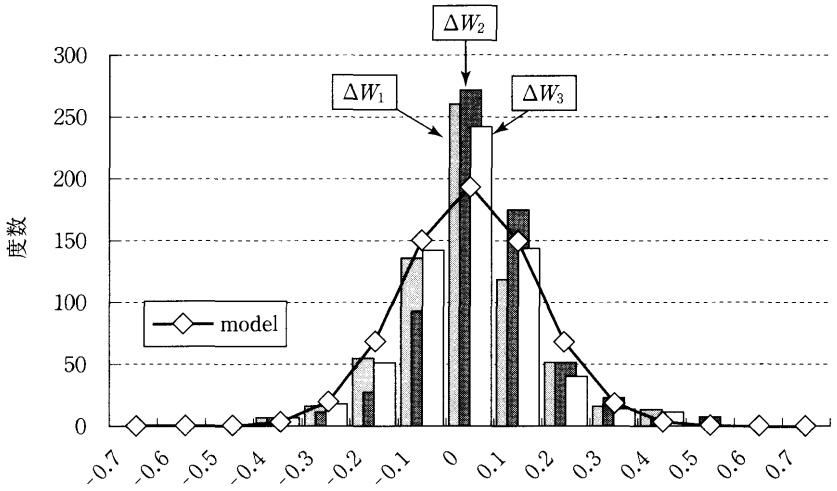
第1表　パラメータの推計結果

対数尤度＝21377.792

		1st.	(error)	2nd.	(error)	3rd.	(error)
K	1st.	0.045	(0.039)	0	—	0	—
	2nd.	−0.016	(0.003)	1.41	(0.17)	0	—
	3rd.	−0.060	(0.007)	0.71	(0.50)	0.36	(0.09)
Θ		−0.060	(0.016)	0.59	(0.30)	−1.13	(0.31)
Σ	1st.	0.0061	(0.0017)	0.0048	(0.0010)	−0.00007	(0.00068)
	2nd.	0.0054	(0.0186)	1.23	(0.03)	−0.12	(0.85)
	3rd.	−0.050	(0.076)	−0.93	(0.29)	0.39	(0.06)
λ_0		0	—	0	—	−1.354	(0.005)
λ_3^y		4.73	(0.03)	−2.354	(0.006)	−1.61	(0.02)
ε		0.00064	(0.00001)				

注：1989年6月2日～2002年3月29日の週次データ（n＝669）より推計。

第2図　ブラウン運動の分布



注：n = 669

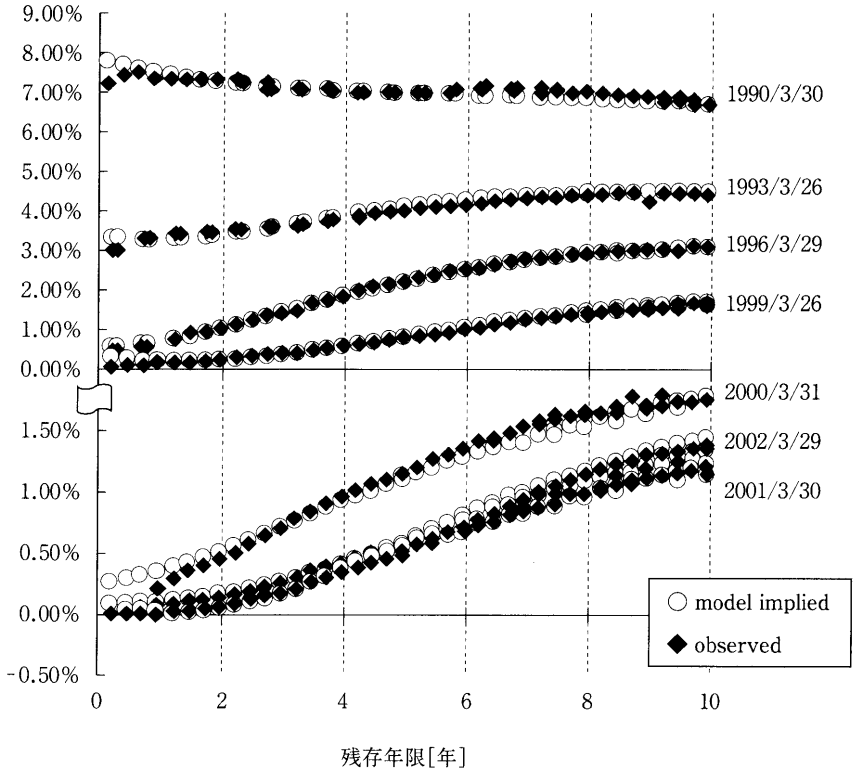
した。利付国債の引値は，東京証券取引所または大和証券 SMBC 株式会社による。最適化は1989年6月2日から2002年3月29日までの毎週金曜日のデータから行った。時系列数は670である。誤差なく観測される3点には1年，3年，10年を取り，誤差を伴って観測される3点には0.5年，2年，6年を取った。また，割引債券のモデル価格は，解析解が存在するが，計算効率を考慮して Euler 法による常微分方程式（7）の数値解を利用した。時間間隔は0.01年である。解析解は，付録に示す。

第1表にパラメータの推計結果を示す。第2図は推計パラメータの下で得られる状態変数から，その過程（2）の離散化によって計算した標準ブラウン運動，すなわち

$$\Delta W=\Sigma^{-1}(\Delta Y_t-K(\Theta-Y_1)\Delta t)$$

の分布である。いま，週次データ（$\Delta t=7/365y$）

第3図　国債利回り曲線の比較



第2表　ブラウン運動の統計量

	ΔW_1	ΔW_2	ΔW_3	正規分布
平　均	0.000	0.028	0.001	0
標準偏差	0.139	0.137	0.138	0.138
歪　度	0.118	0.061	0.434	0
尖　度	1.322	3.284	2.432	0
相関係数	1	−0.013	−0.005	
		1	−0.005	
			1	

注：第1表のパラメータと状態変数の実現値より計算
(n =669)

をとっているので，離散化による影響が小さければ，それぞれ平均0，分散7/365年の互いに独立な正規分布にしたがうと仮定されている。第2表に平均，標準偏差，歪度，尖度および，相関係数を示した。金融データ一般に言われているように，全体に尖度の高い分布になっている。また，ΔW_2 の分布は正の値に偏っているが，これは，K_{22} の値が大きいことから，離散化による効果が大きいためであると思われる。分散の標準化と独立なファクターへの分解には成功していると言えるであろう。

また第3図は，モデル価格の再現性を見るために示した，2002年までの3月最終金曜日の国債の観測複利利回りとモデル価格の複利利回りである。見やすくするため，最近の3年間を別にして3年間隔で示した。1990年，1993年，1996年，1999年（上）と，2000年から2002年までの毎年（下）の利回り曲線である。観測された利回り曲線だけ見ても，この13年間，日本国債の利回り曲線は水準，形状とも実に多彩な変化を示しており，研究テーマとして非常に興味深いことが確認できる。逆イールドと順イールド，変極点が含まれるような利回り曲線，いず

れに対してもモデル価格から導かれる複利利回りは，おおむね追随していると言えるだろう。独立なファクターへの分解，適切な標準化とあわせて考えると，時系列的側面と横断的側面を整合的に表現できるモデルおよびモデルパラメータであると考えられ，したがって，ここから導かれる状態変数 $Y(t)$ の解釈の正当性が主張できることになる。

3　リスク分解の任意性

任意の直交行列 U によるブラウン運動回転変換を見る。ブラウン運動は，利回り曲線に与える影響によって視覚的に観測できる。すなわち，満期時点が T である割引債券利回りを $R(t, T)$ とすると，

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t, T) = -\frac{1}{T-t}(A(t, T) + B(t, T)'Y(t)) \quad (28)$$

であるから，

$$dR(t, T) = \left[\frac{\partial R(t, T)}{\partial t} - \frac{1}{T-t}B(t, T)' K(\Theta - Y(t))\right] - \frac{1}{T-t}B(t, T)'\Sigma dW(t) \quad (29)$$

より，

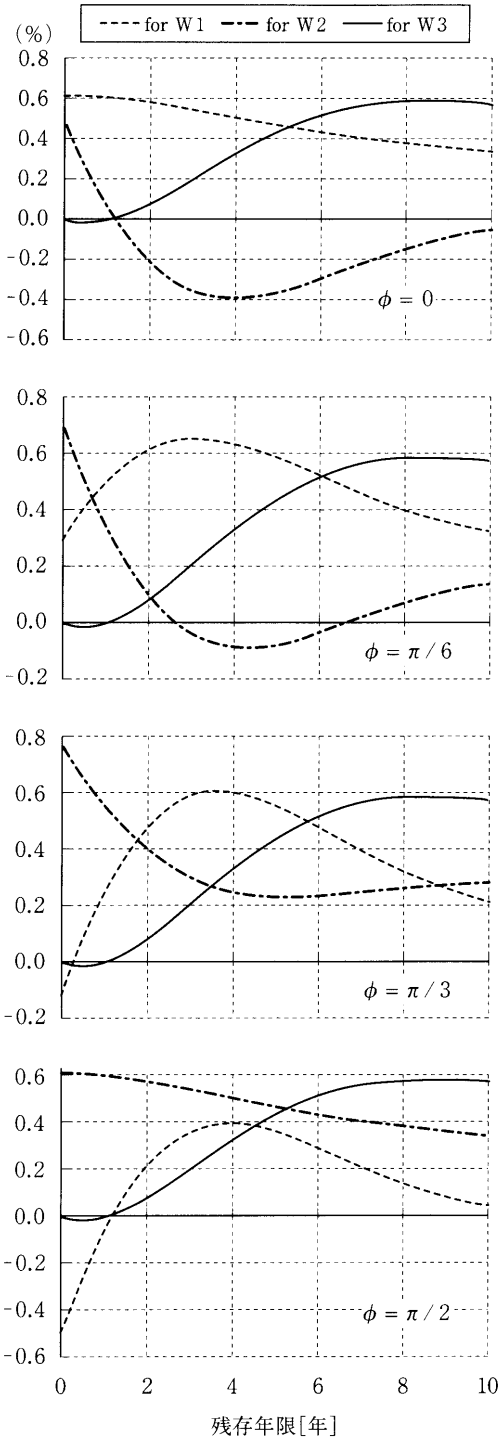
$$-\frac{1}{T-t}(\Sigma' B(t, T))_i,\ i = 1, 2, 3 \quad (30)$$

の期間構造は，ブラウン運動 $W_i(t)$ に対する利回り曲線の応答を表している。第1表の結果からこれを計算したものが，第4図において $\phi = 0$ を付したものである。一方，第4図において $\phi = \pi/6, \pi/3, \pi/2$ としたものは，直交行列

$$U = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

によって，ブラウン運動を回転変換した場合の利回り曲線の応答の様子をそれぞれ示したものである。$W_3(t)$ に対する応答は変わらず，徐々

第4図　ブラウン運動に対する利回り曲線の応答



に $W_1(t)$ が $-W_2(t)$ に，$W_2(t)$ が $W_1(t)$ に移っていく様子が確認できる。

第5図は，このときの各ブラウン運動に求められるプレミアム，すなわち，$\Lambda_i(t)\chi_i(t, T)$ $(i=1, 2, 3)$ を，2002年3月29日の $\Lambda(t)$ について示したものである。3成分の和である期間プレミアムは保たれるが，その成分分解には任意性が残ることが確認できる。

4　リスクプレミアムの性質

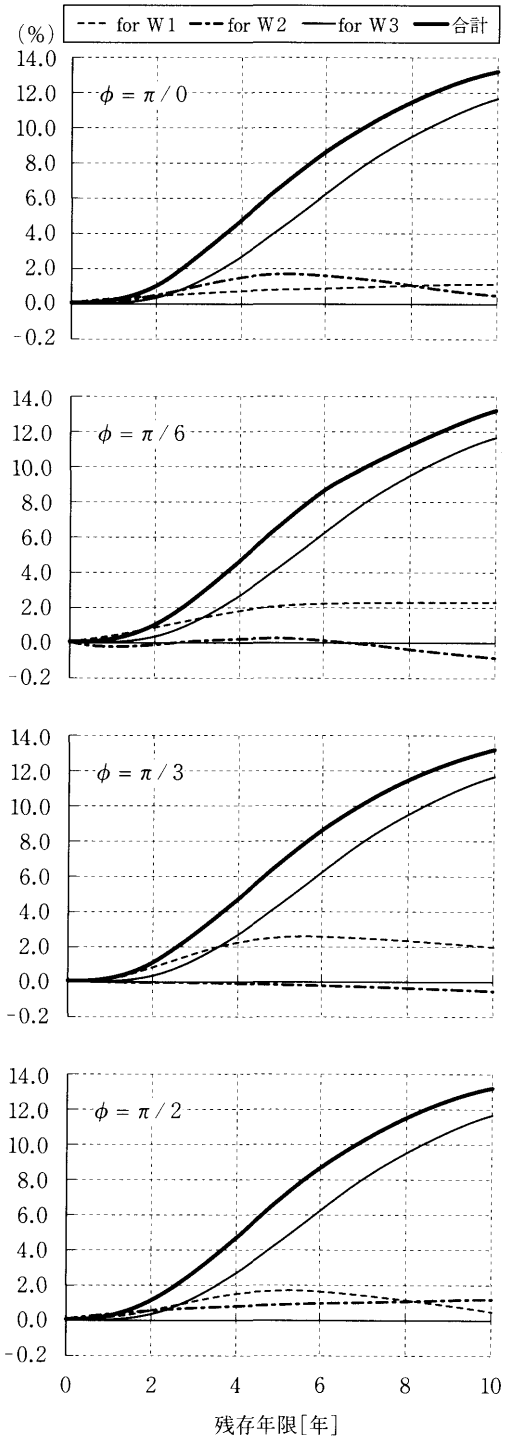
債券市場のリスクプレミアムについて議論し，米国債券市場との比較をするため，任意性の残っていたブラウン運動をつぎのように固定する。まず，$\hat{\Sigma}_{12}=\hat{\Sigma}_{13}=0$ として，$\hat{W}_1(t)$ のみが安全資産収益率 $r(t)$ の変動成分になるとする。つぎに，永久割引債券 $P(t, \infty)$ を考え，永久割引債券は，$\hat{W}_3(t)$ の影響を受けないとする。この条件は，

$$\hat{\Sigma}_{23}B_2(t, \infty)+\hat{\Sigma}_{33}B_3(t, \infty)=0 \qquad (32)$$

と書ける。以上の条件を満たす直交行列は一意に定まる。

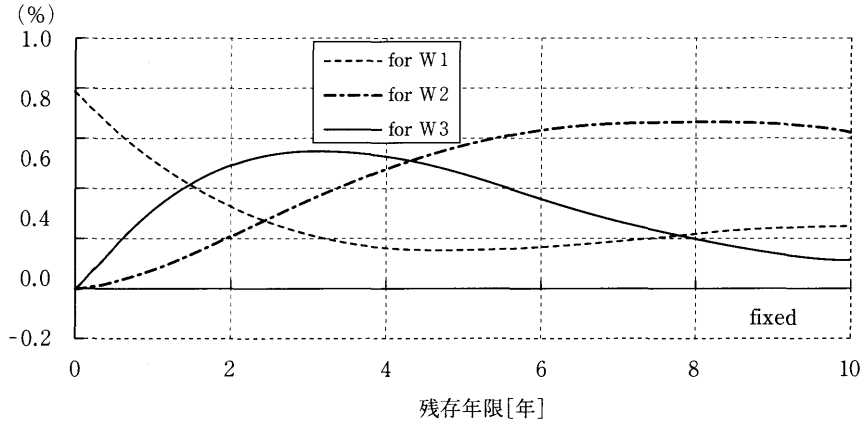
以上の回転変換を施した結果が第6図，第7図，第8図である。第6図は各ブラウン運動に対する利回り曲線の応答を，第7図は2002年3月29日の期間プレミアムを分解した様子を，第8図は，各ブラウン運動に求められるリスクの市場価格の推移を，それぞれ示している。第6図からは，$W_1(t)$，$W_2(t)$，$W_3(t)$ がそれぞれ，短期金利，7～10年利回り（以下長期金利とする），2～4年利回り（以下中期金利とする）を変動させる要因に分解されていることが分かる。第7図からは，2002年3月29日においては期間プレミアムのほとんどが，$W_2(t)$ の変動リスクに対するものとして解釈できることが分かる。長期金利変動に対するリスクプレミアムが全年限の債券に対して求められていたことになる。さらに，$W_1(t)$ の変動リスク，すなわち，短期金利変動に対するリスクプレミアムは全年限に渡って，負の値をとることが分かる。第8図でこの推移を確認すると，ロシア危機に起因

第5図　期間プレミアムの分解

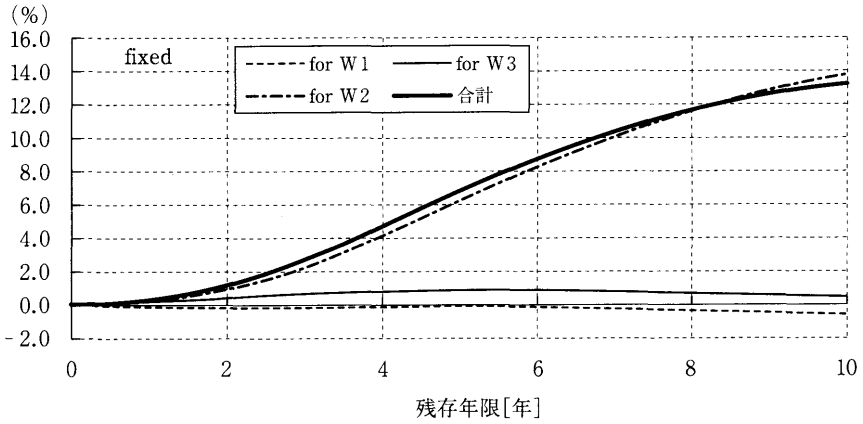


注：2002年3月29日

第６図　ブラウン運動に対する利回り曲線の応答

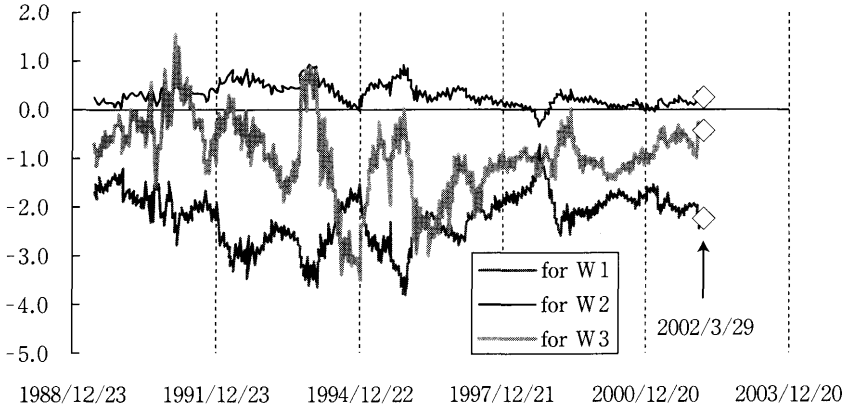


第７図　期間プレミアムの分解



注：2002年３月29日

第８図　リスクの市場価格の推移



する一時期（1998年10月）を除いては，つねに負の値であった（リスクの市場価格は正の値）ことは興味深い。債券市場の参加者は，短期金利変動に対しては正のリスクプレミアムを要求していないことになる。

通常のリスク資産であれば，市場を代表する投資家がリスク回避的であると考えられる限り，そのリスクをとることに対する要求収益率は正になるべきであろう。しかし，当該資産の売却によって超過収益が期待できる場合や，超過収益を得ること以外の保有動機，たとえばMerton［1973］が指摘しているような，金利変動と順相関を持つような資産の価格変動リスクヘッジ需要や，他に投資資産が考えられないときに資金の逃避先としての需要が存在するような場合には，その限りではない。短期金利変動リスクに対するプレミアムがつねに負の値を示していたことは，短期金利にはこのような需要を反映しやすい性格があることを示しているのではないか。この符号が反転した時期には，同時に長期金利変動リスクに求めるプレミアムが急低下している。超過収益を得ること以外の保有動機による需要が，短期債から一部長期債に波及した結果，短期債にも通常のリスク資産としての価値が生じたものと解釈できるであろう。

以上の考察を米国債券市場の結果と比較する。第9図，第10図，第11図が，それぞれ，Duffee［2002］の結果を用いて計算された，米国債券市場におけるブラウン運動，リスクプレミアムの分解（1994年12月30日），リスクの市場価格の推移である。日本国債市場についての結果と同様，$W_1(t)$ のみが短期金利を変動させ，$W_3(t)$ は永久割引債券価格を変動させないような回転変換が施されている。Duffee［2002］は割引債券価格の月次推移を用いて，1952年1月から1994年12月末までとはるかに長い期間の推計を行っており，単純には比較できない[4]ものの，短期金利変動に対するリスクプレミアムが日本の場合とは逆に，つねに正の値をとっていた点が興味深い。また，中期金利変動，長期金利変動に対しては，日本国債市場のように，つねに定まった符号の値を取るのではなく，時期に応じて柔軟に符号が変化していたことが確認できる。米国債券市場への参加者にとっては，中長期金利変動こそが，超過収益目的以外の需要が反映されやすいリスクなのであり，さらに時期に応じて，符号が変化しうることは，同じ年限に異なる動機を持つ参加者が存在しており，その市場影響力が対等であることを示している。両国の比較の限りでは，日本国債市場のほうがより市場分断的であると言うこともできるだろうか。

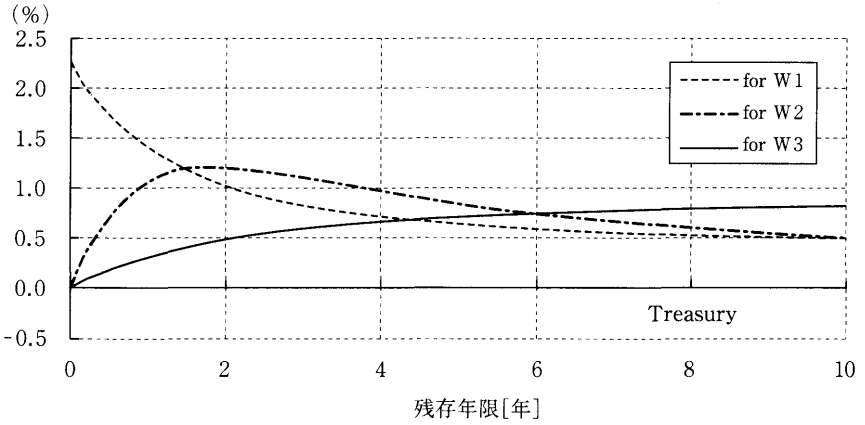
IV　ま　と　め

利子率の期間構造に反映されている情報に関しては，古くから多くの議論がなされている。本稿では，本質的アフィンモデルと呼ばれる無裁定価格モデルを用いて，利子率の期間構造が内包している，債券市場参加者のリスクとリスクプレミアムについて考察した。本質的アフィンモデルは，過去見られた，利子率の期間構造と超過収益率の相互関係を表現する柔軟性を持っていることが報告されているが，このモデルを債券価格のみを用いて評価した場合には，リスクやリスクプレミアムの要因分解には任意性が残っていることを，数値例と合わせて示した。

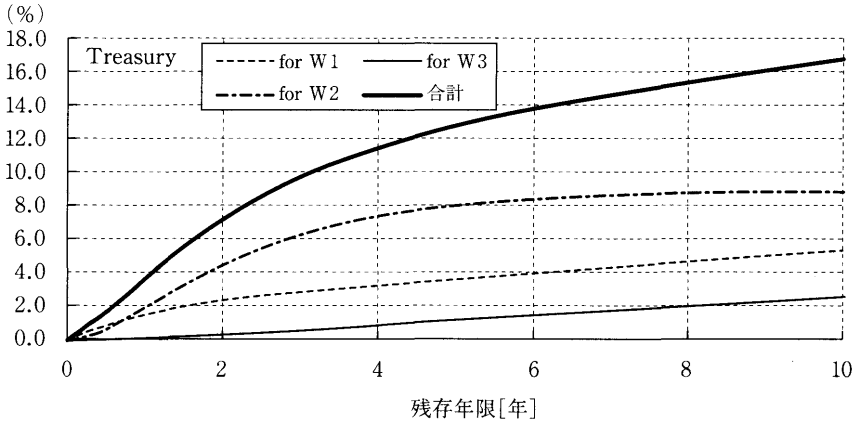
この任意性を利用して，リスク要因を短期金利変動，中期金利変動，長期金利変動のように特定し，それぞれに求められるプレミアムを観測すると，日本国債市場においては，短期金利変動に対するプレミアムが，ある時期を除いてつねに負の値を示しており，米国債券市場において短期金利変動に対するプレミアムがつねに正の値を示していた結果とは対照的であった。プレミアムが負の値を示すことは，超過収益を得ること以外の動機による市場参加者の存在を示唆するが，米国債券市場においては，負のプレミアムはむしろ中期金利変動，長期金利変動

4）その他に，観測誤差についての仮定が異なる。

第９図　ブラウン運動に対する利回り曲線の応答

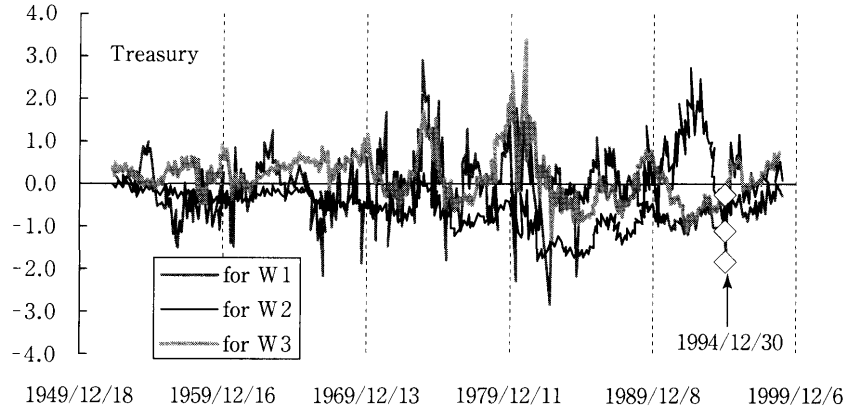


第10図　期間プレミアムの分解



注：1994年12月30日

第11図　リスクの市場価格の推移



に観測されており，両国の市場構造の違いを表す結果として，興味深い。

本稿の手法による債券プレミアムの推計は，債券価格の過去の推移のみに依存している点には注意が必要である。ここで得られた考察は，金融政策の検証への応用，実体経済に関する指標との整合性の検証など，多面的に補強される必要があるであろう。

付録　割引債券価格の解析解

$A_0(3)$ モデルにおいて，本質的アフィンモデルの割引債券価格を導く。$\alpha=(1, 1, 1)$, $\beta=0$ と規格化すると，常微分方程式（7）のうち，$B(t, T)$ についての方程式は，

$$\dot{B}(t, T)=(K+\Sigma\lambda^y)'B(t, T)+\delta_y \quad (33)$$

と整理される。斉次方程式の一般解から定数変化法により，境界条件を満たす解析解を得ることができ，これは，行列 $(K+\Sigma\lambda^y)'$ の固有値を $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$, $\tilde{K}_3$, 規格化された固有ベクトルを ν_1, ν_2, ν_3, 固有ベクトルから構成されるユニタリ行列を $U=(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ とすると，

$$B(t, T)=$$

$$U\begin{pmatrix} \tilde{B}_1(t, T) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2(t, T) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_3(t, T) \end{pmatrix}U'\delta_y \quad (34)$$

$$\tilde{B}_k(t, T)=\frac{\exp(-\tilde{K}_k(T-t))-1}{\tilde{K}_k}$$

となる。$A(t)$ は式（7）を辺々積分して，境界条件より

$$A(t, T)=(K\Theta-\Sigma\lambda^0)'\int_t^T B(s, T)ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_t^T B(s, T)'\Sigma\Sigma'B(s, T)ds$$
$$-\delta_0(T-t) \quad (35)$$

から得られる。

参考文献

Campbell, J. Y. and R. J. Shiller [1991] "Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View," *Review of Economic Studies*, Vol. 58, pp. 495-514.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross [1985] "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 61, pp. 385-408.

Culbertson, J. M. [1957] "The Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 71, pp. 485-517.

Dai, Q., and K. Singleton [2000] "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, Vol. 55, pp. 1943-1978.

—— [2002] "Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, pp. 415-441.

Duffee, G. R. [2002] "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models," *Journal of Finance*, Vol. 57, pp. 405-443.

Duffie, D., and R. Kan [1996] "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 6, pp. 379-406.

Hicks, J. R. [1946] *Value and Capital*, 2nd. ed., Oxford, Oxford University Press, p. 146.

Lutz, F. A. [1940] "The Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 55, pp. 36-63.

Merton, R. [1973] "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, Vol. 41, pp. 867-888.

Modigliani, F. R. and R. Sutch [1966] "Innovations in Interest Rate Policy," *American Economic Review*, Vol. 56, pp. 178-197.

Pearson, N. D., and T. S. Sun [1994] "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross model," *Journal of Finance*, Vol. 49, pp. 1279-1304.

Stanton, R. [1997] "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk," *Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 1973-2002.

Vasicek, O. [1977] "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics,* Vol. 5, pp. 177-188.

Vasicek, O. A., and H. G. Fong. [1982] "Term Structure Modeling Using Exponential Splines," *Journal of Finance,* Vol. 37, 339-348.