經濟論叢

第145巻　第5·6号

平成2年5・6月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第145巻第5・6号，1990年5・6月

N人非協力交渉ゲームについて

湯　本　祐　司

I 序

協力ゲームの解を，それが暗黙に依って立つ交渉過程をモデル化し，その非協力ゲームの分析によって正当化するという研究方針をナッシュプログラムというが，Rubinstein (1982), Binmore (1987) らの2人非協力交渉ゲームによる（非対称）ナッシュ交渉解の正当化の成功以後，そのN人交渉ゲームへの拡張の研究がなされてきた。しかし，Rubinstein らによる交渉ゲームを自然な形でN人に拡張した場合，2人交渉ゲームのようにはN人（非対称）ナッシュ交渉解を唯一の完全均衡結果として正当化ができないこと（すなわち多数の均衡結果が存在し解が特定できないこと）が Shaked によって指摘された。その後，この問題に対していくつかの研究がなされてきた。これらの研究は大まかに次の二つの方向にわけることができる。一つの方向は Binmore (1985), Herrero (1985) らによるものである。それは主に，より強力な均衡概念を用いて完全均衡をリファインすることで，期待される一意の結果を得ようとする方向である。もう一つの方向は Jun (1987), Chae & Yang (1988a, b) らによる研究である。それは交渉ルールを工夫して，より具体的には契約を交渉ルールに導入することによって，期待される結果を唯一の完全均衡結果として得ようとする方向である。本稿の中心的な目的は，この第2の方向について Jun らが得ている結果が交渉ルールの変更に対し，どれくらいロバストであるかを調べることである。まず第II節では Rubinstein 型のN人交渉ゲームと Binmore らの研究の紹介をする。第III節では Jun らの研究の紹介をする。続いて第IV節では Jun らのモデルの交渉ルールを一部変更し，契約を導入した交渉ゲー

ムの交渉ルールと完全均衡結果の一意性の関係の考察を試みる。最後に第V節は結びである。

II　N人 Rubinstein 型交渉ゲーム

Rubinstein (1982), Binmore (1987) らの2人交渉ゲームのN人への最も自然な拡張として次のような交渉ルールのゲームが Shaked, Herrero (1985), Binmore (1985) らによって研究されてきた。

N人のプレーヤーをそれぞれ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ とする。彼らは交渉のパイの配分 $s_1, \ldots, s_n$ $(s_1+\cdots+s_n=1)$ をめぐって交渉する。まず第0期に P_1 が配分の提案をする。そして残りのプレーヤーは P_2 から順[1]に，提案に対して同意または拒否をする。もし全員が合意したならば，ゲームは終了し，その配分が実行される。一人でも拒否したならば，提案は廃案になり，ゲームは第1期に進む。第1期には今度 P_2 が配分の提案をする。そして残りのプレーヤーは $P_3, \ldots, P_n, P_1$ の順に同意または拒否をする。もし全員が同意したならば，ゲームは終了し，その配分が実行される。一人でも拒否したならば，提案は廃案になり，ゲームは第2期に進む…。このように全員が合意に達するまでゲームは続けられるが，各期の提案者は $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n, P_1, P_2, \ldots$ というようにローテーションしていくとする。また，プレーヤーは同じ取り分なら，なるべく早く配分されることを望む，すなわち各プレーヤーは δ_1 の時間割引ファクターで配分を割り引くと仮定する。例えば第 t 期で合意に達したならば，各プレーヤーの効用は $u_i=\delta_i^t s_i$ $(0\leqq\delta_1<1:\ i=1, \ldots, n)$ であるとする。また合意に達しない場合の各プレーヤーの効用は0であるとする。

このゲームについて Shaked は $N\geqq3$ のとき，多数の部分ゲーム完全均衡（以下完全均衡と表記）結果が存在し，解が特定できないという問題を指摘し

1) 同時に返答するようにモデル化することもできる。その場合部分ゲーム完全均衡より摂動完全均衡 (trembling-hand perfect equilibrium) が均衡概念として適当である。しかしその場合でも Shaked の指摘した問題は生じることが知られている。

た。すなわち，2人交渉ゲームにおいて Rubinstein らによって証明された完全均衡の一意性，及び提案の時間間隔を0に近づけていったとき，均衡結果の収束先として非対称ナッシュ交渉解を得ることができるという性質が，上述のような3人以上の交渉ゲームでは保存されないのである。序でもふれたようにこの問題に対して，次の2つの方向の研究アプローチがとられてきた。1つは Herrero, Binmore らがとってきた方向で，それは基本的に交渉構造をそのままにして，より強い均衡概念を用いたり，戦略にある種の制約をおくことによって均衡の一意性とN人非対称ナッシュ解を得ようとするものである。もう一つは Jun, Chae & Yang らによる方向で，それは交渉ルールを工夫することによって完全均衡の一意性とN人非対称ナッシュ解を得ようとするものである。Jun らの研究は次節で紹介するので，この節では Binmore らの結果を見ておこう。

まず Binmore (1985) の結論は次の3つである。

1. 定常完全均衡[2]は一意である。
2. ゲームの交渉期間が有限（n）の場合，完全均衡は一意であり，$n\to\infty$ でその均衡結果は定常均衡結果に収束する。
3. プレーヤーの戦略に対して自分の以前の戦略から連続的に変化するという制約を置くならば，唯一の均衡は定常均衡である。

次に Herrero (1985) の結論は，

4. ストロング完全均衡結果[3]は一意であり，それは定常完全均衡結果に等しい。

また，提案の時間間隔を0に近づけていったとき，定常完全均衡結果の収束先として，N人非対称ナッシュ交渉解が得られることが知られている。

---

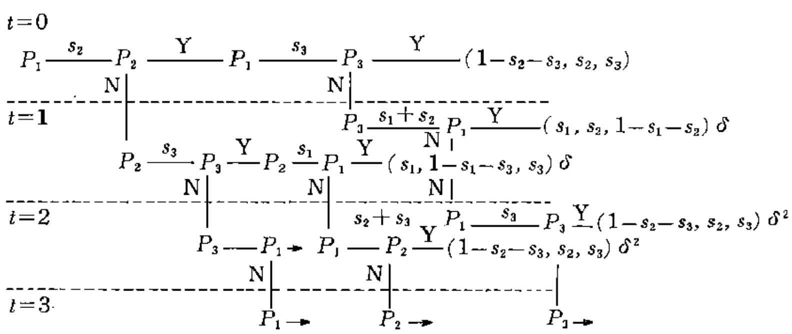
2) 定常（部分ゲーム）完全均衡とは各プレーヤーのとる戦略がそれ以前に起こったことから独立であり，なおかつそれらがすべての部分ゲームでナッシュ均衡となるような戦略で構成される均衡である。

3) ストロング完全均衡とはプレーヤー単独だけでなくいかなる結託に対してもその他のプレーヤーの戦略を所与として最適になるような完全均衡である。

III　Jun らの契約を導入したN人交渉ゲーム

3人以上の Rubinstein 型交渉ゲームでは，解が特定できないという問題に対して，Jun (1987) はある種の契約を導入した交渉ゲームを考案し，そのゲームの完全均衡が一意であること，及び提案の時間間隔を0に近づけていったとき，均衡結果の収束先として3人非対称ナッシュ交渉解が得られることを示した。そしてまた，そのN人の場合への一つの拡張が Chae & Yang (1988a, b) らによって示された。Jun と Chae らのモデルは細かい点で多少違いはあるが，ほぼ等しいとみて差し支えないと思われるので，よりシンプルな Chae らのモデルをここでは紹介することにする。

前節の Rubinstein 型交渉ゲームと同様にN人のプレーヤーをそれぞれ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ とする。彼らは交渉のパイの配分 $s_1, \ldots, s_n$ $(s_1+\cdots+s_n=1)$ をめぐって交渉をする。その過程は次のようにリカーシブに進行する。まずゲームのはじめにプレーヤーは $P_1, P_2, \ldots, P_n$ の順番に並んでいるとする。まず第0期に P_1 は隣の P_2 に全員の合意が得られた際に配分 s_2 を保障することを提案する。もし P_2 が同意したならば契約を結んで P_2 はゲームから退く。そして続いて P_1 は隣の P_3 に全員の合意が得られた際に s_3 の配分を保障する提案をする…。もし P_2 が同意しなかったならば P_1 は列の一番後ろにつく



第 1 図

$(P_2, \ldots, P_n, P_1)$。そしてゲームは第1期に進み，今度は列の一番先頭の P_2 が隣の P_3 に s_3 の提案をする…。このようにして全員が合意に達するまでゲームは続けられる。そして全員が合意に達した時点でゲームが終了し，分配が行なわれる。また，もし t 期で全員合意に達したならば，各プレーヤーの効用は $u_i=\delta_i^t s_i (0\leqq\delta_i<1 : i=1, \ldots, n)$ であるとする。永遠に合意に達しない場合の各プレーヤーの効用は0であるとする。

このゲームで特に注意しなければならないことは次の3つである。一つは各期に列の先頭にいるプレーヤーだけがその隣にいるプレーヤーに提案できるということである。隣以外のプレーヤーには決して提案できないし，先頭以外のプレーヤーは誰にも提案できない。二つめには提案が拒否された場合だけ時間が1期進むというということである。提案が同意されたときには提案者はその期に続けて隣のプレーヤーに提案できる。最後に3つめとして契約は拘束性 (binding) をもつということである。一度結ばれた契約は全員が合意した際には必ず実行される（3人の場合の交渉過程は第1図を参照)。

以上が Chae らのゲームのモデルであるが，彼らは次の命題を証明した。

命題1 (Chae and Yang (1988b))[4)]

もし $0\leqq\delta_i<1$ $(i=1, \ldots, n)$ ならば上の交渉ゲームはただ一つの完全均衡をもつ。またその均衡結果は

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\sigma_n^{-1}(1/(1-\delta_1), \delta_2/(1-\delta_2), \ldots, \delta_n/(1-\delta_n)).$$
$$\sigma_n=(1-\delta_1)^{-1}+\delta_2(1-\delta_2)^{-1}+\cdots+\delta_n(1-\delta_n)^{-1}.$$

彼らの証明には数学的帰納法が用いられる。また，完全均衡の一意性の証明には Shaked and Sutton (1984) による均衡結果の上限と下限の一致の手法が用いられる。詳しい証明は彼らの論文を参照。

次にN人非対称ナッシュ交渉解との関係であるが，$\delta_i=e^{-r_i\Delta}$ として，Δ を0に無限に近づけると，各プレーヤーの均衡利得は

4) Jun (1987) の3人交渉ゲームの場合も同じ結論である。

$$\frac{r_i^{-1}}{r_1^{-1}+r_2^{-1}+\cdots+r_n^{-1}} \quad \text{for } i=1, \ldots, n.$$

に収束する。すなわち最初に提案することによるアドバンテージが消え，均衡利得はプレーヤーの時間選好の逆数を交渉力とした場合のN人非対称ナッシュ交渉解に収束する。これらの結論は Rubinstein らの２人交渉ゲームの結果をN人についても保存しているといえる。

さてこれらの結論は Jun のモデルも含めて上記のモデルにだけに限ったものなのであろうか。次節では契約を導入した交渉ゲームに限定して，この点について考察する。

IV　契約を導入した交渉ゲームの交渉ルールと均衡結果の一意性の関係

この節では Chae らによる交渉ゲームの交渉ルールを一部変更した場合に，果して前節で紹介した結果が得られるかどうかを調べることによって，その変更されたルールが決定的に重要なのかどうかを考察する。そのために不完全ではあるが，彼らのゲームの交渉ルールの特徴を次の６つのルールにわけることにする。

Ｒ１：ｍ人残っている各部分ゲームにおいて各プレーヤーは特定のプレーヤーにしか提案できない。

Ｒ２：交渉にｍ人残っている（部分）ゲームのなかに必ず各プレーヤーの提案で始まるｍ人部分ゲームが存在する。

Ｒ３：提案は相手の配分を提案するものに限られる。

Ｒ４：提案を否認したプレーヤーは次期に提案ができる。

Ｒ５：プレーヤーの提案が同意されたら，その期に必ず彼は続けて提案ができる。

Ｒ６：提案者は一度に一人にしか提案ができない。

本稿ではこれらのルールのうち，Ｒ１—３の３つのルールに限定して，以下で分析していく。

(1) 残りのプレーヤーから自由に提案相手を選べる交渉ゲーム

R 1だけを満たさないゲームとして最も自然なゲームは，提案するプレーヤーが残りのプレーヤーの中から提案相手を自由に選べるゲームであろう。そこで P_1 の提案からスタートするそのようなゲームを考察する。

このゲームについては命題1とほぼ同様の結果が得られる。

命題1′

もし $0 \leqq \delta_i < 1$ $(i=1, \ldots, n)$ ならば上の交渉ゲームの完全均衡結果は一意であり，Chae らの交渉ゲームの完全均衡結果に等しい。

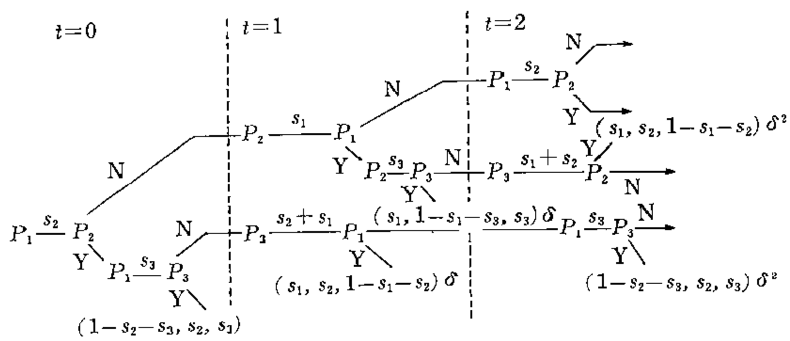
証明は Chae らの証明とほぼ同様にされえる。Appendix をみよ。

Chae らの結果と少し異なるのは完全均衡が多数存在することである。例えば均衡経路として P_1 が最初に提案するプレーヤーを誰にしても完全均衡として実現しうる。

(2) あるプレーヤーに不公平な提案機会しかない交渉ゲーム

R 2だけを満たさないゲームはかなり不自然であるが，このようなゲームにおいても，命題1と同様の結果が得られるのではないかと思われる。例えばプレーヤーは3人で，3人残っている間は P_1 と P_2 の間で交互に提案し，どちらかのプレーヤーが同意したらはじめて P_3 に提案できるようなゲームを考えてみよう。ただしR 4より，残りのプレーヤーが2人になったら交互に提案できなくてはならないとする（第2図参照）。この3人交渉ゲームが一意の完全均衡結果をもち，Chae らのN人交渉ゲームの N=3 の場合の完全均衡結果に等しくなることは割合簡単に証明しうる。このような結果は，P_1 の次に位置する P_2 の利得も，一番後ろで一見 P_2 と同等でない P_nの利得も，お互いの割引ファクターが同じなら，利得が等しくなる Chae らのゲームの均衡結果からもある程度推察しうる結果である。

(3) Chae らと違うタイプの提案を導入した交渉ゲーム



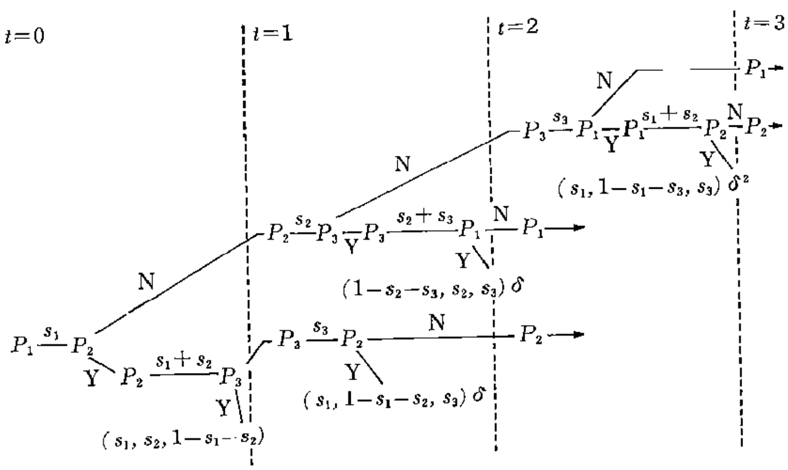
第 2 図

R 3 を満たさない次の 2 つのタイプの提案を考えてみよう。

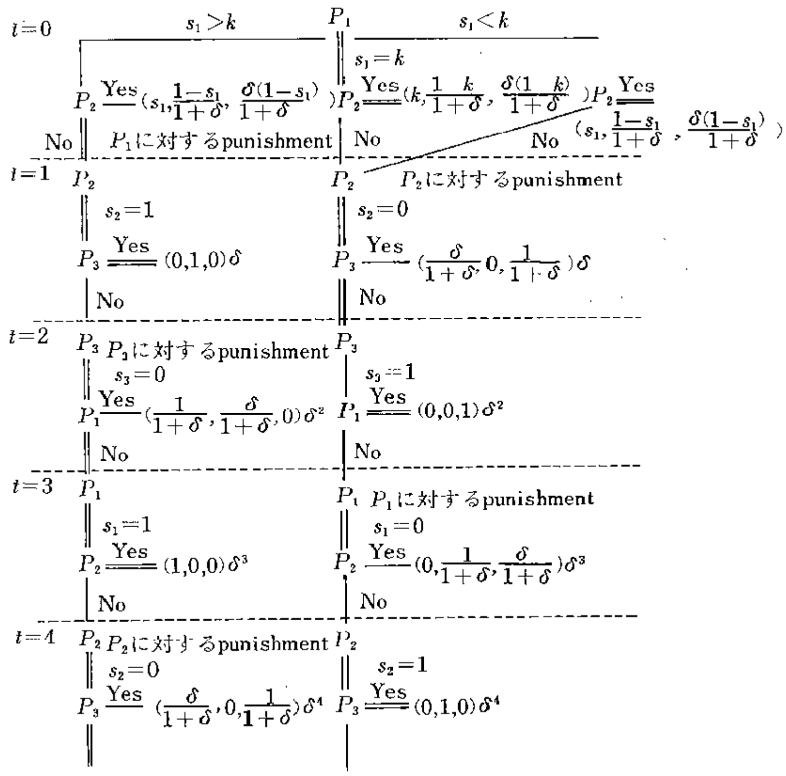
タイプ 1：提案者が相手の配分にあたるものを契約時に先払いする提案

タイプ 2：提案者が自分の配分を提案

まずタイプ 1 であるが，Jun (1987) によって詳しく分析され，このタイプの提案のゲームは望まれる結果にならないことが報告されている。例えば 3 人交渉ゲーム（交渉のパイは 1）で 3 人の割引ファクターが δ であるとしよう。



第 3 図



第 4 図

そしてあるプレーヤー P_i の提案(a)が合意された後の残り2人の部分ゲームを考えよう。そのときこの残り二人のプレーヤーの完全均衡利得は一意に決まり，P_i の利得は $1/(1+\delta)-a$，もう一人のプレーヤーの利得が $\delta/(1+\delta)$ となる。従って，この3人交渉ゲームの（純戦略の）完全均衡では必ず1人のプレーヤーの利得は $\delta/(1+\delta)$ になる。提案間隔を0に近づけていった際，それは1/2に収束し，この場合の望まれる解である1/3にはならない。また，δ が十分1に近ければ，多数の均衡結果が存在することが，やはり Jun によって報告さ

れている。

次にタイプ2について考察する。この場合，提案が認められたら提案者はゲームから退かなければまずいので，R4，5と矛盾してしまう。そこでプレーヤーの提案が同意されたら，そのプレーヤーがゲームから退き，かわりに同意者がその期に続けて提案ができるというようにルールを修正しておくことにする。この修正された交渉ゲームは均衡結果の一意性などの性質を持つであろうか。答は否である。例えば第3図で示されるようなリカーシブな3人交渉ゲームを考えてみよう。但しゲームは P_1 の提案からスタートし，3人の割引ファクターが同じ δ であるとする。

命題2

$\delta(1+\delta)\geqq 1$ のとき，第3図で表わされる3人交渉ゲームの完全均衡は多数存在する。例えば次の結果が均衡結果として実現される。

$$(u_1,\ u_2,\ u_3)=(k,\ (1-k)/(1+\delta),\ \delta(1-k)/(1+\delta)),\qquad 0\leqq k\leqq 1.$$

証明：第4図の二重線で示される戦略が命題の結果を実現する完全均衡戦略となる。これらが実際に完全均衡であることを調べることは容易である。また，図では残り2人になった部分ゲームの戦略が省略されているが，それについては Appendix の1)の証明を参照。　Q. E. D.

最後に上の2つのタイプの提案の組合せで，提案者が自分の配分を提案し，契約時に同意者に先払いしてもらう契約も考えられるが，タイプ1で示したのと同じ理由でやはり望まれる性質を持たないことがいえる。

以上，不十分な分析ではあるが，次の二つの結論が導けよう。一つには提案のタイプが均衡に大きく影響し，本稿で取り上げた提案では Jun らの用いたタイプの提案でしか望まれる結果が得られないということである。二つめは，しかしながらそのタイプの提案ならば，R4—6のルールを満たす交渉ゲームにおいて完全均衡結果の一意性などの望まれる結果が得られるのではないかということである。但し，二つめに関しては推測の域をでない。

V 結 び

最後に本稿で論じ残した問題をあげて本稿を終わることにする。

一つには，Jun らの交渉ルールは果してナッシュ交渉解が暗黙に依って立つような交渉過程であるかどうかの検討である。もしそうでないならばどのように位置づけるのが適当であるかを検討が必要がある。もう一つはこのような交渉過程が現実の様々な交渉にどう対応するのかの検討である。これらの問題は今後の研究課題としたい。

Appendix

命題1′の証明

Chae & Yang の命題1の証明と同様の方法によって証明しうるので，以下彼らの証明とほぼ同じ手続きで証明をおこなう。また，証明の便宜のため彼らと同じ次の定義を用いる。

$$\sigma_{k,-j} := \sigma_k - \delta_j(1-\delta_j)^{-1} \qquad \text{(A1)}$$

$P_{-i}(k) := \{P_1, P_2, \ldots, P_k\} - \{P_i\}$

V_1 : P_1 の提案ではじまるIII—(1)の k 人交渉ゲームにおける P_1 の完全均衡利得の集合。

$\underline{v}_i := \inf V_i$

$\bar{v}_i := \sup V_i$

$\beta_{i,j} := (1-\delta_i)^{-1}(\sigma_{k,-j})^{-1}\delta_i$

($j \neq i$, $0<\beta_{i,j}<1$ であることに注意)

$$v_i := \sigma_k^{-1}(1-\delta_i)^{-1} \qquad \text{(B2)}$$

証明には数学的帰納法を用いる。すなわち次の1)，2)を証明する。

1) プレ‥ヤーの数 $n=2$ とき命題が成立する。また，$n=3$ のとき，P_i($i=1, 2, 3$) が P_j($i \neq j$) に対して a($0 \leq a \leq 1$) の配分を保障する契約を結んだ後の部分ゲームにおける P_i, P_h($h \neq i, j$) の完全均衡利得は，

$$u_i = (1-a)(\sigma_{3,-j})^{-1}(1-\delta_i)^{-1}, \quad u_h = (1-a)(\sigma_{3,-j})^{-1}\delta_h(1-\delta_h)^{-1}.$$

に一意に決まる。

2) $n=k-1(k>2)$ のとき命題が成立すること，及び $n=k$ のとき $P_i(i=1, 2, \ldots k)$ が $P_j(i\neq j)$ に対して $a(0\leqq a\leqq 1)$ の配分を保障する契約を結んだ後の部分ゲームにおける各プレーヤーの完全均衡利得が,

$$u_i=(1-a)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_i)^{-1},$$

$$u_h=(1-a)(\sigma_{k,-j})^{-1}\delta_h(1-\delta_h)^{-1} \qquad \text{for all } h\neq i,j.$$

に一意に決まることを仮定した場合に $n=k$ で命題が成立する。

1) の証明

$n=2$ のとき Rubinstein の2人非協力ゲームと同じになるので，成立することは明かである。次に $n=3$ のとき，P_i が P_j に対して a の配分を保障する契約を結んだ後のサブゲームの完全均衡利得を調べる。代表して $i=1, j=2, h=3$ の場合を証明すればよい。他の場合も以下と同様に証明し得る。

D_1, $\bar{d}_1$, $\underline{d}_1$ を P_1 の提示で始まるサブゲームの P_1 の完全均衡利得の集合，その上限，下限と定義する。また D_3, $\bar{d}_3$, $\underline{d}_3$ も同様に定義する。このとき P_3 は $\delta_3\underline{d}_3$ より小さい提示を拒否するので $\bar{d}_1\leqq 1-a-\delta_3\underline{d}_3$。また P_1 は $\delta_1\bar{d}_1+a$ 以上の提示に同意するので $\underline{d}_3\geqq 1-(\delta_1\bar{d}_1+a)$。この二つの不等式より,

$$\bar{d}_1\leqq(1-a)(1-\delta_3)(1-\delta_1\delta_3)^{-1}=(1-a)(\sigma_{3,-2})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}.$$

同様の議論によって，$\bar{d}_3\leqq 1-(\delta_1\underline{d}_1+a)$，$\underline{d}_1\geqq 1-a-\delta_3\bar{d}_3$ であるからこの二つの不等式より,

$$\underline{d}_1\geqq(1-a)(1-\delta_3)(1-\delta_1\delta_3)^{-1}=(1-a)(\sigma_{3,-2})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}.$$

従って上限，下限の定義より $u_1=d_1=d_1=(1-a)(\sigma_{3,-2})^{-1}(1-\delta_2)^{-1}$ となる。このとき $u_3=(1-a)(\sigma_{3,-2})^{-1}\delta_3(1-\delta_3)^{-1}$。 Q. E. D.

2) の証明

まず，証明の準備に4つの補題を証明する。

補題1 $\underline{v}_i-v_i\geqq-\beta_{i,m}(\bar{v}_m-v_m)$ for all $m\in P_{-i}(k)$, $i=1, \ldots k$.

証明

代表して $i=1$ の場合を証明する。P_1 が P_j に提案するとしよう。P_j

が P_1 の提案を拒否した場合の彼の利得はせいぜい $\delta_j\bar{v}_j$ である。従って P_j にそれ以上の提案をすれば，彼は同意し得る。もし彼が同意すれば残りのプレーヤーは $k-1$ 人になり，2)の仮定より，ゲームはその期に終わり，P_1 の利得は，

$$(1-S_j)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_1)^{-1},\ S_j\geqq\delta_j\bar{v}_j.$$

彼はどのプレーヤーにも提案できるから少なくとも彼の完全均衡利得の下限は

$$\underline{v}_1\geqq(1-\delta_m\bar{v}_m)(\sigma_{k,-m})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}\qquad \text{for all } m\in P_{-1}(k).$$

式変形より

$$\underline{v}_1-v_1\geqq-\beta_{1,m}(\bar{v}_m-v_m)\qquad \text{for all } m\in P_{-1}(k).$$

他のプレーヤーから始まるゲームに関しても同様である。 Q. E. D.

補題2 $\bar{v}_1-v_1\leqq\underset{j\in P_{-1}(k)}{\mathrm{Max}}-\beta_{1,j}(\underline{v}_j-v_j)$

証明

補題1と同様に，代表して $i=1$ の場合を証明する。まず，P_1 の提案で始まるこのゲームの，完全均衡においてゲームが終了する時点を考えてみよう。最初の同意が起きた時点で残りのプレーヤーの数は $k-1$ になり，2)の仮定よりその期にゲームが終了する。従って，最初の同意が起きる期が，完全均衡においてゲームが終了する時点である。そこで，完全均衡において最初の同意が起きる時点を t として場合分けして，$\bar{v}_1$ を考える。

(1) $t=0$ の場合

P_1 が $P_j(j\neq1)$ に対して $\delta_j v_j$ より少ない提案をしても，P_j は必ず提案を拒否するから P_1 の利得は

$$\underset{j\in P_{-1}(k)}{\mathrm{Max}}(1-\delta_j\underline{v}_j)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}$$

を越えない。

(2) $t=1$ の場合

誰が最初の同意者になるかで，さらに場合分けする。P_1 が最初の同意者

である場合，彼の利得はせいぜい $\delta_1^2\bar{v}_1$ である。他のプレーヤーが最初の同意者である場合，彼の利得は2)の仮定より

$$\underset{j\in P_{-i}(k)}{\mathrm{Max}}\ \delta_1^2(1-\delta_j\underline{v}_j)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}$$

を越えない。

(3)　$t>1$ の場合

P_1 が提案者で終わる場合，彼の利得はせいぜい $\delta_1^t\bar{v}_1$ である。P_1 が最初の同意者である場合は，彼の利得はせいぜい $\delta_1^t\bar{v}_1$ である。それ以外の場合，彼の利得は

$$\underset{j\in P_{-i}(k)}{\mathrm{Max}}\ \delta_1^{t+1}(1-\delta_j\underline{v}_j)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}$$

を越えない。

以上の考察から $\bar{v}_1$ は

$$\bar{v}_1\leqq\underset{j\in P_{-i}(k)}{\mathrm{Max}}(1-\delta_j\underline{v}_j)(\sigma_{k,-j})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}.$$

式変形より，

$$\bar{v}_1-v_1\leqq\underset{j\in P_{-i}(k)}{\mathrm{Max}}-\beta_{1,j}(\underline{v}_j-v_j).$$

他のプレーヤーから始まるゲームに関しても同様である。　Q. E. D.

補題3　$\underline{v}_i\geqq v_i$ for all i.

証明

整数 x を整数 y で除した剰余を $\mathrm{mod}(x, y)$ で表わすとすると，補題1の式は任意の $m\neq i$ について成立するので，

$$\underline{v}_i-v_i\geqq-\beta_{i,\mathrm{mod}(i+1,k)}(v_{\mathrm{mod}(i+1,k)}-v_{\mathrm{mod}(i+1,k)})\ \text{for all}\ i. \qquad \text{(A3)}$$

としてなんら問題はない。また，補題2の式の右辺の最大値を与える j を $j(i)$ で表わすならば，

$$\bar{v}_i-v_i\leqq-\beta_{i,j}(i)(v_{j(i)}-v_{j(i)})\ \text{for all}\ i. \qquad \text{(A4)}$$

となる。(A3)を代入すると，

$$\bar{v}_i-v_i\geqq\beta_{i,\mathrm{mod}(i+1,k},\ \beta_{\mathrm{mod}(i+1,k),j(\mathrm{mod}(i+1,k)}$$
$$\times[\bar{v}_{j(\mathrm{mod}(i+1,k))}-v_{j(\mathrm{mod}(i+1,k))}].$$

任意の $i, j(i\neq j)$ について $0<\beta_{i,j}<1$, $|\underline{v}_i-v_i|<1$ であるから，この代入を右辺に対して続けていくと，極限で右辺は必ず0に収束するので，$\underline{v}_i-v_i\geqq 0$ となる。 Q. E. D.

補題4 $\underline{v}_i=\bar{v}_i=v_i$ for all i.

証明

(A4)及び補題3より，

$$\bar{v}_i-v_i\leqq-\beta_{i,j(i)}(v_{j(i)}-v_{j(i)})\leqq 0 \text{ for all } i.$$

補題3より $v_i\geqq v_i$ であるから，上限と下限の定義より，$v_i=\bar{v}_i=v_i$ でなければならない。 Q. E. D.

以上の補題の結果から2)を証明する。代表して P_1 の提示で始まるゲームの完全均衡を考えてみよう。完全均衡において彼が選択する提示相手を P_i とする。P_i は彼の提案を拒否することによって $\delta_i v_i$ の利得を得られると考えられるから，$\delta_i v_i$ 以上の提案に対してだけ合意することが完全均衡における戦略となる。このとき P_1 の最善の戦略は拒否されるような戦略をとるか $\delta_i v_i$ の提示をして同意をえるかどちらかである。まず同意を得られる戦略をとる場合彼の利得を調べる。同意が得られればプレーヤーの数は $k-1$ になり，2)の仮定より，彼の利得は

$$u_1=(1-\delta_i v_i)(\sigma_{k,-i})^{-1}(1-\delta_1)^{-1}$$

であり，(A1)，(A2) より，$u_1=v_1$ となることが確かめられる。これは補題4と整合する。また，他のプレーヤーの利得を調べると，

$$u_i=\delta_j(1-\delta_i v_i)(\sigma_{k,-i})^{-1}(1-\delta_j)^{-1} \qquad j\neq i,\ 1.$$

であり，同様に $u_j=\delta_j v_j$ となることが確かめられる。次に拒否されるような戦略をとった場合の彼の利得を考えてみよう。v_1 は正であるから有限期で必ずゲームが終了する。2)の仮定より最初の同意がおきた期にゲームは終了する。その期を $t(>0)$ としよう。$t=1$ のとき P_i が提案者である。補題4より彼の利得は v_i でなければならない。そのためには彼の提示相手 $P_j(i\neq j)$ に対して $\delta_j v_j$ の提示をすることが必要である。しかし，その際の P_1 の利得は $\delta_1^2 v_1$

であり，v_1 より必ず小さい。また $t \geqq 2$ の場合，P_1 が提案者のときの利得が $\delta_1{}^t v_1$，提案者でないときの利得が $\delta_1{}^{t+1} v_1$ であり，やはり v_1 より小さい。従って P_1 が $\delta_1 v_1$ の提示をすることが最善となる。

次に P_1 が提案相手として誰を選ぶのが最善か考える。彼が $P_m(m \neq 1)$ を提案相手に選んだ場合，P_m は少なくとも $\delta_m v_m$ の提示でない限り拒否するから，P_1 の利得はせいぜい，

$$u_1 = (1-\delta_m v_m)(\sigma_{k-1,m})^{-1}(1-\delta_1)^{-1} \text{ for all } m \in P_{-1}(k)$$

である。(A1)，(A2)より，任意のmに対して $u_1 = v_1$ であるから，どのプレーヤーを選ぶかに関して P_1 は無差別となる。従って $\delta_m v_m$ が同意される限り，どのプレーヤーを選ぶことも完全均衡戦略になりうる。

以上から，完全均衡は多数存在するが，その均衡利得は

$$u_1 = v_1, \ u_m = \delta_m v_m \text{ for all } m \in P_{-1}(k)$$

となり，2)が成立することが証明された。1)2)が成立するので数学的帰納法より，命題1' は証明された。　Q. E. D.

REFERENCES

K. G. Binmore, "Modeling Rational Players", CARESS Working Paper 85-36, University of Pennsylvania, 1985.

K. G. Binmore, "Nash Bargaining Theory", in Binmore & Dasgupta (eds.), The Economics of Bargaining, Blackwell, 1987, pp. 61–76.

S. Chae and J. Yang, "The Unique Perfect Equilibrium of an N-Person Bargaining Game", Economics Letters, 1988a.

S. Chae and J. Yang, "The Perfect Equilibrium of an N-Person Bargaining Game", mimeo, Rice University, 1988b.

M. Herrero, M. "A Strategic Bargaining Approach to Market Institution", Ph. D. Thesis, London School of Economics, 1985.

B. H. Jun, "A Strategic Model of 3-Person Bargaining", mimeo, Rice University, 1987.

A. Rubinstein, "Perfect Equilibrium in Bargaining Model", Econometrica, 50, 1982, pp. 97–109.

A. Shaked and J. Sutton, "Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargining Model", Econometrica, 52, 1984, pp. 1351–1364.

J. Sutton, "Non-cooperative Bargaining Theory: An Introduction", Review of Economic Studies 53, 1986, pp. 709–724.