平成四年三月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第149巻 第1・2・3号

平成4年1・2・3月

京都大學經濟學會

多属性効用分析の集団意志決定への拡張

――ファジィ集団多属性効用関数の同定によって――

朴　時　炫

I　はじめに―問題の提起―

キーニィら（Keeney〔6〕, Keeney and Raiffa〔9〕）によって開発された多属性効用分析（Multiattribute Utility Analysis）[1]は，多目的意志決定問題における多目的評価関数をフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルンの実数値効用関数に基づいて，分割されたシステムにおける多属性効用関数の評価問題に還元することである。システムを評価する主体を「意志決定者」と言うが，理論的には，多属性効用分析はただ一人の意志決定者によってなされることが想定されている。というのは，評価過程における情報の完全性が保障されて，かつ充分な知識，経験と判断力をもった「見識ある人」であると想定されている意志決定者が自分の主観的な判断に依存して意志決定を行うと，その決定は社会的にも望ましいというのが暗黙の内に仮定されている。すなわち，集団的な意志決定に伴う諸問題[2]は考慮に入れられていない。

しかし，実際の意志決定問題，とりわけ公共部門における意志決定問題は，多数の人からなる集団によって行われるのがより一般的である。

このような現実問題に応じて，おもにキーニィとカークウッドら（Keeney〔7〕, Keeney and Kirkwood〔8〕, Kirkwood〔10〕）によって多属性効用分

1) 多属性効用分析については Keeney and Raiffa〔9〕，瀬尾〔19〕3章―5章を参照せよ。

2) 一般に，集団意志決定における難しさはアローの不可能性定理としてよく知られている（Arrow〔1〕）。しかし，この理論は個人効用の序数的選好順序に基づくものであり，個人の基数的選好に基づくと集団選好関数が定式化できるという研究は別個に進められている。これについては拙稿（〔15〕）を参照せよ。

析を集団意志決定に拡張しようとする試みが行われた。彼らは単一意志決定者による多属性効用関数の表現定理と類似な集団多属性効用関数の表現定理を提示した。

しかし，キーニィとカークウッドの表現定理にしたがって集団多属性効用関数を同定する際，問題点としては，1）効用の個人間比較が困難であること，2）集団の中で占める個々の個人の相対的な重みを表わすスケール定数を決定するのが困難であることが指摘されてきた（Kirkwood〔10〕）。

ところで，もし意志決定過程をとりまく環境が不完全で，かつ曖昧な情報を含んでおり，個々の意志決定者が自分の選好を妥協できない正確な数値あるいは順序としてではなく，むしろ，「だいたいこのくらい」という不正確で曖昧な区間として表現するために，ある範囲内では対立する個人の選好間に妥協できる可能性があるならば，対話的な学習過程を含む反復的調整過程を通じて，個人の選好から集団の選好を構成することの可能性が考えられている[3)]。

本稿では，多属性効用分析において，各々の属性に対して，個々の個人の効用あるいは選好度が不正確な数値あるいは曖昧な言葉として評価されたとき，個人の効用関数から集団の効用関数を導く1つの方法としてファジィ集団多属性効用関数（Fuzzy Group Multiattribute Utility Function：以下では簡単にＦＧＭＵＦという）の同定方法を提案したい。

今まで，ＦＧＭＵＦについての研究は，ファジィ選好関係論を用いて，多様な個人の選好関係から集団の選好関係を導出しようとするブリンらの研究に基づき，さらにファジィ数理論を加えて，ファジィ集団多属性効用関数を導出しようとした瀬尾ら（Seo and Sakawa〔17〕,〔18〕）がある。

本稿では瀬尾らのＦＧＭＵＦの概念に基づきながらも，ファジィ優先順位論

3） このような予想の背景には，意志決定者としての人間が，孤立した利己的な個人でなく利他的で市民共同体的な存在であるということが分析の前提とされている（瀬尾〔16〕第10章）。例えば，ハルサニは，集団に対する個人の効用判断は個人の処している状況および嗜好よりもある程度偏見がない（impartial）あるいは非個人的な（impersonal）社会観に基づいて行うので，個人間の効用の比較はある程度可能であると主張する（Harsanyi〔5〕）。

を導入し，曖昧な言葉で表された属性間の選好の優先度から集団のスケール定数を導出する方法に重点を置いて進めていきたい。

以下，まずII節では，多属性効用分析を集団意志決定への拡張するための表現定理ないしファジィ化に関する基本的な概念について述べた後，ファジィ集団多属性効用関数を同定する過程を明らかにする。III節では実際の地域計画の問題を例として挙げ，ファジィ集団多属性効用分析による意志決定を行う。最後に，IV節では，本稿で提示された方法がもっている若干の問題点を指摘する。

II　ファジィ集団多属性効用関数（ＦＧＭＵＦ）の同定

1. 集団多属性効用関数の同定

キーニィら（Keeney and Kirkwood〔8〕）の定理にしたがうと，集団多属性効用関数は次のような表現型をもって評価されることになっている。

加法型

$$U_G(X)=\sum_{k}^{m}\lambda_k u_k(X), \qquad \text{if} \quad \sum\lambda_k=1 \tag{1}$$

または

乗法型

$$\lambda U_G(X)+1=\prod_{k}^{m}[\lambda\lambda_k u_k(X)+1], \qquad \text{if} \quad \sum\lambda_k\neq 1 \tag{2}$$

式(1)，(2)で，$X=\{x_i\}$, $i=1,\cdots,n$, は属性の集合であり，Uとu_kは0から1までにスケールされた集団および個人k, $k=1,\cdots m$, の効用関数を表わす。また，λ_k, λ はスケール定数で，全てのkに対して$0<\lambda_k<1$, かつ，$\lambda>-1$である。

式(1)，(2)が意味するのは，個人の多属性効用関数が同定されているとすれば，集団の多属性効用関数は個々の個人の多属性効用関数に適切な重み係数をつけて，加法あるいは乗法を行うことによって求められることである。

しかし，本稿では，後に述べる優先順位論によるファジィ集団スケール定数を評価するために，個人および集団における加法型多属性効用関数のみを分析

の対象にする。

さて，式(1)にしたがって，集団多属性効用関数を完成するためには，1) 各個人の u_k に関するスケールを決定することおよび，2) スケール定数 λ_k, $k=1,\cdots,m$, を定めることが必要である。

1)の各個人の u_k にスケールを設定することは，共通の測度をもつスケール，すなわち，効用スケール上で，異なる個人の選好が何であるかを明記することである。それは，本質的に，選好の個人間比較を行うことであるが，今まで異なる人々の効用関数を比較する外的な尺度は発見されていないように見える (Kirkwood〔10〕)。

2)のスケール定数 λ_k, $k=1,\cdots,m$, を決定することは，集団の中で占める個人 k の重要度を決定することである。これは (u_1, u_2, $\cdots$, u_m) の空間における異なる点の間の無差別点を見つけることである。しかし，個人間の重要度を評価するのは，人間に関する価値判断に関わる問題であり，それができるとしても，異なる u_k の値は直接的な物理的意味がないという事実によって，スケール定数を決定することは困難になっている (Kirkwood〔10〕)。

このような問題を避けるために，本稿では式(1)にしたがって集団多属性効用関数を同定せずに，以下の式(4)，(5)のような関数型から集団多属性効用関数を同定する工夫をしたい。それは，個人間に存在する評価の多様性を考慮しながら，多様な個人の選好から，集団を構成する人々が（たいてい）において満足し得る水準での集団効用関数を妥協的に導出することである。

まず，加法型集団多属性効用関数 $U_G(X)$ を

$$U_G(X)=\sum_{i}^{n} k_{Gi}U_{Gi}(x_i) \tag{3}$$

で表わす (Eliashberg and Winkler〔4〕)。式(3)で U_{Gi}, $k_{Gi}>0$ は属性 x_i に対する集団の効用関数およびスケール定数で，それぞれは集団の内で個人の位置を表わす λ_k, $k=1,\cdots,m$, によって重みづけられた個人の効用関数 $u_{ki}(x_i)$, $k=1,\cdots,m$, およびスケール定数 k_{ki}, $k=1,\cdots,m$, の関数である。すなわち，

$$U_{Gi}(x_i)=U(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ u_{1i}(x_i),\ u_{2i}(x_i),$$

$$\cdots,\ u_{mi}(x_i)), \qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{4}$$

$$k_{Gi}=k(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ k_{1i},\ k_{2i},\ \cdots,\ k_{mi})\ i=1,\ \cdots,\ n \tag{5}$$

である。

ところで，集団の中で個人の重要度は同じである。すなわち，$\lambda_1=\lambda_2=,\ \cdots,\ \lambda_n=\lambda'$，と仮定すれば，式(4)，(5)は次のような関数型となる。

$$U_{Gi}(x_i)=U(\lambda',\ u_{1i}(x_i),\ u_{2i}(x_i),\ \cdots,\ u_{mi}(x_i)),\ i=1,\ \cdots,\ n \tag{6}$$

$$k_{Gi}=k(\lambda',\ k_{1i},\ k_{2i},\ \cdots,\ k_{mi}), \qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{7}$$

それ故，式(3)の集団多属性効用関数の同定は個人別に評価された効用値およびスケチル定数から集団の構成員が（ある程度）満足し得る集団の効用値およびスケール定数を集計するルールに関わる問題となる。ここで，ある程度はファジィ概念である。また，満足し得る集団効用関数というのは，得られた結果の合理性よりも得られる「過程の合理性」から判断すべきである（瀬尾〔19〕pp. 16-178)。

本稿で提示するＦＧＭＵＦは，このようなファジィ集団効用関数を同定する１つの方法である。

ＦＧＭＵＦの同定の手順を多属性効用関数の導出過程と比べ示すと（図１）になる。

図1に示されたように，多属性効用関数のファジィ化は２つの段階で行われる。

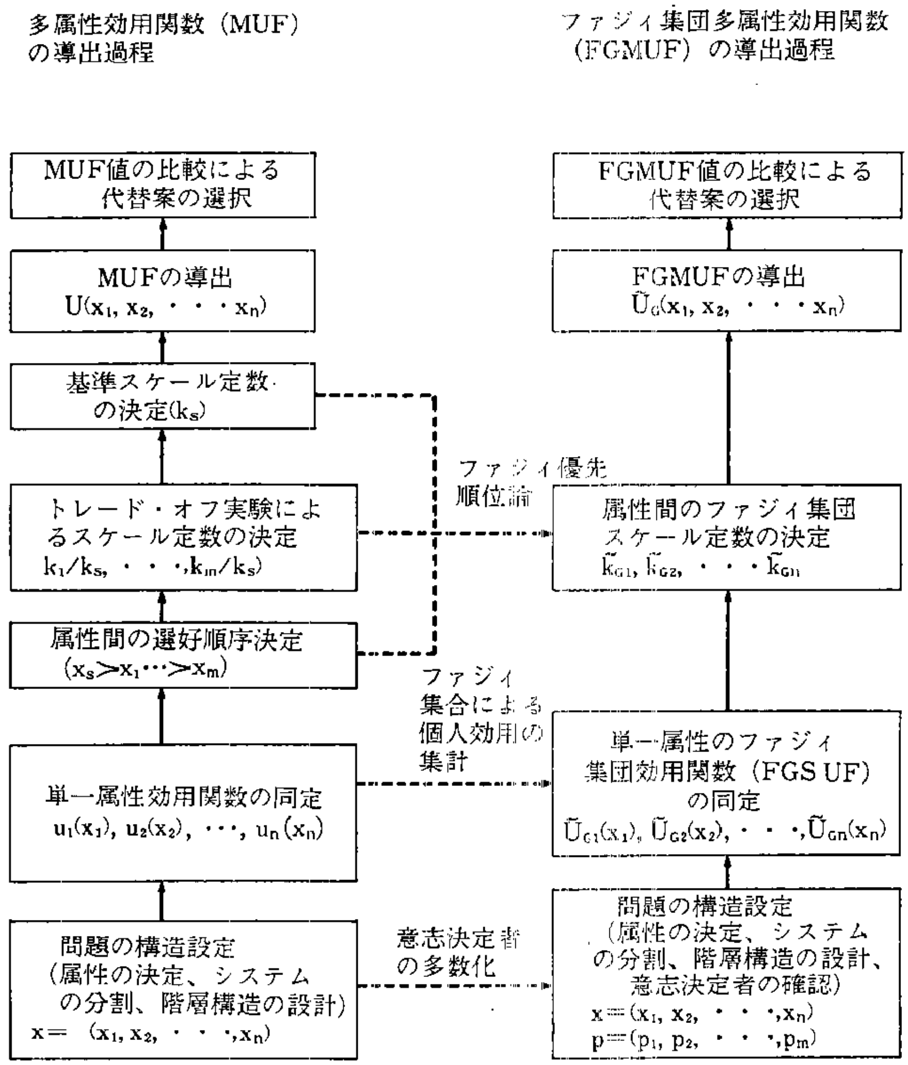
第１段階は個々の意志決定者がファジィ数として評価した単一属性効用関数（ＦＳＵＦ）からファジィ集団単一属性効用関数（ＦＧＳＵＦ）を同定する過程である。この過程ではファジィ集合の演算原理が応用される。第２段階は，個々の意志決定者が，ファジィで表現された属性間の選好関係からファジィ集団スケール定数を導出する過程である。

以下ではそれぞれの段階についてのファジィ化の方法を述べる。

2. ファジィ集団単一属性効用関数（ＦＧＳＵＦ）の同定

多属性効用分析における単一属性効用関数を評価する場合，意志決定者は

図1 FGMUF の導出過程



「くじ」実験によって属性 x_i の確実同値額 $\hat{x}_i$ を正確な数値として評価[4] することを前提にしている。しかし，属性に関する完全な情報を知らないとき，意志決定者はある範囲をもつ数値として彼あるいは彼女の確実同値額を評価す

4) 「くじ」実験による確実同値額の決定については，Raiffa, H. *Decision analysis*, Addison-Wesley. Massachussetts, 1968, あるいは，瀬尾〔13〕第4章を参照せよ。

るだろう。

たとえば，意思決定者 k が属性 x_i に対して，0.5の期待効用をもつある「くじ」に関する確実同値額（$u_{ki0\cdot5}(x_i)$）を，$\hat{x}_{li}$ から $\hat{x}_{ri}$ までの区間のとして評価したとしよう。この場合，確実同値額は次のように，メンバーシップ関数をもつファジィ集合[5]として表せる（図２）。

$$\tilde{u}_{ki0\cdot5}(x_i)=\{x_i,\ \mu u_{ki0\cdot5}(x_i)\} \qquad (8)$$

$$但し\ \mu u_{ki0\cdot5}(x_i)=\begin{cases} 0, & x_i<\hat{x}_{li},\ x_i>\hat{x}_{ri} \\ [0,1], & \hat{x}_{li}\leqq x_i\leqq \hat{x}_{ri} \end{cases}$$

個人 k の確実同値額が式(８)のようなファジィ集合で評価されると，これに基づいて同定された個人 k の単一属性関数は，（図３）のように幅をもつファジィ効用関数として表される。図３で，確実同値額に関するメンバーシップ関数は横軸で描かれている。

さて，個人の効用関数がファジィ確実同値額によって，幅をもつファジィ効用関数になると，正確な属性値 x_i に対応する個人 k の効用値は，正確な数値でなく区間として表されることになる。そこで，属性値 x_i に対する個人 k の

図２　個人 k の確実同値額のメンバーシップ関数

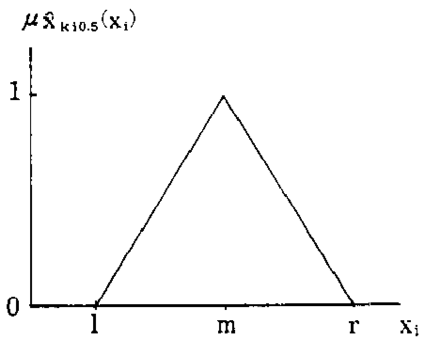
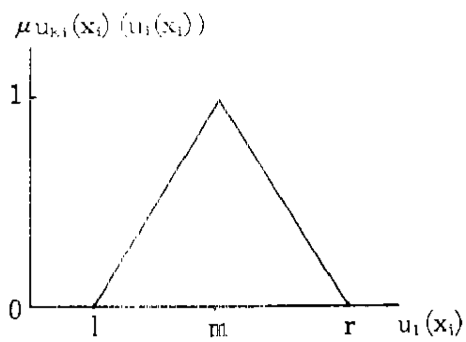
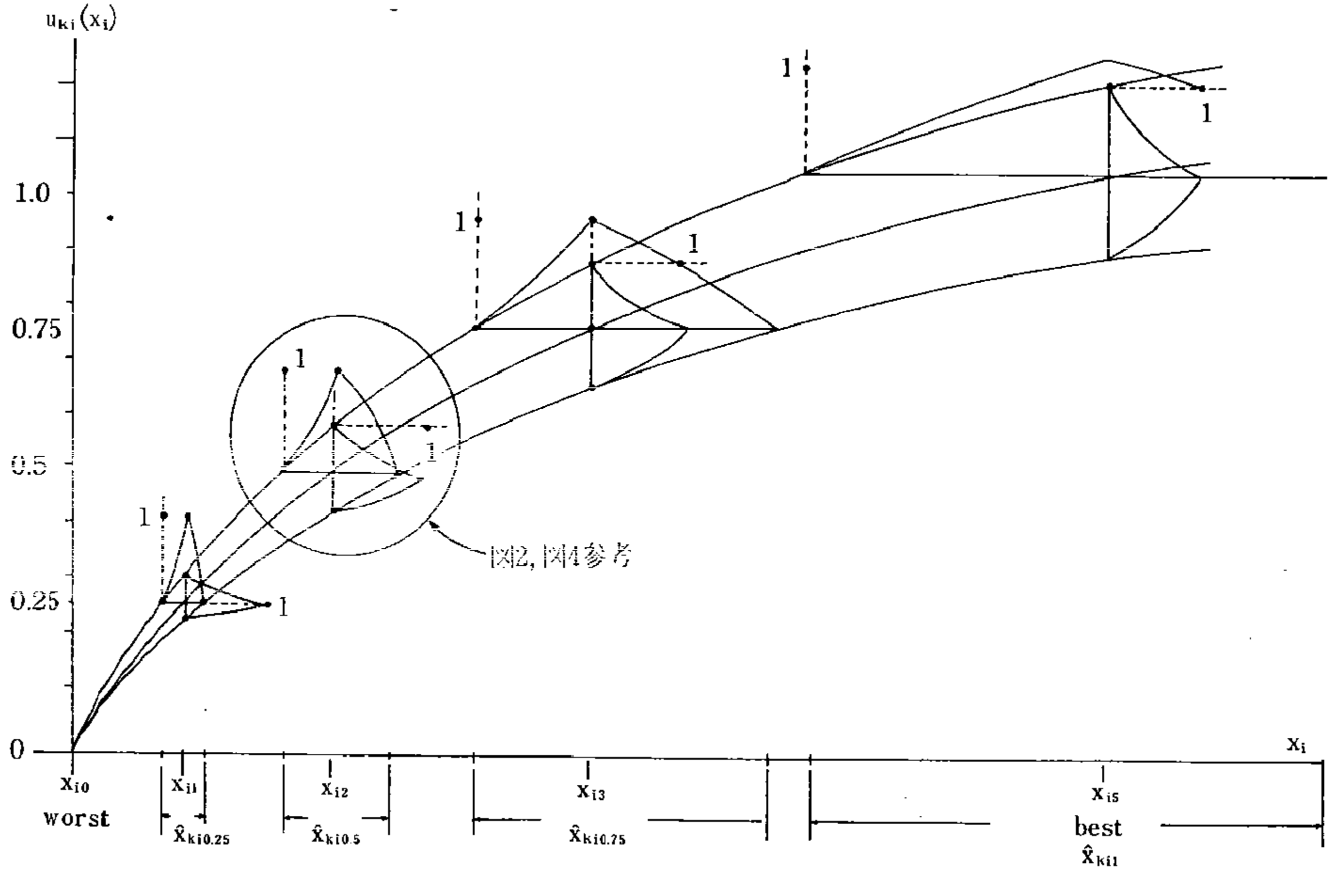


図４　個人 k の効用値に関するメンバーシップ



5)　ファジィ集合に関する書物は，最近山ほどあるが，本稿では，おもに Zimmermann〔20〕，日本語書物としては，水本雅晴，『ファジィ理論とその応用』，サイエンス社，を参考した。

図3 個人の単一属性効用関数に関するファジィ評価



効用値は，次のようなメンバーシップ関数をもつファジィ集合として表現できる。

$$\mu u_{ki}(x_i)(u_i(x_i)) \tag{9}$$

これは，図4の縦軸に表されている。

このような個人kの効用関数のファジィ集合は，$u_i(x_i)\in[0,1]$という連続な数値線上で，ファジィ数（Zimmermann〔20〕pp. 51）として表すことができる。

本稿では，それを，三角タイプ・ファジィ数（Triangular Fuzzy Numbers, 以下では簡単に T. F. N. という）を用いて表すことにしよう。

T. F. N. は，ファジィ数を表すのに一般的に用いられる，次のように定義される L-R タイプ・ファジィ数の特殊形態にほかならない。

○**定義1**：L-R タイプファジィ数（Dubois and Prade〔3〕）

メンバーシップ関数 $\mu_M(x)$ が次のように定義されるファジィ数を L-R タイプファジィ数と呼ぶ。

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L((m-x)/\alpha) & \text{if} \quad x\leqq m,\ \alpha>0 \\ R((x-m)/\beta) & \text{if} \quad m\leqq x,\ \beta>0 \end{cases} \tag{10}$$

但し，L, R は型関数（reference function）と呼ばれ，次の性質を満足する。

1) $L(x)=L(-x)$, $R(x)=R(-x)$

2) $L(0)=1$, $R(0)=1$

3) $0\leqq x<+\infty$ において，$L(x)$ と $R(x)$ は厳密に減少関数

また，L-R タイプファジィ数は簡単に $M=(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR}$ と表現する。ここで m, α, β は，それぞれファジィ数Mの平均値，左測広がり（left spread）および右測広がり（right spread）を表わす。

○**定義2**：三角タイプ・ファジィ数（Laarhoven and Pedrycz〔12〕, Kaufmann and Gupta〔11〕）

メンバーシップ関数 $\mu_M(x)$：$R\to[0,\ 1]$ が次のように定義されるファジィ数Mを三角タイプファジィ数と呼ぶ。

$$\mu_M(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m-l}x-\dfrac{l}{m-l}, & x\in[l,\ m]\\ \dfrac{1}{m-r}x-\dfrac{r}{m-r}, & x\in[m,\ r]\\ 0 & ,\ その外\end{cases} \tag{11}$$

但し，ここで，l, m, r, $l\leqq m\leqq r$, はそれぞれファジィ数Mの下端（lower value），中間値（modal value），上端（upper value）を示している（図2参照）。また，定義2によるファジィ数を簡単に $M=(l,\ m,\ r)$ と表現する（Laarhoven and Pedrycz〔12〕, Kaufmann and Gupta〔11〕p. 269）。

定義1と2の関係において，定義2の T. F. N. は，$L(x)=R(x)=-|x|+1$ で，$\alpha=m-l$, $\beta=r-m$ である定義1の L-R タイプファジィ数と言える[6]。

もとの話に戻ろう。個人 k の単一属性効用関数を，定義2にしたがって，T. F. N. で表すと

$$\tilde{U}_{ki}(x_i)\triangleq(m,\ l,\ r) \tag{12}$$

となる。ここで，mは，区間で評価された効用値の中間値，l, r は下端，上端をそれぞれ示している。

このように個人の単一属性効用関数がファジィで評価されるならば，式(6)によって定式化される集団単一属性効用関数も，ファジィ効用関数として表現されるべきである。この際，問題になるのは何の集計原理を適用するかである。ここでは次のようなファジィ集合の演算原理を利用する[7]。

○**定義3：ファジィ集合の共通集合**

ファジィ集合 A, B の共通集合（intersection）$A\cap B$ は次のように定義される。

---

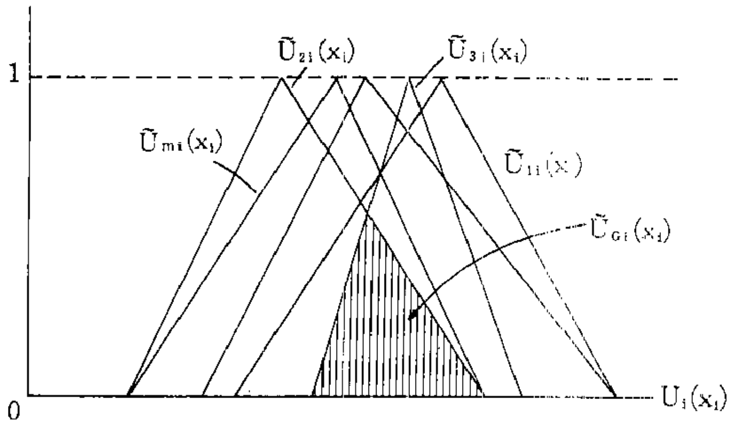
6) 定義1によって，型関数が $L(x)=R(x)=-|x|+1$ である L-R タイプファジィ数は

$$\mu(x)=\begin{cases}-|(m-x)/\alpha|+1\\ \\ -|(x-m)/\beta|+1\end{cases}$$

である。ここに，$\alpha=m-l$ および $\beta=u-m$ を代入すると定義1が導かれる。

7) ファジィ共通集合演算原理に基づいて個人の効用関数から集団の効用関数を集計する試みは西崎と瀬尾（Nishizaki and Seo〔14〕）がある。

図5　ファジィ集団単一属性効用関数



$$A\cap B=\mu_{A}\cap_{B}(x)=\min\{\mu_{A}(x),\ \mu_{B}(x)\}$$
$$=\mu_{A}(x)\wedge\mu_{B}(x),\qquad \forall x\in X, \tag{13}$$

上記の定義に基づくと，式(6)の集団単一属性効用関数は

$$\mu\ U_{Gi}(x_i)=\{(U_{Gi}(x_i),\ \mu\ U_{1i}\cap U_{2i}\cdots\cap U_{ni}(x_i)\,|\,x_i\in X)\} \tag{14}$$

単に，

$$\mu\ U_{1i}\cap U_{2i}\cdots\cap U_{ni}(x_i)=\min\{\mu\ U_{1i}(x_i),\ \mu\ U_{2i}(x_i),$$
$$\cdots,\ \mu\ U_{2i}(x_i)\} \tag{15}$$

のようなメンバーシップ関数によって特定化される効用関数である（図5）。

3. 属性間のファジィ集団スケール定数の決定

1)　トレード・オフによるスケール定数の決定法の問題点

多属性効用分析の場合スケール定数の決定は図1で示されているように3つのステップで行われる。第1ステップは属性の間の選好順序，x_s, x_i, ⋯, x_n を定めることである。第2ステップには，2属性間のトレード・オフ実験によってスケール定数間の相対比率を求める。つまり，各属性の中で，もっとも選好される属性 x_s をベースとしてとり，他の属性 x_i, $i=1, \cdots, n$, $i\neq s$, との間の，各々の2属性の組のトレード・オフ値を決定する。このようなトレード・オフ

実験は，「ある属性 x_i の値を最良値から最悪値にもって行くためには，それと引き換えにもっとも選好される（重要視される）属性 x_s の値をどれだけ放棄することができるであろうか？」という質問にこたえる形で進められる。このような実験によって，多属性効用関数の表現定理を用いて，$k_i/k_s=u_s(x_{sx})$, $i=1,\cdots,n$, $i\neq s$, の式が得られる。関数 u_s は既に同定されているから，x_{sx} 値を付与することによって，スケール定数間の相対比率 k_i/k_s が求められる。第3ステップは，もっとも選好される（重視される）属性 x_s に対する絶対値のスケール定数 k_s を決定する。ベースとしてとらえた k_s が求められると全てのスケール定数 k_i, $i=1,\cdots,n$, $i\neq s$, の数値が全部決定されることになる。

このようにして，求められたスケール定数の値は，諸属性に関する選好順序に対応していなければならない。

しかし，トレード・オフ実験自身が，一般に意志決定者にとっては曖昧なこととして認識されている。すなわち，普通の意志決定者は2属性間のトレード・オフ比率を，正確な数値よりも，むしろ不正確な数値である区間あるいは曖昧な言葉として認識しているのが一般的な事実である。

それ故，属性値についての完全な情報の欠如，あるいは評価値における曖昧さが存在する場合，トレード・オフ実験によって，各属性の重みづけを首尾一貫させることは大変困難である。

さらに，上記のトレード・オフ実験にしたがって，個人意志決定者のスケール定数を評価しても，それを集団のスケール定数に集計するルールが存在しない限り，集団多属性効用分析にその方法を適応することは困難である。

本稿では，このような曖昧な問題を含んでいる集団多属性効用分析において，集団スケール定数を評価する1つの方法として，Saaty（[16]）によって提案された優先順位論を応用したい。

Saaty の優先順位論は，加法型の多目的意志決定問題において各目的の重要性（優先度）を表すのに曖昧さが存在する場合に，各々の目的の重み係数を求める方法として開発された。その理論の基本的な考え方は，多数の目的の中か

ら2目的の組（F_i, F_j）をとって，2目的間の相対的な重要度 r_{ij}, $i, j=1, \cdots m$）を評価して，それを要素とする行列R（各々目的の相対的重要度行列）を構成，その行列から固有ベクトルを求め，それを定規化することによって各目的の重み係数（W_i）を算出することである（Saaty [16]）。

重み係数を算出する方法について，Saaty の優先順位論と多属性効用分析とを比べてみると，2属性の組をとって各々属性の相対的な重要度（選好度）を評価した上で，全体の重み係数を算出するという基本的な考え方は一致している。しかし，多属性効用分析の場合，2属性間のスケール定数の比率（$0<k_i/k_s<1$）は基準となる s 属性の効用値を用いて表され，この過程において確率評価実験を行う必要があるのに対し，優先順位論の場合には，2目的間の相対的な重要度（$0<r_{ij}<1$）は意志決定者が評価する数値として直接に割り当てられるので，確率評価実験を行う必要がない。しかし，$\sum k_i=1$ である加法型の場合には，もし意志決定者が「見識ある人」で，一貫性を保って各属性の選好順序を評価しているならば，求められた結果は，$k_i=W_i$ となるはずである。

したがって，Saaty の優先順位論における「目的」を多属性効用分析の多属性」に入れ換えると，その方法は加法型の多属性効用分析における属性間の重み係数を求める代替案として応用できる。さらに，Saaty の優先順位論を多数の意志決定者が存在する場合まで拡張することによって，式(7)のような関数型としての集団スケール定数を得ることができる。

以下では，まず Saaty の優先順位論に基づいて，多属性に対するスケール定数を当める具体的な方法について触れた後，その原理をファジィ環境へ拡張する方法について述べる。

2）優先順位論

N個の属性，F_1, $F_2, \cdots F_n$, からなる意志決定問題において，ある意志決定者が当面している問題は各属性に対する正規化された正の重み係数，$w_1, w_2, \cdots, w_n$ を評価することとしよう。このとき，「正規化された」というのは $\sum w_i=1$ で，求めようとする多属性効用関数が加法型であることを意味する。

重み係数を求めるために，まず意志決定者は，N個の属性の中から2目的の組 (F_i, F_j) をとって，F_i と F_j との重要度の相対比を数値 r_{ij} と評価し，それを要素とする行列 $R=(r_{ij})$ を構成したとしよう。その行列Rを評価行列と呼ぶことにしよう。$r_{ij}\cdot r_{ji}=1$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, であるから評価行列は reciprocal matrix である。r_{ij} は F_i と F_j との重要度の相対比を示しているから，F_i と F_j との重要度が同じであると評価されるならば $r_{ij}=1$, F_i が F_j より重要であると考えられるならば，$r_{ij}>1$ である。また，r_{ij} と，評価行列Rから事後的に求められる正規化された重み係数の比 $p_{ij}=w_i/w_j$ との間には

$$r_{ij}=p_{ij}(1+\varepsilon_{ij}) \tag{16}$$

という関係が成り立つ。式(16)で ε_{ij} は r_{ij} から p_{ij} を評価するのに発生する評価誤差を示している。したがって，我々の目的は評価行列から正規化された重み係数 w_1 $w_2, \cdots, w_n$ の近似値を求めることである。

これに関する方法ではいくつかがあるが[8]，その中の1つの方法として Lootsma ([13]) が提案した対数回帰方法がある。この方法は，意志決定者が多数の場合にも，適用可能な長所をもっている。

この方法の基本的な考え方は，次の式を最小化する正規化されたベクトル α を計算することによってWの値を求めることであることである。

$$\sum_{i<j}^{n} (\ln r_{ij}-\ln(\alpha_i/\alpha_j))^2 \tag{17}$$

式(17)で $\alpha_i/\alpha_j \fallingdotseq w_i/w_j=p_{ij}$ の関係がある。

要するに，重み係数 w_i を，式(16)を α_i に関して解け，その解を正規化，$\sum\alpha_i=1$, することによって近似的に求める。

この方法は意志決定者が多数の場合にも適用されることができる。

もし，多数の意志決定者が各属性の相対的な重要度を評価する場合，先の評価行列Rの要素 r_{ij} は，その組を評価した意志決定者の人数だけ増加する。意思決定者の数を δ_{ij} として数えるとする。つまり，δ_{ij} は r_{ij} を評価した意志

8) Lootsma〔13〕によると，これらの方法には対数回帰方法の外にも，固有値ベクトル法，行合計を正規化する方法，列合計の逆数による方法等がある。

決定者の数を示している (r_{ij} に対して誰も評価しなかった場合，$\delta_{ij}=0$ となる)。式(17)に多数の意志決定者を入れると，次式になる (Lootsma〔13〕)。

$$\sum_{i<j}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}(\ln r_{ijk}-\ln(\alpha_i/\alpha_j))^2 \tag{18}$$

式(18)で $r_{ijk}(k=1, 2,\cdots, \delta_{ij})$ は k 番目の意志決定者が評価した F_i と F_j との間の相対的な重要度を示している。

式(18)は次のように解ける。まず，$\ln r_{ijk}$ を y_{ijk} に，$\ln\alpha_i$ を x_i に ($i=1, 2, \cdots, n$) それぞれ置換することによって，式(18)の対数式を実数式にすると，

$$\sum_{i<j}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}(y_{ijk}-x_i+x_j)^2 \tag{19}$$

となる。式(19)を x_i に関して偏微分し，その結果をゼロにすることによって正規方程式を作ると

$$x_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}x_j=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}y_{ijk} \tag{20}$$

のような連立方程式になる。式(20)を x_i に関して解き，その解を指数化することによって α_i の値を求める。最後に α_i の値を正規化することによって重み係数 wi の絵似値が求められる (Lootsma〔13〕)。

3) ファジィ優先順位論

Laarhoben and Pedrycz (〔12〕) は，上記の Lootsma のアルゴリズムに，ファジィ数演算原理を導入して，多数の意志決定者が各属性の相対的重要度をファジィ数として評価する場合における重み係数を求める方法を示した。この方法をファジィ優先順位と呼ぶことにしよう。この方法は，ファジィ数の特殊なケースである三角タイプ・ファジィ (T. F. N.) 数演算原理に基づいている。

○ T. F. N. 演算原理

2つの T. F. N を $A=(l_A, m_A, r_A)$, $B=(l_B, m_B, r_B)$ とすると

1) 足し算 ⊕

$$A\oplus B=(l_A+l_B,\ m_A+m_B,\ r_A+r_B) \tag{21}$$

2) 引き算 ⊖

$$A \ominus B = (l_A - r_B,\ m_A + m_B,\ r_A - l_B) \tag{22}$$

3) 掛け算 ⊙

$$A \odot B \cong (l_A l_B,\ m_A m_B,\ r_A r_B) \tag{23}$$

4) 逆算

$$(l,\ m,\ r)^{-1} \cong (1/r,\ 1/m,\ 1/l) \tag{24}$$

5) log 算

$$\ln(l,\ m,\ r) \cong (\ln l,\ \ln m,\ \ln r) \tag{25}$$

6) 指数算

$$e^{(l,m,r)} \cong (e^l,\ e^m,\ e^r) \tag{26}$$

のような演算法則が成立つ。ここで，$\cong$は近似であることを示している。

上記の演算原理のなかで，1)の足し算と，2)の引算および3)の掛け算の演算原理は，α を $m-l$, β を $u-m$ に入れ換えることによって，L-R タイプファジィ数の足し算，引算および掛け算の演算原理と同値関係にある。但し，L-R タイプファジィ数演算原理の場合と同様に，1) と2) の演算結果は T. F. N であるが，3)の掛け算の演算結果は必然的に T. F. N ではない。それ故，その演算結果は近似的に求められている。1)，2)および3)に対する L-R タイプファジィ数演算原理については Dubois and Prade ([3] pp. 53-57) に述べられている。

一方，4)，5) および6) の演算原理については，Laarhoven and Pedrycz ([12]) および Kaufmann and Gupta ([11] pp. 28-31 と pp. 55-67) によって考察されている。たとえば，4)の逆関数の場合，次のようにして演算原理の表現型が導かれる。まず，α-レベル集合，$\alpha \varepsilon$ [0, 1]，を用いて，T. F. N. である $M=(l,\ m,\ r)$ のメンバーシップが α 以上である確信区間 (interval of confidence, Kaufmann and Gupta [11] pp. 19-24) を表すと，定義2の式(11)から

$$M\alpha = [l + (m-l)\alpha,\ r - (r-m)\alpha] \tag{27}$$

となる。式(27)で [ ] 内の値は確信区間の両端点を示している。

同様に，M^{-1} の α-レベルの確信区間は

$$M\alpha^{-1}=[1/(r-(r-m)\alpha),\ 1/(l+(m-l)\alpha)] \quad (28)$$

となる。

さて，

$$M\alpha^{-1}=[1/r,\ 1/l]\ ;\ \alpha=0 \quad (29)$$

$$M\alpha^{-1}=[1/m,\ 1/m]=1/m\ ;\ \alpha=1 \quad (30)$$

であるから，$x=1/r,\ 1/m,\ 1/l$ におけるメンバーシップ関数は，

$$P=(1/r,\ 1/m,\ 1/l) \quad (31)$$

と定義される T. F. N. のメンバーシップ関数と一致する。それ故，M^{-1} は次のような T. F. N. として近似的に表される。

$$(l,\ m,\ r)^{-1}\cong(1/r,\ 1/m, 1/l) \quad (32)$$

ここで，近似的というのは，区間 $[1/r,\ 1/l]$ 内の $1/r,\ 1/m,\ 1/l$ 以外の点において，M^{-1} のメンバーシップとPの メンバーシップ とは一致しないことを意味する。その不一致，すなわち，相違は以下のように計算できる。

$P=(1/r,\ 1/m,\ 1/l)$ の α-レベル確信区間は，

$$P\alpha=[1/r+(1/m-1/r)\alpha,\ 1/l-(1/l-1/m)\alpha] \quad (33)$$

であるから，$M\alpha^{-1}$ と $P\alpha$ との相違 (divergence) は

$$\varepsilon_l\alpha=(1/(r-(r-m)\alpha))-(1/r+(1/m-1/r)\alpha) \quad (34)$$

$$\varepsilon_r\alpha=(1/(l+(m-l)\alpha))-(1/l-(1/l-1/m)\alpha) \quad (35)$$

であり，最大相違値は上記の式をそれぞれ α に関して微分し，その結果を0にする α 点において，

$$\varepsilon_l{}^*=-(1/\sqrt{m}-1/\sqrt{r})^2 \quad (36)$$

$$\varepsilon_r{}^*=-(1/\sqrt{l}-1/\sqrt{m})^2 \quad (37)$$

となる。このようにして得られた最大相違値が，認められることができるほどのわずかな値であれば，M^{-1} は T. F. N. のPによって近似的に演算できる。

同様にして，5)の log 算および6)指数算の近似表現型 も導くことができる (Kaufmann and Gupta [11] pp. 55-67)。

話をもとに戻そう。式(18)で表されたような r_{ijk} が T. F. N. $\tilde{r}_{ijk}=(l_{ijk}, m_{ijk}, r_{ijk})$ として評価されるならば，評価行列 $R=(r_{ijk})$ も T. F. N. 行列になる。但し，T. F. N. 行列を作る時，注意したいことは，$\tilde{r}_{ijk}=(l_{ijk}, m_{ijk}, l_{ijk})$ から r_{jik} の導出は，上記の T. F. N. 逆関数原理について，$\tilde{r}_{jik}=(1/r_{ijk}, 1/m_{ijk}, 1/l_{ijk})$ となることである。評価行列か T. F. N. として表されるならば，求めたい重み係数 W_i もファジィ数として表現されるべきである。

Laarhoben and Pedrycz が提示した方法は，式(20)の y_{ijk} に $\tilde{y}_{ijk}=(l_{ijk}, m_{ijk}, r_{ijk})$ および x_i に $\tilde{x}_i=(l_{xi}, m_{xi}, r_{xi})$ を代入することによって，式(20)をファジィ化した後，T. F. N. の足し算および引算の演算原理に基づき，次のような正規方程式を作ることである（Laarhoven and Pedrycz〔12〕)。

$$l_{xi}(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij})-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}r_{xi}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}l_{ijk} \tag{38}$$

$$m_{xi}(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij})-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}m_{xi}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}m_{ijk} \tag{39}$$

$$r_{xi}(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij})-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}l_{xi}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}r_{ijk} \tag{40}$$

Laarhoben and Pedrycz は，上記の式を導く過程を具体的に明示しなかったが，式(38)—(40)が導出される背景には，T. F. N. log 演算原理およびファジィ数微分法則が利用されている。

まず，式(18)の r_{ijk} が T. F. N. であるから，上記の log 演算原理 5)に基づいて式(19)の y_{ijk} は $\tilde{y}_{ijk}=(l_{ijk}, m_{ijk}, r_{ijk})$ に変わる。求めたい w_i が T. F. N. であると仮定すれば（仮定できない理由はない），式(18)の α_i も $\tilde{\alpha}_i=(l\alpha_i, m\alpha_i, r\alpha_i)$ と表現できる。log 演算原理に基づいて式(19)の x_i は $\tilde{x}_i=(l_{xi}, m_{xi}, r_{xi})$ に変わる。ゆえに，式(19)は次式のようにファジィ化される。

$$\sum_{i<j}^{n}\sum_{k=1}^{\delta ij}(\tilde{y}_{ijk}-\tilde{x}_i+\tilde{x}_j)^2 \tag{41}$$

前に，Lootsma のアルゴリズムで述べたように，式(38)—(40)は，式(41)を，x_i について微分し，その結果を0にすることによって誘導された。この

過程では，暗黙の内に次のような実数値関数のファジィ点における微分法則が応用されている。

定義4：(Zimmermann〔20〕)

ファジィ点 $\tilde{X}_0$ において実数値関数 $f(x)$ の導関数は，次のように定義されるメンバーシップ関数をもつファジィ集合 $f'(X_0)$ として解釈できる。

$$\mu_{f'(\tilde{x}_0)}(y)=\sup_{x \in f'^{-1}(y)} \mu_{x0}(x) \tag{42}$$

ここで X_0 はファジィ点 (location) を特定化するファジィ数である。

定義4にしたがうと，実数値関数を T. F. N. として表される特定点について微分した結果は，ファジィ数として表現できる。さらに，$\tilde{X}_0$ を特定化する l, m, r が非負である場合，実数値関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(\tilde{X}_0)\cong(f'(l_0),\ f'(m_0),\ f'(r_0)) \tag{43}$$

と表せる。

この結果を利用し，式(41)から導かれる正規方程式は，式(20)をファジィ化することによって直接に得られる式(38)―(40)と同じものになる。

さて，式(38)―(40)から得られる解は，$l_i<m_i<r_i$ であることが要求される。しかし，得られた結果がかならずそうなる保証はない。そのため，$l_i+\rho_1\leqq m_i+\rho_2\leqq r_i+\rho_1$, $i=1, 2, \cdots, n$ のようなパラメータ ρ_1, ρ_2 を任意に与えることによって，適切な解を求める方法が提示されている (Laarhoven and Pedrycz〔12〕)。

このようにして，x_i が求められると，次に x_i を指数化し，また正規化することによって，α_i を計算することができる。すなわち，

$$\tilde{\beta}_i=\exp(\tilde{x}_i)=(\exp(l_i),\ \exp(m_i),\ \exp(u_i)),\ i=1,\ 2,\ \cdots\ n \tag{44}$$

のように，T. F. N. 指数演算原理を利用して x_i を指数化する。

また，指数化された結果 β_i を，

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_i&=\tilde{\beta}_i\cdot(\textstyle\sum\tilde{\beta}_i)^{-1}\\&=(\gamma_1\cdot\exp(l_i),\ \gamma_2\cdot\exp(m_i),\ \gamma_3\cdot\exp(u_i)),\ i=1,\ 2,\ \cdots\ n\end{aligned} \tag{45}$$

$$(\gamma_1=(\sum \exp(ui))^{-1},\ \gamma_2=(\sum \exp(mi))^{-1},\ \gamma_3=(\sum \exp(li))^{-1}$$

のように，T. F. N. かけ算原理を使って正規化する。

こうして，求められた α_i は w_i の近似値になる。

以上で述べたように，Laarhoben and Pedrycz が提案したファジィ優先順位論は，T. F. N. 演算式に基づいている。その過程で発生する相違の大きさは，この方法の厳密性を，ある程度制約する要因になるのは確かな事実である。

しかし，上述したように，その相違は無視できるほどのわずかな値であるから，この方法によるスケール定数の評価は現実的に意味があるものだと言えよう。

4) ファジィ集団多属性効用関数（FGMUF）の定式化

第1段階および第2段階でそれぞれファジィ化された集団単一属性効用関数と集団スケール定数を，式(3)の表現型にしたがって演算することによって，加法型のファジィ集団多属性効用関数を定式化する。この際，T. F. N. 足し算およびかけ算原理が適用できる。すなわち，

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_G(x) &= \sum_i^n \tilde{k}_{Gi}\tilde{U}_{Gi}(x_i)\\
&= \sum_i^n (\tilde{k}_{Gi} \odot \tilde{U}_{Gi}(x_i))\\
&= \sum_i^n ((l_{kGi},\ m_{kGi},\ r_{kGi}) \odot (l_{UGi}(x_i),\ m_{UGi}(x_i),\ r_{UGi}(x_i)))\\
&\cong \sum_i^n (l_{kGi} \odot l_{UGi}(x_i),\ m_{kGi} \odot m_{UGi}(x_i),\ r_{kGi} \odot r_{UGi}(x_i))\\
&= ((l_{kG1} \odot l_{UG1}(x_1),\ m_{kG1} \odot m_{UG1}(x_1),\ r_{kG1} \odot r_{UG1}(x_1)) \oplus\\
&\quad (l_{kG2} \odot l_{UG2}(x_2),\ m_{kG2} \odot m_{UG2}(x_2),\ r_{kG2} \odot r_{UG2}(x_2)) \oplus\\
&\qquad ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \oplus\\
&\quad (l_{kGn} \odot l_{UGn}(x_n),\ m_{kGn} \odot m_{UGn}(x_n), r_{kGn} \odot r_{UGn}(x_n))) \qquad (46)
\end{aligned}$$

となる。

式(46)によって，求められた集団多属性効用値は T. F. N. として表される。以上のような全過程を通じて，集団ファジィ多属性効用関数が同定できる。

III　ファジィ集団多属性効用分析の例

ある地域の長期開発計画を策定する際，地域の開発方向をどのように設定するかが問題になっている。開発計画の策定は，各階層を代表する3人の意志決定者，すなわち，生産分野を代表する企業家（I），消費者として一般住民（II）および地域政策を担当する政策当局者（III）によって行われている。

開発方向について提示された代替案は2つ，産業活動重視型と環境保存重視型であり，各代替案は産業活動，環境，公共サービス，文化活動の4つの属性によって構成されている。各属性に対して，個々の意志決定者は，T. F. N. として自分の効用を評価した（表1）。また，2属性を組とした相対的な選好優先度は（表2）のように言葉で表している。この際，3人の意志決定者の間で，調整過程を経て一致した選好順序，産業活動＞環境＞公共サービス＞文化活動，に到達した。しかし，選好度には表2で示されているような個人差が存在する。

以上のような問題構造において，最終代替案をファジィ集団属性効用分析法によって選択することにしよう。

まず，式(15)で示されたファジィ共通集合演算原理に基づいて，（表1）と（表2）の各属性に対するファジィ集団単一属性効用値を導出すると（表3）となる。

表1　単一属性の効用値（$\tilde{U}_n(X_i)$）

		産業活動	環境保存	公共サービス	文化活動
A	I	0.75, 0.81, 0.87	0.50, 0.60, 0.70	0.54, 0.60, 0.66	0.60, 0.68, 0.76
	II	0.83, 0.85, 0.87	0.40, 0.47, 0.54	0.48, 0.54, 0.60	0.54, 0.60, 0.66
案	III	0.79, 0.82, 0.85	0.44, 0.48, 0.52	0.53, 0.59, 0.65	0.55, 0.60, 0.65
B	I	0.42, 0.48, 0.55	0.75, 0.81, 0.87	0.51, 0.56, 0.61	0.63, 0.70, 0.77
	II	0.43, 0.50, 0.57	0.67, 0.73, 0.79	0.44, 0.51, 0.58	0.60, 0.67, 0.74
案	III	0.40, 0.46, 0.52	0.70, 0.73, 0.76	0.48, 0.52, 0.56	0.60, 0.65, 0.70

表2 属性間の選好優先度

		文化活動	公共サービス	環境	産業活動
文化活動	I		同じくらい重要	若干重要	かなり重要
	II		かなり重要	顕著に重要	顕著に重要
	III		同じくらい重要	同じくらい重要	若干重要
公共サービス	I			同じくらい重要	絶対的に重要
	II			かなり重要	かなり重要
	III			同じくらい重要	同じくらい重要
環境	I				顕著に重要
	II				若干重要
	III				同じくらい重要
産業活動	I				
	II				
	III				

表3 ファジィ集団単一属性効用値 ($\tilde{U}_{Gi}(x_i)$)

	産業活動	環境保存	公共サービス	文化活動
A案	0.83, 0.84, 0.85	0.50, 0.51, 0.52	0.54, 0.57, 0.60	0.60, 0.63, 0.65
B案	0.43, 0.48, 0.52	0.75, 0.75, 0.76	0.51, 0.54, 0.56	0.63, 0.67, 0.70

次は，ファジィ集団スケール定数の評価である。そのためにはまず，（表2）のように言葉で示された相対的な選好優先度をファジィ数として表わすことが必要である。ここでは，各言葉を次のような T. F. N. として表わす。

同じくらい重要 (eqally important)：(0.5, 1, 1.5)

若干重要 (weakly more important)：(2.5, 3, 5)

かなり重要 (strongly more important)：(4.5, 5, 5.5)

顕著に重要 (demonstrately more important)：(6.5, 7, 7.5)

絶対的に重要 (absoluetly more important)：(8.5, 9, 9.50)

また，上記の5つの重要度の各々の中間もファジィ数値として表わす。たとえば，同じくらい重要と若干重要の中間であると (1.5, 2, 2.5) のように数値

表4　ファジィ評価行列 ($\tilde{R}$)

		文化活動	公共サービス	環境	産業活動
文化活動	I	1	(0.5, 1, 1.5)	(2.5, 3, 3.5)	(4.5, 5, 5.5)
	II	1	(4.5, 5, 5.5)	(6.5, 7, 7.5)	(6.5, 7, 7.5)
	III	1	(0.5, 1, 1.5)	(0.5, 1, 1.5)	(2.5, 3, 3.5)
公共サービス	I	(2/3, 1, 2)	1	(0.5, 1, 1.5)	(8.5, 9, 9.5)
	II	(2/11, 1/5, 2/9)	1	(4.5, 5, 5.5)	(4.5, 5, 5.5)
	III	(2/3, 1, 2)	1	(0.5, 1, 1.5)	(0.5, 1, 1.5)
環境	I	(2/7, 1/3, 2/5)	(2/3, 1, 2)	1	(2.5, 3, 3.5)
	II	(2/15, 1/7, 2/13)	(2/11, 1/5, 2/9)	1	(4.5, 5, 5.5)
	III	(2/3, 1, 2)	(2/3, 1, 2)	1	(0.5, 1, 1.5)
産業活動	I	(2/11, 1/5, 2/9)	(2/19, 1/9, 2/17)	(2/7, 1/3, 2/5)	1
	II	(2/15, 1/7, 2/13)	(2/11, 1/5, 2/9)	(2/11, 1/5, 2/9)	1
	III	(2/7, 1/3, 2/5)	(2/3, 1, 2)	(2/3, 1, 2)	1

表5　ファジィ・スケール定数 ($\tilde{k}_{Gi}$)

属性	スケール定数		
産業活動	(0.340	0.454	0.572)
環境	(0.194	0.287	0.423)
公共サービス	(0.131	0.178	0.259)
文化活動	(0.071	0.082	0.103)

化する。

（表2）をもとにして，ファジィ評価行列 ($\tilde{R}$) を作成すると（表4）となる。

（表4）をもとに，式(38)—(40)および(44)，(45)にしたがうと，（表5）のようにファジィ・スケール定数が求められる。

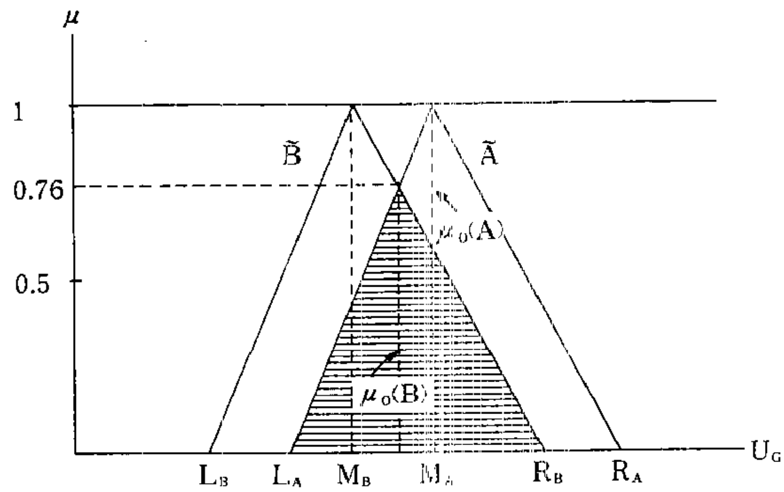
最終的に，求められた $\tilde{k}_{Gi}$ と $\tilde{U}_{Gi}$ をもとに，式(46)のファジィ演算原理にしたがってファジィ集団多属性効用値を導出すると（表6）のようになる。

（図6）は各代替案の効用値のメンバーシップ関数を示している。ファジィ

表6 各代替案の効用値 ($\tilde{U}_G(X)$)

代替案	効	用	値
A 案	(0.494	0.680	0.929)
B 案	(0.404	0.585	0.836)

図6 代替案のメンバーシップ関数



代替案の間に最良な代替案を選択する方法について，より深い研究がなされているが（例えば，Baldwin and Guild〔2〕），ここではそれには触れず，単に直観的な方法として代替案Aを最良な代替案として選択する。すなわち，代替案AとBとの間には（図6）の斜線のような共通部門が存在するが，メンバーシップ関数の左側端点，頂点，右側端点において，代替案AがBより優越するからである。しかし，ここで言っておきたいのは，代替案Bが選択されても，最良の意志決定になる可能性は，ある程度あるということである。Baldwin and Guild（〔2〕）の $\mu_0(i)$―代替案 i が最良の代替案に属するメンバーシップ関数―の概念に従うと，（図6）で $\mu_0(A)=1$, $\mu_0(B)=0.76$ となる。すなわち，A案が最良の代替案になる可能性は1であるが，Bが最良の代替案となる可能性もまた0.76程度である。

このように，多属性効用関数において，ファジィによる分析は，意志決定者に判断の幅を広げるという長所をもっている。

IV おわりに

本稿では，ファジィ原理に基づいて，曖昧な環境における多数の意志決定者が存在する場合の，集団多属性効用関数を同定する1つの方法を提示した。

ここで提示された FGMUF の論理的な根拠は，もし個々の個人が彼らあるいは彼女らの効用およびスケール定数を評価する際に，妥協できない正確な数値よりもむしろ，妥協可能である区間，あるいはあいまいな言葉として表わすとき，集団の効用水準を，ファジィ理論を応用して，ある限定された範囲内に集計することができることである。

さて，実際の集団意志決定の問題に，本稿で提示された方法が一般的に適用されるためには，次のような問題に対してより深い検討がなされなければならない。

もともと，Saaty の優先順位論は $\sum W_i=1$ で正規化された相対的な重み係数を求める方法であるから，本稿での議論も加法的な集団多属性効用関数に限られている。ところで，集団の決定が社会的な合意を得るためにはパレート最適性と供にある公正性ないし公平性が保証されなければならない。しかし，カークウッドは集団におけるパレート最適と公平性は両立できないことを示した (Kirkwood〔10〕)。加法性の仮定に従うと，集団は判断基準として公平性よりパレート最適性を優先して考慮することになる。しかし，集団意志決定における主な狙いが，できるだけ，集団を構成する個人間の不公平を避けることであるならば，乗法型等を含むファジィ集団多属性効用分析についてのなんらかの工夫が行われるべきである。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J., "A difficulty in the concept of social welfare", *Journal of Political Economy*, 58, 1950, pp. 328–346.

〔2〕 Baldwin, J. F. and N. C. F. Guild, "Comparison of fuzzy sets on the same decision space", *FSS*, 1979, pp. 213–231.

〔3〕 Dubois, D. and H. Prade, *Fuzzy sets and systems: Theory and application*, New York, 1980.

〔4〕 Eliashberg, J., R. L. Winkler, "Risk sharing and group decision making", *Management Sciene*, **27**, No. 11, 1981.

〔5〕 Harsanyi, J. C., "Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparison of utility", *Journal of Political Economy*, **63**, 1955, 309–321.

〔6〕 Keeney, R. L., "Multiplicative Utility Functions", *Operation Research*, **22**, 1974, pp. 22–34.

〔7〕 Keeney, R. L., "A Group preference axiomatization with cardinal utility", *Management Science*, **23**, No. 2, 1976, pp. 140–145.

〔8〕 Keeney, R. L. and C. Kirkwood, "Group decision making using cardinal social welfare functions", *Management Science*, **22**, No. 4, 1975, pp. 430–437.

〔9〕 Keeney, R. L. and H. Raiffa, *Decision with multiple objectives, references and value tradeoffs*, John Wiley, New York, 1976.（高原康彦他監訳『多目標問題解決の理論と実例』企画センター，1980年）

〔10〕 Kirkwood, C. W., "Social decision analysis using multiattribute utility theory" in *Multiple criteria problem solving*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, pp. 335–344.

〔11〕 Kaufmann. A. and M. M. Gupta, *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*, North-Holland, 1988.

〔12〕 Laarhoven, J. M., W. Pedrycz, "A fuzzy extention of saaty's priority theory", *FSS*, **11**, 1983, pp. 229–241.

〔13〕 Lootsma, F. A., "Performance evalution of nonlinear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis", in *Nonlinear Optimization*, ed. M. J. D. Powell, Academic Press, 1982.

〔14〕 Nishizaki, I. and F. Seo, "On construction of fuzzy membership functions in group decision making under the IDSS environment", *Cybernetics and Systems Research* '92, **1**, ed. Rovert Trappl, World Scientific, 1992, pp. 455–462.

〔15〕 朴　時炫，「集団意志決定に関する一考察」，『京都大学経済論集』第4号，1992, pp. 57–69.

〔16〕 Saaty, T. L., "Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets", *FSS*, **1**, 1978, pp. 57-68.

〔17〕 Seo, F. and M. Sakawa, "Fuzzy multiattribute utility analysis for colloctive choice", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, **15**, No. 1, 1985, pp. 45-53.

〔18〕 Seo, F., M. Sakawa, *Multiple criteria decision analsis in regional Planning: concepts method and application*, Reidel Publishing company, 1987.

〔19〕 瀬尾芙巳子, 『多目的評価と意志決定』, 日本評論社, 1984。

〔20〕 Zimmermann, H. J., *Fuzzy sets theory-and its application*, Kluwer-Nijhoff, 1984.