平成七年一月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第155巻　第1号

山田浩之教授記念號

献　　辞……………………………………………浅　沼　萬　里

時系列分析の新展開………………………………森　棟　公　夫　1

交通混雑制御への待ち行列モデルによる
　アプローチ……………………………………小　林　清　晃　22

明治期日本海運と長江……………………………片　山　邦　雄　36

年功賃金とヒックスの平均期間…………………逸　見　良　隆　53

景気変動と雇用調整：日本に関する研究展望…村　松　久良光　75

市場経済移行の基本問題…………………………高　阪　　　章　98

線形費用三者立地交渉問題………………………今　井　晴　雄　117

高齢化、人口移動、地方財政……………………西　村　周　三　132

山田浩之 教授 略歴・著作目録

平成7年1月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第155巻第1号，1995年1月

時系列分析の新展開

森棟公夫

I 序論

計量経済学における諸手法のうち，時系列分析法は一つの大きな特色をもって理解されてきた。他の計量分析法では個々の回帰式の経済学的意味が強く論ぜられるのに比して，時系列分析では観測値の時間的な変移が分析の対象となっており，個々の式の経済的意味合いは分析の主たる目的とはされなかった。消費関数の例をとれば，消費額の変動を所得額の変動によってケインズ的に説明しようと試みるのが計量分析の目的であり，推定された消費関数式の諸係数値に大きな関心がはらわれる。他方時系列分析における標準的な手法である自己回帰法では，消費額の変動は消費額自体の過去の変動によって説明される。一昔前は，計量モデルを使った分析と時系列分析のどちらが優れた方法かを問う論争が生じ，両者の優劣を比較する様々な研究も行われてきた。理論的な比較のみならず，計量モデルによる経済予測と時系列分析による経済予測の精度比較など巷を賑わした話題もあったが，いずれが信頼に足る手法なのか広く同意される結論が得られたわけではなかった。ただし時系列の手法を用いた経済予測が継続的に行われているかどうかは筆者は知らない。

総じて見れば，時系列分析はモデル分析に影響を与えることはなく，又モデル分析も時系列分析に影響を与えず，個々独立した手法として発展してきた。主たる計量経済学の教科書で扱われるのは主にモデル分析のための手法である。時系列分析は計量経済学の教科書の中では一章しか割かれていない。

ところが最近になって時系列分析における非定常分析，特に乱歩過程（ランダムウォーク）あるい

は和分過程の問題が回帰分析全般に影響を与えることが理解されてきた。本論ではこの問題を解説していく。特に，見せかけ回帰（3節）と共和分回帰（7節）の両節から理解できるように，最小2乗推定に及ぼす影響は大である。線形回帰に関する古典的な常識が捨て去られなければいけないことが理解できよう。

II　定常な時系列と乱歩過程（ランダムウォーク）

古典的な時系列分析で扱われる変数は定常な性質をもつとされるが，簡単な移動平均自己回帰モデル（ARMA）の例によって定常な変数の性質を見てみよう。

1次の移動平均ならびに1次の自己回帰の構造をもつ時系列変数 x_t は，$t=1, 2, \ldots, T$ についてと $x_t=\phi x_{t-1}+\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}$, 記される。定常であるために ϕ の絶対値は1より小でないといけない。ε_t は標準乱数で，平均は0，分散は一定そして時点が異なるごとに独立と仮定される。初期値 x_0 と ε_0 を所与とすれば，乱数 ε_1 が実現することにより観測可能な変数 x_1 の値が定まる。同様に，乱数 ε_t の値が実現すれば一期前の x および ε の値を部分的な構成因としながら x_t が定まる。

以下4図で示す時系列は，図1が $\phi=\theta=0$ の場合の乱数 ε_t の実現値である。独立な乱数の値を記録しているだけであるから散らばりがあり，全体に滑らかな変化を示すという印象は得られない。図2は自己回帰（AR）過程の値を記録したもので，図1に比較して変化が滑らかになる。（乱数 ε_t の分散は各図で共通だが，観測可能な変数 x_t の分散は図2の場合では図1の 4/3 倍に増加している。）図3では AR 過程に MA 過程が加わった時系列で，図2よりもさらに滑らかになる。（x_t の分散は1である。MA の係数が負の時は，逆に滑らかさを失う。）総じて言えば，時系列の構造により滑らかさの程度が異なるものの，図1から図3では時系列は0を中心として変動している。観測期間全般にわたって原点0を横切るような観測値の変化が見られるといえる。ところ

図1
$\phi=0 \quad \theta=0$

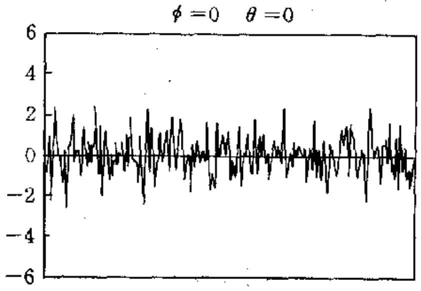


図2
$\phi=0.5 \quad \theta=0$

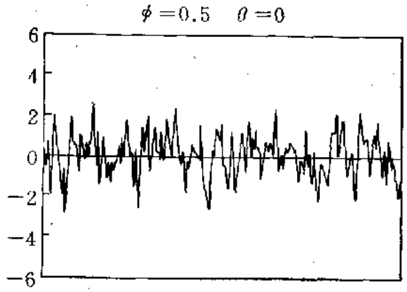


図3
$\phi=0.5 \quad \theta=0.5$

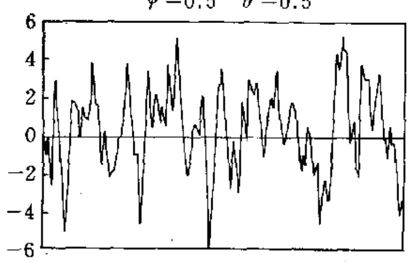
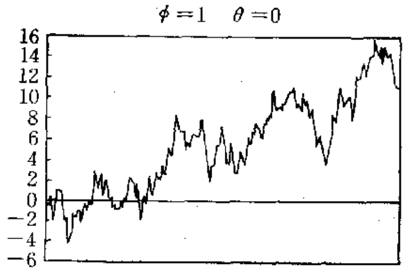


図4
$\phi=1 \quad \theta=0$



が $\phi=1$, $\theta=0$ と置いた図4ではこの原点を中心にした変動という特色が見られず，初期の段階では原点が横切られるものの，一定期間が経過すれば時系列は原点から離れたままになる。かつ時系列の変動具合は滑らかな様相を示している。

図4で示された確率過程は，差分操作子 Δ を利用すれば $\Delta x_t=\varepsilon_t$, あるいは $x_t=\Sigma_i=1, \varepsilon_t$ と表現できる。これが和分過程であり，i) x_t の分散は $t\sigma^2$ だから t に比例して増加する，ii) Δx_t は標準乱数で，定常である，iii) 確率過程の数学的特徴として原点0に戻るまでの期間の数学的期待値が有界にならない（原点から離れると原点に戻ってこない）という性質をもつ。本稿で扱う非定常時系列はこの和分過程であり，AR 係数が1を越えるような発散過程や平均ならびに分散が時間と共に変化する不均一過程は取り扱わない。特に発散過程については，$\phi=1.01$ のような微小に1を越えるような時系列でさえ和分過程

より変化の少ない滑らかな増加現象が示され，和分過程とは顕著に異なる系列と視覚的に判定できると考えられている。つまり原点に戻らないという点では和分と共通点をもつが，滑らかさに差異があると理解すればよい。

ここで和分過程についての理論的な性質をまとめる。まず r を0と1に挟まれた実数とするならば，標準ブラウン運動（ウィナー過程）$B(r)$ は次の4条件を満たす確率変数である。(i) $B(0)=0$,（ii）すべての r について $E(B(r))=0$,（iii）すべての r について $B(r)$ は $n(0, r)$,（iv）$r>r'$ ならば $B(r)-B(r')$ は $B(r')$ と独立に分布する。標準ブラウン運動 $B(r)$ について与えられるのはこの4条件のみであって直感的に理解するのは難しい。和分過程の分析ではこのブラウン運動 $B(r)$ が大きな役割を果たすが，それは Donsker の定理による：必ずしも独立ではなく分布も与えられていない定常な確率変数 $u_t=1, \ldots, T$ について，

$$(1)\qquad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\Sigma_{i=1,m}u_i \xrightarrow{D} B(r)$$

となる。ただし σ^2 は u_i の分散，D は分布収束を意味し，T が増加するにつれ m も (m/T) を r に近い値に維持するよう増加すると仮定する。和分過程の分析では乱数 u_i の和が出てくれば，標準偏差と T の平方根の積で割って漸近的に標準ブラウン運動に置き換える操作が頻繁に使われる。注意すべきなのは u_i についての頑健性で，分布を指定する必要もなく，独立性の仮定も要せず，中心極限定理で扱われる状況よりも緩い条件の下でブラウン運動過程に収束する。（初等的にはブラウン運動の4条件などは，$B(r)$ を（1）式の左辺に置き換えて理解すればよい。弱収束という収束をするが，簡便のため分布収束に置き換えておく。数学的な詳細は Banajee〔1〕や Hatanaka〔5〕などで検討されたい。）Donsker の定理を基として，不変性の定理 $g\{(1/\sqrt{T})\,\Sigma_{i=1,m}u_i\}\rightarrow g\{B(r)\}$ により様々な収束結果を得る。便宜上ここで最小2乗推定に頻繁に現れる統計量について漸近的な表現を示しておく。$x_t=\Sigma_{i=1,t}u_i$ とし，

(1)において u_t を v_t にかえて $B_v(r)$ を定義すれば，以下のようになる。

(2) $$\frac{1}{\sigma T\sqrt{T}}\Sigma_{t=1,T}x_t \xrightarrow{D} \int_0^1 B(r)dr,$$

(3) $$\frac{1}{\sigma^2 T^2}\Sigma_{t=1,T}x_t^2 \xrightarrow{D} \int_0^1 B(r)^2 dr,$$

(4) $$\frac{1}{\sigma\sigma_v T}\Sigma_{t=1,T}x_{t-1}v_t \xrightarrow{D} \int_0^1 B(r)dB_v(r).$$

III 見せかけ回帰

和分過程は $I(1)$ と記される。カッコの中の 1 は 1 次という意味をもち，$I(1)$ 変数 x_t の和を $I(2)$ と記す。簡単化のため u_t と v_t を観測値ごとに独立で，平均が 0，分散が各々 σ_u^2 と σ_v^2，共分散が σ_{uv} の乱数とし，さらに $I(1)$ 変数 x_t と y_t を $x_t=\Sigma_{i=1,t}u_t,\ y_t=\Sigma_{i=1,t}v_t$ と定める。y_t を x_t に回帰するとしよう。もし y_t と x_t の間に $y_t=\beta x_t+\varepsilon_t$, ただし ε_t は定常な誤差項という関係が成立すれば二つの $I(1)$ 変数は 7 節で説明される共和分関係にある。ε_t が定常ではなく $I(1)$ の場合，回帰は「見せかけ回帰」となり，最小 2 乗推定量は次式の様に確率変数 b_0 に収束する。

(5) $$b=\frac{(1/T^2)\Sigma_{t=1,T}x_t y_t}{(1/T^2)\Sigma_{t=1,T}x_t^2} \xrightarrow{D} b_0=\frac{\sigma_v\int_0^1 B_x(r)B_y(r)dr}{\sigma_u\int_0^1 B_x(r)^2 dr}.$$

ここで $B_x(r)$ と $B_y(r)$ は相関のあるブラウン運動である。みせかけ回帰では最小 2 乗推定量は母数に収束することはない。y_t と x_t を構成する確率変数 u_t と v_t が独立な場合であっても，見せかけ回帰では最小 2 乗推定量は確率変数 b_0 に収束する。x_t が確率変数でかつ x_t を構成する確率過程が定常の場合では b は 0 に収束するから母集団における u_t と v_t の独立性が b の確率極限に反映されるが，みせかけ回帰では u_t と v_t の独立性は b の確率極限に反映され

ない。さらに，回帰の残差2乗和は，

$$(6)\qquad \frac{1}{T^2}\Sigma_{t=1,T}(y_t-bx_t)^2 \xrightarrow{D} \int_0^1 \{\sigma_y B_y(r)-b_0\sigma_x B_x(r)\}^2 dr$$

という収束を示し，t 検定では t 値統計量はその分母の平方根の中にある残差2乗和と x_t の2乗和の比が確率変数に収束するために全体として発散してしまう。あるいは「見せかけ回帰」では観測個数が少ない場合でも回帰係数に関する t 値が大きな値をとりやすく，x_t は有意な変数だと解釈される可能性が強い。b は真の値とは関係のない量に収束するにもかかわらず，t 検定の結果は有意になりやすいのである。総変動は

$$(7)\qquad \frac{1}{T^2}TSS=\frac{1}{T^2}\Sigma_{t=1,T}(y_t-\bar{y})^2 \xrightarrow{D} \sigma_y^2\int_0^1\left\{B_y(r)-\int_0^1 B_y(r)dr\right\}^2 dr$$

となる。確率収束(6)を合わせ使えば，決定係数 R^2 は漸近的に確率変数に収束し，その値は0と1の間で定まらない。他方，ダービン・ワトソン検定統計量は0に収束する。

結果として，y_t と x_t を構成する確率変数 u_t と が独立であっても，見せかけ回帰では最小2乗推定量はある確率変数に収束し，t 統計量は有意な値を示しやすい。さらに R^2 は値は0と1の間に収まり，ダービン・ワトソン値は0に近い値を示す。従って真の関係とはかかわりなく推定結果は有意と理解され易く，さらに誤差項の系列相関は1に近い正の値と判定される傾向がある。このように時系列変数が $I(1)$ であれば推定及び検定に大きな影響が生じる。従って時系列変数が $I(1)$ を含むかどうかの検定が重要な課題になる。

IV　AR単位根の検定

自己回帰を $y_t=\phi y_{t-1}+u_t$, ただし u_t は時間に関して独立とすると，和分過程は自己回帰係数 ϕ が1の場合である。より一般的には自己回帰過程に関する根の多項式が単位根1を含む場合が和分過程である。単位根の検定では，2

節で説明した様に発散過程は通常対立仮説に含まれない。だから1次の自己回帰では帰無仮説として ϕ の絶対値が1，対立仮説として ϕ の絶対値は1より小とおかれる。対立仮説の下では時系列は定常である。帰無仮説の下では階差を取れば定常になるから，階差定常過程とよばれる事も多い。

階差定常過程を定数項を含むように拡張することもできる。独立な u_t について

（8）　$\Delta y_t = \mu + u_t$

と拡張すれば，これはドリフトを持つ階差定常過程である。このドリフトを持つ階差定常過程は y_0 を初期値として y_t を逐次代入すれば $y_t = t\mu + \Sigma_{i=1,t} u_i + y_0$ となるから，y_t は確率トレンド（和分）のみでなく線型な外生トレンドを含む。従って階差定常過程がドリフトを含めば，分散が t に依存するだけでなく平均も t に依存した二重に非定常な確率過程になっている。

他方，外生トレンド過程は，

（9）　$y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + u_t$

と定式化され，ρ の絶対値は1より小である。この確率過程は，分散は長期的に t に依存しないものの，平均はトレンド項の存在により t の線型関数になっている。マクロ経済分析では外生トレンド過程と確率的トレンド過程（あるいは階差定常過程，和分過程）の意味合いは大きく異なっており，その違いについて様々な議論がある（山本〔16〕，12章，また本章全体にわたっては畠中〔6〕を参照されたい）。予測に限れば，外生トレンド過程では予測の精度は回帰式の作成者に責任が帰するが，確率的トレンド過程では予測の精度は回帰式の作成者に責任が帰さないという直感的な差異がある。以下，二つの非定常確率過程の選択に関する検定を概説しよう。

観測された変数が和分過程かあるいは外生トレンド過程かどちらかの非定常な変動を示している場合，Dickey and Fuller〔2, 以下 DF と省略する。〕は次のような確率過程の対応づけを行った。以下，a から e までに分類して説明する。

(a)自己回帰式を

(10) $(1-\rho L)\{y_t-\alpha-\beta(1-\rho)t\}=u_t$

と設定し，対立仮説の下では ρ の絶対値が1以下として $y_t=\rho y_{t-1}+\alpha'-\beta' t+u_t$，という外生トレンド過程を置く（Hatanaka〔5〕)。帰無仮説の下では ρ が1に等しい場合の $\Delta y_t=u_t$ というドリフトが付かない階差定常過程を置く。この検定では，帰無仮説と対立仮説で線型トレンドに関する設定が異なっている。対立仮説では確率過程に線型トレンドが含まれるのに比して，帰無仮説ではドリフトは含まれていない。図4に戻るならば，このような時系列をながめて，この時系列には外生トレンドが含まれるのだろうか，あるいは外生トレンドは含まれないが，乱数の和からなる確率トレンドで変動が説明されるのだろうかと検討しているのがDF検定である。階差変数を基にしてDF検定を定式化すると，対立モデルの下でのトレンド回帰は

(11) $\Delta y_t=\phi y_{t-1}+\alpha+\beta t+u_t$

と書ける。帰無仮説は $H_0: \phi=\rho-1=0, \alpha=0, \beta=0$ である。検定統計量としては尤度比あるいは F 比が考えられようが，F 比に比べて有効性が落ちると予想される ϕ の t 統計量が使われることが多い。(τ_τ 検定と呼ばれる。棄却域は負の裾である。）尤度比は Φ_2 表を使う。α と β に関する t 検定は，各々 $\tau_{\alpha\tau}$ 表と $\tau_{\beta\tau}$ 表を用いる。分布表はDF〔3〕や山本〔16〕に掲載されている。

(b) 帰無仮説の下で α に制約を課さない場合，$H_0: \beta=0, \phi=0$ の尤度比検定は Φ_3 表を使う。$\phi=0$ の検定は τ_τ を用いる。

(c) 対立仮説のもとで線形トレンドが含まれず定数項のみが含まれる場合で，ϕ の t 検定を τ_μ 表を用いて行う。τ_μ の分布は τ_τ の分布を正の方向にずらした形状をとる。棄却域は負の裾である。α の検定は $\tau_{\alpha\mu}$ 表を使う。α と ϕ の両母数に関する尤度比検定は Φ_1 表を使う。

(d) 帰無仮説の下で線形トレンドも定数項も含まれない場合で，ϕ の t 値は表を使って検定する。τ の分布は τ_μ の分布を正の方向に，あるいは t 分布を負の方向にずらした形となる。棄却域は負の裾にある。

三つの t 比型統計量の分布の形状は，通常の t 分布，つまり0を中心とした

左右対称な吊り鐘型ではない。負の方向に歪んでいて，臨界値も下側5％点で，t 分布の -1.68 よりもさらに小さく τ で -1.95 になる。τ_μ では -2.93 τ_τ では -3.50 である。

(d)における τ についてその帰無仮説の下での極限を導出してみよう。帰無仮説の下では $\Delta y_t = u_t$，あるいは $y_t = \Sigma_{i=1,t} u_i$ だから $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + u_t$ を最小2乗推定し，かつ(3)と(4)式を利用すれば，$T\hat{\phi}$ は $\int_0^1 B_u(r) dB_u(r) / \int_0^1 B_u(r)^2 dr$ に収束する。t 比の分母の平方根のなかは $RSS/(T\Sigma y_t^2)$ だが，RSS/T は σ^2 に収束し，$(1/T^2)\Sigma_{i=1,t} y_i^2$ は $\sigma^2 \int_0^1 B_u(r)^2 dr$ に収束するので，結局

$$(12) \qquad \tau \xrightarrow{D} \int_0^1 B_u(r) dB_u(r) \Big/ \left\{ \int_0^1 B_u(r)^2 dr \right\}^{1/2}$$

となる。τ の分布表はその上式の右辺を数値的に評価して求める。対立仮説の下では ϕ は負値だから，負の無限大に発散する。

(e) 誤差項 u_t が独立ではなく系列相関をもつ場合には，検定は拡張されたDF(ADF)検定になる。例えば ε_t を標準乱数として，系列相関が $\Sigma_{i=1,p} \rho_i u_{t-i} = \varepsilon_t$ と自己回帰で表現できるとしよう。この誤差項は $u_t = \varepsilon_t / \Sigma_{i=0,p} \rho_i L^i$，$\rho_0 = 1$ とラグ多項式を用いて書けるから，自己回帰式は(11)にラグ多項式を掛けて

$$(13) \qquad y_t = \alpha + \beta t + \rho_1 y_{t-1} + \cdots + \rho_{p+1} y_{t-p-1} + \varepsilon_t$$

となる。もし自己回帰が単位根をもつならば(13)式に含まれるラグ多項式は根が1のとき0になる。あるいは $1 = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{p+1}$ となる。ここで関係式 $y_{t-i} = -\Delta y_{t-i+1} - \cdots - \Delta y_{t-1} + y_{t-1}$ を利用して各ラグ変数を変換すると結果的に

$$(14) \qquad \Delta y_t = \alpha + \beta t + \phi y_{t-1} + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \phi_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t$$

となるが，$\phi = \rho_1 + \cdots + \rho_{p+1} - 1$ であり，帰無仮説のもとでは $\phi = 0$ になる。系列相関の次数が既知であれば，ADF 検定では，(14)に含まれる ϕ に関して

(a)を利用すればよい。DF 検定と同様に対立仮説の下で線型トレンドが含まれないならば(c)，さらに定数項が含まれないならば(d)を使えばよい。

一般には自己回帰の次数は未知であるが，(14)を最小2乗推定し，係数 ϕ_p の有意性を t 検定により調べて次数を決定する。この際 ϕ_p の t 比は帰無仮説の下で漸近的に標準正規分布に従う。ϕ_p が有意でなければ，自己回帰の次数を落とした式を作り，同じ手続きを繰り返す。以下このような有意性検定を逐次的に行っていき，有意な係数が見つかれば，逐次決定のプロセスを止める。各次数における有意水準を c とおけば，ϕ_1 から ϕ_p 間での全係数の有意水準は $1-(1-c)^p$ となる。かつ次数を順次減らしていくならば個々の検定は独立になるから，プリテストによる偏りも生じない。誤差項が ARMA 過程の際は，ARMA 過程を AR 過程で近似すると考えて分析を一般化できよう。

DF 検定ならびに ADF 検定においては，時系列は帰無仮説の下で単位根を含む。また DF および ADF 検定は Nelson and Plosser〔9〕の論文によって世間に知れ渡るようになったが，当論文でわかったのはアメリカ経済における多くのマクロ変数に関して「単位根あり」という帰無仮説が棄却できなかったということに他ならない。ところが統計的検定における原則では，帰無仮説が棄却されて始めて検定に積極的な意味が見いだされる。帰無仮説が棄却されて文字通り有意な検定結果を得るのである。従来の研究では多くの経済学者が理解しているようにマクロ変数は和分過程に従うという積極的な結果は得られておらず，帰無仮説が棄却できなかったという消極的な結論がもたらされたに過ぎなかった。仮設を逆にした検定は MA 単位根検定によって行われる。

第二の注意すべき点は，線型トレンドの扱いである。DF 検定では帰無仮説の下ではドリフトは含まれず，外生トレンドなのか外生トレンドを含まない確率トレンドなのかという対比がされていることは繰り返すまでもない。しかしこのような考え方を不自然とする人達は，帰無と対立の両仮説の下で線型トレンドを平等に扱う。つまり，対立仮説が線型トレンドを含むならば帰無仮説はドリフトのある和分過程となる。このような考え方では，和分過程を確率トレ

ンド，つまりばらつきはあろうが大まかに見て成長していく変数であるとは理解せず，線型トレンドの周辺でのばらつきが安定的な定常過程，ばらつきが時間と共に増大する非定常過程と対応づける（Hatanaka〔5〕)。

V　AR単位根検定の応用手順

まず(14)のラグ多項式の次数を決める。系列相関の次数が既知であるとすればADF，次数が0ならDF検定を使うが，その手順は以下のようになる。回帰式(11)を基準として説明する。

i)　定数項およびトレンドの項の入った回帰式において単位根を τ_τ を使って検定する。帰無仮説が棄却されれば検定は終了する。

ii)　棄却できない場合はa), b) で述べたように $\beta=0$, $\phi=0$ であるが，回帰式の特定化を調べるために，$\tau_{\beta\tau}$ の表を用いて $\beta=0$ を検定する。

iii)　もし β が有意であれば，(11)の回帰式中 $\phi=0$ の t 検定を標準正規を帰無分布として行う。仮説は，$\beta\neq0$ のもとで $H_0: \phi=0$，$H_a: \phi<0$ である。トレンド変数が有意であれば漸近正規検定が使える（DF〔3〕)。α は τ_τ の分布に妨害母数として入らない。

iv)　もし β が有意でなければc）を行う。τ_μ が有意であれば検定は終了する。

v)　τ_μ が有意でないなら，帰無仮説は $\alpha=0$，$\phi=0$ だから回帰式の特定化の検定を $\alpha=0$ について行う。$\tau_{\alpha\mu}$ 表を用いる。

vi)　もし α が有意であれば $\phi=0$ の t 検定を標準正規分布を帰無分布として行う。仮説は $\alpha\neq0$ のもとで $H_0: \phi=0$, $H_a: \phi<0$ である。ドリフト項が有意であるので漸近正規検定が使える(DF〔3〕)。この場合は α が妨害母数になり分布が α 値に依存している。詳細な小標本分布はSchmidt〔11〕が与える。

vii)　もし α が有意でないなら，d）を行う。

以上の手順は複雑であるし，Φ 型の尤度比検定を考慮に入れれば手順はよ

り複雑になる。式の特定化が心配ないなら i), iv), vii) のみ，あるいはそのうちの一つのみを検討すればよい。自己回帰式に入っている定数項あるいはトレンド項が有意ならば，和分過程によって生じる非定常性の影響は打ち消され t 値の帰無分布は漸近正規になる事にも注意されたい。

現在では実証分析に先立って，DF 検定や ADF 検定により変数の定常性を検討することが一般に望ましいとされる。もっともこれらの検定には検出力に問題があり，データ発生過程が定常過程であっても，の値が 0 に近くサンプル数も少ないと DF 検定はこれを和分過程であると誤認してしまうことが多い。また誤差項の自己回帰の次数が既知でないと検出力が著しく損なわれる。実際上次数は既知であるはずがなく，次数を大きめにとって検定を始めれば検出力が損なわれ，また次数を小さくすると検定の偏りが生じる。Hatanaka〔6〕は MA 単位根の検定も用いた異なる応用手順を与える。

VI MA 単位根

AR 単位根における DF 検定と異なり，帰無仮説の下に定常過程がおかれ，対立仮説の下に非定常（和分）過程がおかれる検定を紹介しよう。和分過程 $\Delta x_t=\varepsilon_t$ は，初期値を $x_1=\varepsilon_1$ と与えると逐次代入により $x_t=\Sigma_{i=1,t-1}\varepsilon_i+\varepsilon_t$ となる。ここで

(15) $\quad x_t=\delta(\Sigma_{i=1,t-1}\varepsilon_i)+\varepsilon_t$

と表現を変えれば，δ が 0 のとき x_t は定常，0 以外の定数のとき x_t は和分過程にしたがうことがわかる。従ってこの定式化を基にし，δ に関して $H_0:\delta=0$, $H_a:\delta\neq0$ となる検定を作れば，この検定は AR 単位根における DF 検定と正反対の帰無及び対立仮説をもつ。要するに x_t の DGP（データ発生過程）における和分の部分が有意かどうかという検定である。δ が 0 でない場合は，和分過程と整合であるためには $\delta=1$ となる必要があるかに見えようが，任意の δ については $\Delta x_t=\varepsilon_t-(1-\delta)\varepsilon_{t-1}$ となり，差分に関しての MA 表現が導出できる。MA 表現の可逆性あるいは識別性のためには MA 多項式の解

がすべて1より大でないといけないから，δ は不等式 $0<\delta<2$ を制約範囲とする。だから差分 Δx_t に関して標準乱数 ε_t を想定するのでなく，より一般的に MA 過程を想定すれば(15)の表現と対応づけられる。さらに定常性の帰無仮説は，Δx_t に関する MA 多項式の根が単位根である事と同等になる。

MA単位根の検定を説明しよう。帰無仮説の下では $x_t=\varepsilon_t$ となるが，ε_t は分散 σ^2 の標準乱数である。初期値 x_1 も乱数 ε_1 だから，$\eta_t=\Sigma_{i=1,t}x_i$ は分散が $t\sigma^2$ の和分過程にしたがう。そこで $S_T=\Sigma_{t=1,T}\eta_t^2/\hat{\sigma}^2$ とし，$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の一致推定量 $(\Sigma_{t=1,T}x_t^2/T)$ とすれば，帰無仮説の下で

$$(16)\qquad \frac{1}{T^2}S_T \xrightarrow{D} \int_0^1 B(r)^2 dr$$

という収束をする。検定にはこの分布を使う。

対立仮説の下では，x_t 自体が和分になっている。例えば δ が1ならば，$x_t=\Sigma_{i=1,t}\varepsilon_i$ となり $(1/\sqrt{T})x_t$ がブラウン運動に収束する。従って

$$(17)\qquad \frac{1}{T^4\sigma^2}\Sigma_{t=1,T}\eta_t^2 \xrightarrow{D} \int_0^1\left(\int_0^r B(x)dx\right)^2 dr$$

となる。他方 $\hat{\sigma}^2$ については

$$(18)\qquad \frac{1}{T^2\sigma^2}\Sigma_{t=1,T}x_t^2 \xrightarrow{D} \int_0^1 B(r)^2 dr$$

だから，検定統計量 $(1/T^2)S_T$ は発散し，検定は一致性を示す。

検定は複雑な状況にも容易に拡張できる。まず，帰無仮説の下で $x_t=\varepsilon_t$，しかし $x_1=\mu_0+\varepsilon_t$ と初期値が定数項を含むならば，η_t および $\hat{\sigma}^2$ において x_t は $x_t-\bar{x}$ に置き換えられる必要がある。帰無仮説の下での漸近分布も変化する。Δx_t がドリフトを含む場合は帰無仮説の下で $x_t=\mu_0+t\mu+\varepsilon_t$ となるから η_t および $\hat{\sigma}^2$ に含まれる x_t は，x_t を1と t に回帰した残差で置き換えられる。(Tanaka〔14〕)

VII 共和分と共和分回帰

Engle and Granger〔4〕に基づいて，共和分の概念と共和分のもとでのVAR (vector auto-regression) の ECM (error correction model 誤差修正モデル) への変換，さらに推定法を説明しよう。たとえば x と y が共に1次の和分過程であれば，見せかけ回帰の条件がそろう。しかし $y-\beta x$ も $I(0)$ なら見せかけ回帰は生じない。はたしてこのような関係は可能なのであろうか。この疑問に答えたのが共和分であった。要するに共和分とは，和分過程と和分過程の一次結合が，定常過程になることを意味する。つまり複数の和分過程が共に変動するために，一次結合が定常になりうるのである。一般的には複数の I(d)変数間に，和分次数を下げる複数の線型関係が存在しうる。定義を述べよう。：m 個の変数からなる列ベクトル x_t があり，各要素が $I(d)$ であるとする。もし，$z_t=\beta' x_t-I(d-b)$, $b>0$, となるような行列 β' が存在すれば，x_t は d, b の次数で共和分しているといわれる。β は共和分行列とよばれる。

x_t と y_t が共に $I(1)$ でありかつ共和分関係が1個存在するとしよう。線形回帰との類似性を保つために共和分ベクトルを $(1, -\beta)$ とすると，共和分関係は $y_t=\beta x_t+u_t$ と表現することができる。ただし誤差項は定常である。この回帰式を共和分回帰とよぶ。(見せかけ回帰との差異に注意されたい。) 古典的な線形回帰論では β の最小2乗推定量 b は一致性をもち，観測個数 T が大ならば $\sqrt{T}(b-\beta)$ は漸近的に正規分布に従う。説明変数が定常な確率変数であってもこの結果が保持されるが，説明変数と誤差項の間に相関があれば同時性のバイアスが生じる。同時性バイアスを除去するために操作変数法などの手法が開発されてきた事は周知の通りである。

説明変数が $I(1)$ だから，x_t は u_t とは異なる確率変数 v_i, $i=1, \ldots, t$ の総和で，かつ各確率変数は時間に関して独立だとする。共和分回帰では先の古典的な漸近的性質は維持されず，最小2乗推定量は $T(b-\beta)$ が漸近的に

$$(19)\qquad \frac{(1/T)\Sigma_{t=1,T}v_t u_t+(1/T)\Sigma_{t=1,T}x_{t-1}u_t}{(1/T^2)\Sigma_{t=1,T}x_t^2} \xrightarrow{D} \frac{\sigma_{uv}+\sigma_u\sigma_v\int_0^1 B_V(r)\,dB_u(r)}{\sigma_v^2\int_0^1 B_V(r)^2dr}$$

に収束をする。ここで分散や共分散の定義は通常通り，$B_V(r)$ および $B_u(r)$ は $\Sigma_{i=1,t}v_i/\sqrt{T}$ および $\Sigma_{i=1,t}u_i/\sqrt{T}$ の確率収束先で，ブラウン運動である。最小２乗法の性質のみをここで述べると，

(i) 通常の回帰では b は $\sqrt{T}$ 一致だが，共和分回帰では b は β の一致推定量であるのみならず，超一致性あるいは T 一致性をもつ。直感的には母数 β に近づく速度が速く，逆に標本数 T が少なくても母数 β に十分近い推定値が得られると理解できる。(Stock〔13〕)

(ii) 確率変数間の共分散 σ_{uv} がゼロでなくとも超一致性は成立し，同時性のバイアスは生じない。

(iii) 標準の場合と異なり最小２乗推定量は漸近的に正規性をもたない。$T(b-\beta)$ は上記の確率変数に収束するが，その分布は正規分布などのような関数表現が出来ない。分布は通常コンピューターによるシュミレーションによって求める。

最小２乗推定量は小標本で偏りを持つが，超一致性にもかかわらず通常の観測個数ではこの偏りは小さくならない事が Banerjee 他〔1〕のモンテカルロ実験によって示された。Phillips〔10〕が小標本バイアスを修正する手法を提案したが，以下，Hatanaka〔5〕に拠ってバイアス修正法を解説しよう。

確率変数間に系列相関がない場合は，新しい係数 γ を導入した補助回帰式 $y_t=\beta x_{t-1}+\gamma\Delta x_t+u_t$ を使えばよい。この補助回帰式における β の最小２乗推定量は，η_t を u_t から $E(u_t|v_t)$ を引いて求まる v_t と相関を持たない確率変数として，回帰式 $y_t=\beta x_{t-1}+\eta_t$，における β の最小２乗推定量と漸近的に同じになる。従って，

$$(20)\qquad T(b-\beta)\xrightarrow{D}\sigma_\eta\int_0^1 B_v(r)\,dB_\eta(r)/\sigma_v\int_0^1 B_v(r)^2dr$$

という収束を示す。明らかなように妨害母数 σ_{uv} は漸近分布から消え去る。この分布は混合正規分布とよばれる。さらに説明変数の2乗和および補助回帰式の残差二乗和の収束を使えば，β の t 検定統計量は最終的に

$$(21)\qquad t_\beta \xrightarrow{D} \int_0^1 B_v(r)dB_\eta(r) \Big/ \left\{\int_0^1 B_v(r)^2 dr\right\}^{1/2}$$

と収束する。ここで v と η が独立に分布していることに注意すると，v を所与とすれば t_β の分布は標準正規になっていることがわかるから t_β の分布は標準正規である。補助回帰をもとにした最小2乗推定では，係数 β の有意性は t 検定によって確かめることができる。もし説明変数が複数の $I(1)$ 変数であれば，その部分集合に関する有意性は古典的な χ^2 法で検定することができる。

確率変数 u_t と v_t が時間に関して独立でない場合は最小2乗法の結果はより複雑で，分子の σ_{uv} は $E(x_t u_t)$ に置き換えられないといけない。つまり x_t と u_t の間の t 期の共分散 σ_{uv} のみでなく，すべての過去に遡った共分散が分子に含まれる。妨害母数を全て除くには，補助回帰式を

$$y_t = \beta x_t + \Sigma_{i=-p,q} \gamma_i \Delta x_{t-i} + u_t$$

と拡張する。p と q は共に十分に大きな正の整数とする。この補助回帰式における β の最小2乗推定量は，η_t は $v_{t+p}, \ldots, v_{t-q}$ とは相関を持たない確率変数として回帰式 $y_t = \beta x_t + \eta_t$ の最小2乗推定量と同じ漸近的な性質をもつ。最小2乗推定量の漸近分布は(20)と同じ型である。

確率変数 v_t が Granger の意味で u_t に因果をもたらさないならば，補助回帰に含まれるラグ階差は過去のラグのみ考慮すればよく，いわゆるリードを含む必要はない。しかし，この因果性も検定によって確かめねばならない。u_t と v_t が VAR に従う場合は次節以下の分析の特殊型となる。

VIII ECM 表現定理

m 個の $I(1)$ 変数 y のデータが VAR から発生しているとする：

$$(22)\qquad y_t = \mu + \Sigma_{i=1,k} A_i y_{t-i} + \Phi D_t + \varepsilon_t.$$

ここで μ は定数のベクトル，A_i は $m\times m$ の母数行列，D_t は平均0に調整した季節ダミー変数行列，ε_t は独立で平均0共分散 Λ の正規確率変数ベクトルである。このVARモデルは(14)の方法で以下のようなECMに書き換えることが可能である。

(23)　$$\Delta y_t=\mu+\Sigma_{i=1,k-1}\Gamma_i\Delta y_{t-i}+\Pi y_{t-1}+\Phi D_t+\varepsilon_t$$

ただし $\Pi=\Sigma_{i=1,k}A_i-I_m$ である。階差変数はすべて $I(0)$，レベル変数は $I(1)$ であることより，(23)の左辺と右辺で変数の和分の次数が均等 (balance) であるには，$\Pi=0$ であるか，Πy_{t-1} が共和分しているかのいずれかでなくてはならない。$\Pi=0$ の場合ベクトル y の要素間に共和分は無く，階差変数間の回帰式しか残らない。もし r 個の共和分関係が存在しが $I(0)$ になるなら，のランクは m より小なる r となり，かつ $\Pi=\alpha\beta'$ のように分解できる。ここで β と α は $m\times r$ で，各々共和分行列，調整行列とよばれる。これが表現定理である。もし共和分がなければ $\Pi=0$ で，階差変数間の回帰式は変数がすべて $I(0)$ だから，見せかけ回帰を回避できる。しかしながら，階差変数間に回帰式を適用しただけではレベル変数に関する情報がモデルに含まれないのである。あるいは，経済変数間の均衡からの乖離を妨げる力がモデルに反映されないともいわれる。そこでECMの利点は，その経済学的意味合いはともかく，同一回帰式に階差変数とレベル変数が混在しうることにある。レベル変数は階差変数の和であることを想起すれば，ストックとフローという2種類の異なった情報が同時に用いられている。共和分関係は $I(0)$ であるため，見せかけ回帰の問題は生じない。

注意を与えるとすると，実証研究上，一変数回帰式における ADLM（自己回帰分布ラグ）の変型として ECM を導くこともできるが，この節では VAR の変換として ECM が定義されている。ただし ADLM より導かれた ECM では左辺と同期の階差変数が右辺に含まれるが，この節の ECM では左辺と同期の階差変数は右辺に含まれない。さらに ADLM ではみせかけ回帰が生じるが，Sims, Stock, and Watson〔12〕が示したように VAR では和分変数が含

まれても最小2乗推定量は一致性を保ち，VARより導かれたECMは共和分の存在にかかわらず最小2乗法により一致推定が可能である。第2の注意点としては，誤差修正項は長期均衡からの乖離を意味すると解釈されるが，複数の共和分がある際には識別が不可能であるために，実証上は均衡式を判別できない事があげられよう。つまり任意の正則行列 Q に対して $\Pi=\alpha Q^{-1}(Q\beta')$ だから，$Q\beta'$ も共和分行列になる。だからある誤差修正関係の正則な線型変換は全て誤差修正関係であり，特定の経済的な意味をもつ長期的な均衡式を見いだすことはむしろ恣意的な判断にすぎないといえよう。

IX ECMの2段階推定

ECMの2段階推定法では最小2乗推定量の超一致性が利用される。つまり，まず均衡式は最小2乗法により推定する。次に誤差修正項を残差として求め，この「共和分」残差を(23)に代入して最小2乗推定を実行するわけである。もし2変数間に共和分が存在すれば，超一致性により共和分残差は定常になる。最小2乗法は多次元の共和分でも一致性を保持する。

共和分残差は定常でないといけないが，これは共和分残差に対して単位根の検定を行い単位根がないことが判明すればよい。しかしながらこの検定には困難な点が含まれているので，7節の様に共和分回帰 $y_t=\beta x_t+u_t$ を利用して説明しよう。まず検定の帰無仮説は「u_t に単位根あり」であり，帰無仮説が棄却されて初めて「単位根無し」が有意になる。検定統計量は帰無仮説のもとで分布が求められないといけないが，帰無仮説のもとでは回帰は見せかけ回帰になってしまう。もし係数が既知であれば見せかけ回帰残差は $y_t-\beta x_t$ だが，既知でなければ係数は推定せねばならず，見せかけ回帰の残差はとなる。Engle and Granger〔4〕では検定統計量はDFに基づきながら，見せかけ回帰の残差を数値的に求め，検定統計量の分布を実験により数値的に導出した。検定統計量の公式は同じであっても，4節における u_t のかわりに見せかけ残差 y_t-bx_t が分布を求める際に使われる。もう一つの難点は，2段階推定法における

第1段階の最小2乗推定量の分布は正規分布ではないので，説明変数の有意性の検定や，回帰係数に関する制約の検定などが困難なことにある。これより，第1段階での回帰式における説明変数の選び方が先決になってしまい，共和分ベクトルに関する統計的推測が困難になる事に問題が残る。現状では最尤推定及び最尤法に基づく検定が実証の世界を風靡しているようだが，2段階法が共和分誤差の系列相関などに対して頑健であることを根拠に2段階推定法を推奨する人々もいる。

X　ECM の最尤推定法

共和分行列の最尤推定では，まず Δy_t と y_t を定数項，すべてのラグ付き階差，および D_t に回帰し，最小2乗残差をそれぞれ，R_{0t}, R_{1t} とおく。n を観測個数とし，R_{0t}, R_{1t} を用いて行列 $S_{ij}=(1/n)\Sigma_{t=1,n}R_{it}R'_{jt}(i, j=0, 1)$, を作り，次に行列式 $det(\lambda S_{11}-S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})=0$, より固有値を求める。各固有値に対する固有ベクトルのうち，大きなほうから r 個の固有値に対応する固有ベクトルを取り出し，固有値の大きさ順に並べた行列 b が β の最尤推定量になる。b が求まれば，次に共和分残差 $b'y_{t-1}$ を計算し，それを ECM に代入し，最小2乗推定により他の係数を求める。Π のランクがたかだか $r(0\leq r<m)$ であるという帰無仮説は，トレース検定を使う。また帰無仮説 $r=q$ と対立仮説 $r=q+1$ に対する検定は最大固有値検定で行う。r は，帰無仮説 $r=0$ から検定を始めて，帰無仮説を棄却するまで次数を順増して決めればよい。これらの検定統計量の分布は Johansen and Juselius〔8〕に与えられている。

定数項ベクトルには注意が必要で，共和分関係における定数項と，$I(1)$ 変数 y のトレンドあるいは $I(0)$ 変数 Δy_t のドリフト項からなる定数項の両者が存在しうる。共和分関係の定数項は β_0 を $r\times 1$ ベクトルとすれば $\alpha\beta_0$ となり，調整行列 α によって張られる空間にある。したがって共和分関係は定数項を考慮して $\alpha(\beta_0+\beta' y_{t-1})$ と書ける。他方，Δy_t がドリフトをもつ場合は，ドリフト項を μ_0 とすれば，$-(I-\Sigma\Gamma_i)\mu_0$ が定数項を構成する。結局，定数項は μ

$=\alpha\beta_0-(I-\Sigma\Gamma_i)\mu_0$ と2種類の構成要素に分解できる。定数項が $\hat{\mu}$ と推定されれば，を調整行列 へ射影して共和分定数項を求め，$\hat{\mu}$ を調整行列の補空間へ射影してドリフトから生じる定数項を求める。厳密な定数項の表現は Johansen〔7〕に与えられるが，ドリフト項の存在は次節で述べられるように推定及び検定に影響をもつ。

共和分行列 β や調整行列 α の行に関する制約に関する尤度比検定を以下説明しよう。行に関する線形制約は，s を m より小として $s\times m$ の既知行列 $K_{\beta'}$ により $K_{\beta'}\beta_i=0(i=1,\ldots,r)$ と書けよう。$K_{\beta'}$ の s 行は m 次元空間内で s 次元部分空間を張るが，線形制約により β_i はその直交補空間に在る。他方 $K_{\beta'}H=0$ となる $m\times(m-s)$ 行列 H を求めれば H は $K_{\beta'}$ の直交補空間を張るから，$(m-s)\times1$ の未知母数を含むベクトル ϕ_i により，$\beta_i=H\phi_i$ と線形制約の表現を変えることができる。未知母数は制約により $(m-s)$ 個に減少している。すべての共和分ベクトルについて制約を書き直すと線形制約は $\mathrm{H}_0:\beta=H\phi$ となり，推定すべき未知母数はになる。以下，尤度比検定が導出できるが，尤度比は帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $r\times s$ のカイ2乗分布にしたがう。2段階法では共和分ベクトルに対する制約の検定はできないのに対し，最尤法ではそれが可能である。制約は β のすべての列について共通である。

共和分行列 β に関する制約と同様に，$s\times m$ の既知の行列 $K_{\alpha'}$ について調整行列 α の行に関する制約 $K_{\alpha'}\alpha=0$ も検定できる。制約自体は β の制約のように，$m\times(m-s)$ の既知の行列 A が求まって，$\mathrm{H}_0:\alpha=A\Psi$ と変換できる。尤度比検定は可能で，帰無仮説の下で自由度が のカイ2乗分布に漸近的に従う。さらに $K_{\alpha'}\alpha=0$ および $K_{\beta'}\beta=0$ の両方の制約がある場合にも検定を拡張できる。

参考文献

紙面の制約もあり本論で引用される文献は最小限のものに限った。森棟〔15〕の文献リストはより完備しているし，Banerjee〔1〕を参照すれば本稿全体の参考文献がよ

り詳細に与えられている。

〔1〕 Banerjee, A., Dolado, J. J., Galbraith, J. W., Hendry, D. F. (1993). Co-integration, error-correction, and the econometric analysis of non-stationary data, Oxford University Press.

〔2〕 Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of estimators for autoregressive time series with a unit root, Journal of the American Statistical Association, 74, 427-431.

〔3〕 Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, Econometrica, 49, 1057-1072.

〔4〕 Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction : Representation, estimation, and testing, Econometrica, 55, 251-276.

〔5〕 Hatanaka, M. (1995). Time series based econometrics : unit roots and co-integration, Oxford University Press, forthcoming.

〔6〕 畠中道雄 (1991). 計量経済学の方法, 創文社。

〔7〕 Johansen, S. (1991). Testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, Econometrica, 59, 1551-1580.

〔8〕 Johansen, S. and Juselius, K. (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration with applications to the demand for money, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52, 169-209.

〔9〕 Nelson, C. R. and Plosser, C. I. (1982). Trends and randam walks in macroeconomic time series : Some evidence and implicactions, Journal of Monetary Economics, 10, 139-162.

〔10〕 Phillips, P. C. B. (1991). Optimal inference in cointegrated systems, Econometrica, 59, 283-306.

〔11〕 Schmidt, P. (1990). Dickey-Fuller tests with drift, Advances in Econometrics (T. B. Fomby and G. F. Rhodes, Jr, ed.), 8, JAI Press Inc, 161-200.

〔12〕 Sims, C. A., Stock, J. H. and Watson, M. W. (1990). Inferences in linear time series with some unit roots, Econometrica, 58, 113-144.

〔13〕 Stock, J. H. (1987). Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, Econometrica, 55, 1035-1056.

〔14〕 Tanaka, Katsuto (1990). Testing for a moving average unit root, Econometric Theory, 6, 433-444.

〔15〕 森棟公夫, 坂野慎哉 (1993). 「計量経済学における回帰診断」, 日本統計学会誌 22巻3号。

〔16〕 山本拓 (1988). 経済の時系列分析, 創文社.