平成七年一月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第155巻　第1号

山田浩之教授記念號

平成7年1月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第155巻第1号，1995年1月

交通混雑制御への待ち行列モデルによるアプローチ

小　林　清　晃

都市の交通混雑，たとえば自動車交通の混雑現象に対する経済学的分析には，Walters (1961) をはじめとして多くの成果が得られている。しかし，ある時間帯の高速道路で典型的に見られるように，道路への進入口では何台もの車が待ち行列を形成しているので，そのような混雑に対しては待ち行列モデルによる分析が可能である。初めて待ち行列論的アプローチで混雑問題をモデル化したのは Naor (1969) である。Naor モデルの評価されるべき点は，経済学的分析の際に用いられる「厚生」あるいは「余剰」というような実体把握の困難な概念を必要とせずに，「混雑料金」を課することの社会的正当性を理論的に導いている点にある。

本稿は，(1)わが国の交通経済学の分野では紹介・注目されていない Naor モデルの概略とそれから得られる諸命題を示し，次に，(2)モデルが拠って立つ仮定の一部をゆるめた場合のモデルを与え，その場合でも命題が成立することを見るであろう。本稿の内容は以下のように構成される。1節では，交通混雑の経済学的分析と待ち行列モデルによる分析の系譜を簡単に追う。2節以降が本稿の主要部分を構成する。モデルを定式化するための諸仮定とモデルの基本式を与えた後，3節で，個々の交通者（ドライヴァー）が私的な便益を最大化するときの，道路進入口における最適な待ち行列長を決定する。次に4節では，全交通者の総便益を最大化するという意味での社会的最適化を考え，そのときの最適待ち行列長を導く。私的最適化においても社会的最適化においても，もともと Naor が設定した諸仮定の一部をより一般的かつ合理的なものに改める

ことによって，モデル分析から得られた当初の命題がそのまま妥当するだけでなく，伝統的な経済学的分析と待ち行列モデルによる分析との接点を見いだすことができるであろう。5節では，交通者に対する料金賦課によって，私的最適化と社会的最適化を一致させる可能性を論じる。6節では，モデルのパラメターに具体的数値例を与え，私的あるいは社会的最適解の数値とそのときの混雑料金を決定し，さらにそれらの特徴を探る。

I　交通混雑分析の概観

まず，交通混雑の経済学的分析を概観しよう。混雑は一種の外部不経済とみなすことができる。外部不経済が存在する市場の厚生経済学的分析は1920年のPigou「厚生経済学」が最初である。外部不経済によって生じる私的限界費用と社会的限界費用との乖離を解消するために，その乖離分相当額を外部不経済の発生者に課すること，いわゆる Pigou 税による外部不経済の内部化をPigou は主張した。その考え方を交通混雑に適用して，混雑税の導入を示唆したのは Walters (1961) である。Walters は部分均衡市場における社会的厚生(社会的純便益) を最大化することを考えたのに対し，Strotz (1965) は交通市場と生産要素市場を同時に分析視野に入れ，いわば一般均衡市場に一歩近づいたモデルを定式化し，パレート最適解を達成するための混雑税の決定を論じた。さらに，Sherman (1971) は交通市場を自家用車（私的交通）と公共バス(公共交通）の2つに分け，また生産要素市場をも含めた一般均衡モデルを与えた。2つの交通機関は消費において代替的であり供給において混雑という外部不経済を及ぼしあう。Shermanはそのようなモデルで混雑税（あるいは混雑料金）をも含めた価格決定を扱った。

混雑を，定常的なものとして捉えるのではなく，1日（1週間，1年）の中でサイクルをもって発生する現象とみるならば，Peak-Load Pricing の問題となる。これはまず，Steiner (1957) による定式化，Pressman (1970) の数学的整理を経てその後の研究に続くが，基本的には限界費用価格形成原理に基づ

く2部料金制が示唆されている。

混雑問題に対する最新の経済分析は，交通路上のボトルネックの存在によって発生するいわゆる超混雑 (hyper-congestion) に焦点が当てられている。これは Braid(1989)や Arnott 他(1990)が提示し，Walters 以来の伝統的な定常的交通量のもとでの均衡分析の限界を超え，交通量の時間的変化を許容した場合の均衡分析への発展である[1]。

待ち行列モデルによる混雑現象の取り扱いはそれほど多くはない。その出発点になるのが Naor モデルである。もともと待ち行列論は，客の到着間隔や客へのサーヴィス時間が確率事象である場合に，サーヴィスを提供する窓口の個数，待ち行列の長さ等の最適化を考えるものである。Naor モデルでは，行列の発生を混雑と捉え，利己心による私的行動の結果の行列長と社会的に最適な行列長とが一致しないことが示された。Naor は，到着もサーヴィスもポアソン過程に従い，窓口が1つだけという状況を仮定した。Kendall の記号でいうならば，M/M/1 である。Naor の研究は経済学分野からの注目を引かなかったが，待ち行列論の研究者からの若干のフォローがあった。Knudsen (1972), Yechiali (1972), Lippman and Stidham (1977) 等によって，モデルの多様化・一般化，すなわち，M/M/s, GI/M/s, M/EK/1の場合や異なる費用構造のもとでの定式化と分析が行われた。それらのいずれについても，分析の中心は私的最適と社会的最適の乖離および最適混雑料金の決定にある。

混雑のような外部不経済があるときには，私的最適と社会的最適には乖離が生じることは経済学の世界では教科書レヴェルで述べられていることではあるが，確率モデルによるアプローチでも同様の主張ができるということは注目に値する。なぜならば，実際の交通量は確定的なものではなく，むしろ確率的に変動するからである。

1) 超混雑の経済分析についての簡潔・明快な論点整理が坂下 (1994) に与えられている。

II　モデルにおける仮定といくつかの基本式

定められた2地点を結ぶ道路がある。その道路を走行するために車が進入口に到着する。車の到着間隔（時間）は確率的であり，その確率分布について次のように仮定する。

仮定1　到着車の時間的到着間隔 t は指数分布 $f(t)=\lambda\cdot\exp(-\lambda t),\ t\geqq 0$ に従う。すなわち，ポアソン到着。

また，車が進入口を通過する際に要する時間（有料道路における料金徴収時間等）――これをサーヴィス時間と呼ぼう―― も確率的であり，その確率分布も以下のように仮定する。

仮定2　サーヴィス時間 t は指数分布 $g(t)=\mu\cdot\exp(-\mu t),\ t\geqq 0$ に従う。すなわち，ポアソン・サーヴィス。

進入口が1つで，そこでの車の行列長に制限があり，それが n 台以下のときには，Kendall の記号で以上の仮定を表示すれば，$M/M/1(n)$ となる。ポアソン到着のパラメター λ は，単位時間あたりの平均到着台数を意味する。また，ポアソン・サーヴィスのパラメター μ は単位時間あたりの平均サーヴィス台数すなわち進入口を通過する平均台数である。

仮定3　当該道路を走行することによってどの車も一定の同じ利得 R 円を得る。

仮定4　待ち行列の中ではどの車にも単位時間あたり一定の C 円の時間費用がかかる。

仮定5　進入口に到着した車は次の2つのいずれかを選択する。(1)待ち行列に加わり，時間費用という損失を受け，道路を走行することによって利得を得る，(2)待ち行列に加わらず，したがって，損失も利得も受けない。

仮定6　いずれの車も待ち行列に加わるかどうかは期待純利得の正負で決定する。但し，期待純利得がゼロのときには待ち行列に加わるものとする。

待ち行列長がゼロ台のときに到着した車が，道路に進入するときの期待損失

は C/μ である。進入口が空の場合には当然その車は道路に進入するはずだから，そのときの期待純利得 $R\text{-}C/\mu$ は非負でなければならない。

(1) $R\mu/C \geqq 1$

以上の仮定のもとで，モデル定式化のために必要な確率を与えておこう。

(2) 時間$(0, \tau)$ 内での到着がゼロ台である確率 $P[t \geqq \tau]$

$$= \int_\tau^\infty \lambda \exp(-\lambda t)\,dt = \exp(-\lambda\tau)$$

$$\fallingdotseq 1 - \lambda\tau \ (\text{微少な } \tau \text{ に対して})$$

(3) 時間 $(0, \tau)$ 内での到着が1台である確率 $P[t \leqq \tau]$

$$= \int_0^\tau \lambda \exp(-\lambda t)\,dt = 1 - \exp(-\lambda\tau)$$

$$\fallingdotseq \lambda\tau \ (\text{微少な } \tau \text{ に対して})$$

(4) 時間 $(0, \tau)$ 内で1台もサーヴィスを完了しない確率 $P[t \geqq \tau]$

$$= \int_\tau^\infty \mu \exp(-\mu t)\,dt = \exp(-\mu\tau)$$

$$\fallingdotseq 1 - \mu\tau \ (\text{微少な } \tau \text{ に対して})$$

(5) 時間 $(0, \tau)$ 内で1台がサーヴィスを完了する確率 $P[t \leqq \tau]$

$$= \int_0^\tau \mu \exp(-\mu t)\,dt = 1 - \exp(-\mu\tau)$$

$$\fallingdotseq \mu\tau \ (\text{微少な } \tau \text{ に対して})$$

ある時点で車が到着したとき，そのときの待ち行列長 i は確率変数である。もしこの i がある定数 n より小さいときには，その車は待ち行列に加わり，もし i が n 以上のときには，その車は道路への進入をあきらめ立ち去るものとする。したがって，i の観察値はつねに n 以下である。この n は以下のモデルで決定すべき変数として扱われる。

さて，時点 t において行列長が i である確率を $P_i(t)$ とすれば，微少な時間 t に対して以下のような確率が提示される。

$$P_0(t+\tau) = P_0(t)(1-\lambda\tau) + P_1(t)(1-\lambda\tau)$$

$$\fallingdotseq P_0(t)(1-\lambda\tau)+P_1(t)\mu\tau$$

$$P_i(t+\tau)=P_i(t)(1-\lambda\tau)(1-\mu\tau)+P_{i-1}(t)\lambda\tau(1-\mu\tau)$$
$$+P_{i+1}(t)(1-\lambda\tau)\mu\tau$$
$$\fallingdotseq P_i(t)(1-\lambda\tau-\mu\tau)+P_{i-1}(t)\lambda\tau+P_{i+1}(t)\mu\tau$$

故に，この確率を t で微分すれば，

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$$
$$P_i'(t)=-(\lambda+\mu)P_i(t)+\lambda P_{i-1}(t)+\mu P_{i+1}(t)$$

を得る。定常状態においては，$\lim_{t\to\infty} P_i'(t)=0$,

$$\therefore P_{i+1}=(\lambda/\mu)P_i$$

となる。待ち行列論でいうところのシステム利用率（utilization factor）ρ を

（6） $\rho\equiv\lambda/\mu$

と定義すれば，我々の待ち行列モデルは定常状態において，

（7） $P_{i+1}=\rho P_i \quad 0\leqq i\leqq n$

という定差方程式で記述され，この解

（8） $$P_i=\rho^i P_0=\frac{\rho^i}{1+\rho+\cdots+\rho^n}=\frac{\rho^i(1-\rho)}{1-\rho^{n+1}}$$

が容易に得られる。

確率分布 P_i の階乗積率母関数 $g(z)$ は

$$g(z)=E(z^x)=\sum_{i=0}^{n}P_iz^i=\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\cdot\frac{1-(\rho z)^{n+1}}{1-\rho z}$$

となるから，確率変数 i の期待値 $E(i)$ は

（9） $$E(i)=g'(1)=\frac{\rho[1-(n+1)\rho^n+n\rho^{n+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{n+1})}=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}$$

となり，また，単位時間に，進入口に到達したけれど待ち行列に加わらない車の台数の期待値は

(10) $\zeta=\lambda P_n=\dfrac{\lambda\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{n+1}}$

単位時間に待ち行列に加わる車の台数の期待値は

(11) $\chi=\lambda-\zeta=\lambda(1-P_n)=\lambda\left[1-\dfrac{\rho^n(1-\rho^n)}{1-\rho^{n+1}}\right]=\lambda\dfrac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}$

III 私的最適化

既に述べたように，進入口への到着車は，待ち行列に加わりサーヴィスを受けることによって得られる純利得が非負であれば，待ち行列に並び，純利得が負ならば並ばずに立ち去る。この考え方はドライヴァーの私的最適化の立場に立つものである。本節では，そのような観点からの最適な行列長 n_p を変数としてその値を求める。行列長が n のときの純利得 $G(n)$ は n の関数として，

(11) $G(n)=R-(n+1)C/\mu$

と表される。容易に分かるように，私的最適解 n_p は $R-(n+1)C/\mu\geqq 0$ を満たすような最小の整数解である。いいかえれば，解 n_p は

(12) $n\leqq R\mu/C<n+1$

を成立させるような整数値として得られる。ここで，$R\mu/C\equiv Vs$ と定義すれば，(12)を満たす整数値は次のように表すことができる。

(12)′ $n_p=[Vs]$, $[x]=x$ を越えない最大の整数値。

仮定3によって利得 R は定数として扱われているが，仮定を緩めて R が n の減少関数となる場合を考えてみよう。すなわち，R は行列に並びサーヴィスを受けることに対する限界評価値とみなすこともできるから，通常の限界評価値の曲線（＝需要曲線）が右下がりに描かれることに対応させるわけである。明らかにこの方がより一般的であろう。かくて，純利得は

(11)′ $G(n)=R(n)-(n+1)C/\mu,\quad R'(n)<0$

この場合の最適行列長 $n_p{}^d$ の図解は図1-2で示される。ここで $Vs(n)=$

$R(n)\mu/C$ である。なお，図 1 - 1 は R が一定の場合の図解である。

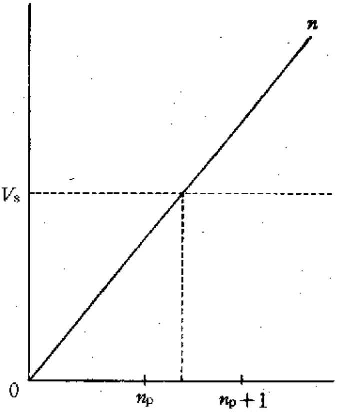


図 1-1

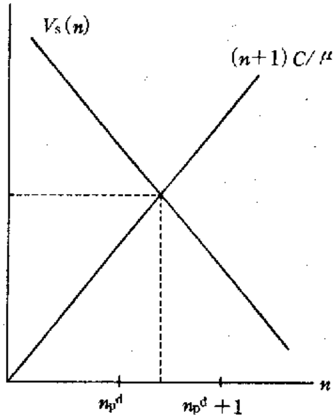


図 1-2

IV 社会的最適化

私的な純利得の代わりに何らかの社会的純利得を定義すれば，社会的最適化の意味での最適待ち行列長 n_0 を決定するモデルが得られる。社会的純利得として，単位時間における総純利得の期待値を用いる。それは前節の(9)，11)から，

$$(13)\qquad G(n)=\chi R-CE(i)=\lambda R\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}-C\left[\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right]$$

と定式化される。サーヴィス利用率 ρ が所与のもとでこの $G(n)$ を最大化するような整数解 n_0 は次の不等式を満たすはずである。

$$(14)\qquad G(n_0+1)<G(n_0)\geqq G(n_0-1)$$

この不等式を書き換えれば，

$$(15)\qquad \frac{n_0(1-\rho)-\rho(1-\rho^{n0})}{(1-\rho)^2}\leqq R\mu/C<\frac{(n_0+1)(1-\rho)-\rho(1-\rho^{n0+1})}{(1-\rho)^2}$$

を得る。この(15)を満たすような整数解を見つけるために，

(16) $$H(n)\equiv\frac{n(1-\rho)-(1-\rho^n)}{(1-\rho)^2}$$

を定義する。$H(n)$ は逓増的な増加関数であることが示されるので（付録2参照），そのグラフは図2で描かれるようなものとなる。

$H(n)$ を(15)に代入すれば，

(17) $$H(n)\leqq Vs<H(n+1)$$

これを満たすような整数解 n_0 は図2として図解される。図から容易に次の命題が導かれる。

命題1 $n_0<n_p$, すなわち，社会的最適な待ち行列長は私的最適なそれより小さい。

これは，混雑問題の経済分析から得られる結論と比較して，行列長と交通量との違いを別にすれば類似したものになっている。さらに，図から容易に次の命題も読みとれる。

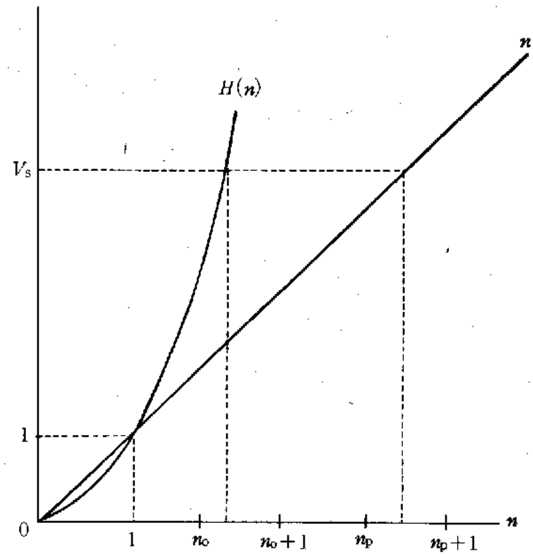


図 2

命題2　Vs が1に近づくほど n_p は n_0 に近づく。また，Vs が大であるほど n_p-n_0 は大きくなる。

これらの命題も，R を限界評価値（需要価格）に対応させることによって，経済分析からの結論と類似している。仮定3を緩めて R が n の減少関数であるときには，最適解の条件は(17)に代わって(17)′になり，その場合の図解は図3に示される。

(17)′　$H(n) \leqq R(n)\mu / C < H(n+1)$

この図からも容易に次の命題が得られる。

命題3　R が n の減少関数の場合でも，命題1，2がともに成立する。

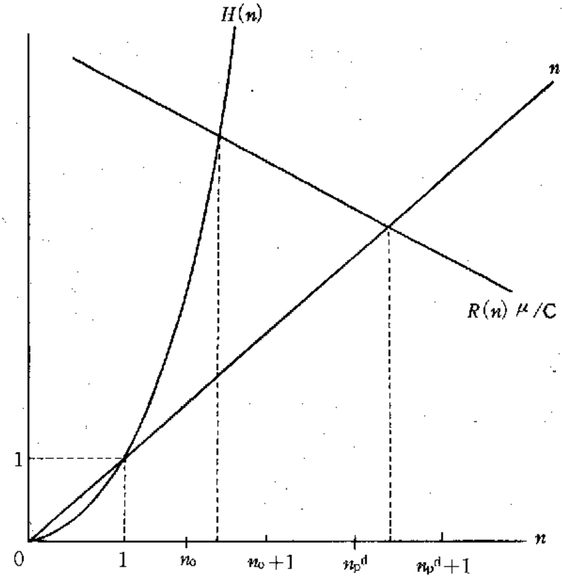


図　3

V　混雑料金の課金

前節までに見たように，社会的最適解 n_0 は私的最適解 n_p より小さい。これは，各ドライヴァーの私的欲求からの意志決定にまかせるだけでは進入口お

よび道路上での交通量が適正規模より過大になることを意味する。故に，行列長・交通量を抑制する手段が必要となる。ここでは行政的強制力によるよりも，ドライヴァーの選択にゆだねるという形式を採用し，進入口での課金すなわち混雑料金を徴収することを考えよう。それによって，利用者の純利得が減少し，行列長・交通量が抑制される。ただし，料金徴収の際の費用はかからないものと仮定する。

そのような場合の最適料金の水準は次式を満たさなければならない[2]。

(18) $n_0 \leqq (R-\theta^*)\mu/C < n_0+1$ ，θ^*＝最適料金

あるいは

(19) $R-n_0C/\mu - C/\mu < \theta^* \leqq R-n_0C/\mu$

従来の伝統的な経済分析では混雑料金がただ1つの大きさに決まるのに対し，ここではそれがある範囲の値として得られる点に注意しよう[3]。(19)から明らかに，次の命題を主張することができる。

命題4 最適料金の水準はモデルのすべてのパラメター (R, C, λ, μ) によって影響を受けるが，その許容範囲は待ち行列に加わることによる期待損失 C/μ のみによって変化する。

VI 数 値 例

社会的最適解がパラメターの種々の値に対して様々な値をとる様子を数値例で見てみよう。システムの利用率 ρ と，行列長に加わることによる利得と期待損失の比 $Vs(=R\mu/C)$ のそれぞれの数値のもとで得られる社会的最適解 n_0 が表1に示されている。

この表から以下の3点を指摘できる。

(1) Vs が一定のもとでは，ρ が大きくなれば n_0 は一定かあるいは小さくなる。

2) この混雑料金をドライヴァーから徴収することによって，全道路利用者の純利得と料金収入の和が最大になる。

3) これは行列長 n が整数値でなければならないことから来ている。

ρ → / V_s ↓	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.5	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
3.5	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
4.0	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
4.5	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
5.0	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1
5.5	5	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1
6.0	5	5	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1
6.5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1
7.0	6	5	5	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2
7.5	6	6	5	2	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2
8.0	7	6	6	2	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2
8.5	7	7	6	2	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2
9.0	8	7	6	6	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2
9.5	8	7	7	6	5	5	4	4	4	3	3	2	2	2	2
10.0	9	8	7	6	5	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2

表1　ρ と V_s の数値例を与えたときの社会的最適待ち行列長 n_0

2)　ρ が一定のもとでは，Vs が大きくなれば n_0 は一定かあるいは大きくなる。

これらはいずれも解についての自然な特徴であるといえよう。すなわち，(1)利用率 $\rho(=\lambda/\mu)$ が大きくなるというのは，到着率がサーヴィス率に対して相対的に大きくなり，進入口での混雑の増大を招くことになるだろう。そのような状況の時には，それによる社会的損失（外部不経済）の増大を抑制するために行列長をより一層小さくさせることが最適政策になる。(2)利得が期待損失に対して相対的に大きくなるというのを，待ち行列に加わることによる限界純評価が高まることだと解釈すれば，最適行列長が大きくなるという結果は合理的なものとなる。

付録1 $\rho=1$ のとき，

$$P_i=1/n,\quad E(i)=(n+1)/2,\quad \chi=\lambda(1-P_n)=\lambda(1-1/n),$$

$$G(n)=\chi R-CE(i)=\lambda(1-1/n)R-(n+1)C/2$$

付録2 $H(n)$ のグラフについて

$$H(n)\equiv\frac{n(1-\rho)-(1-\rho^n)}{(1-\rho)^2} \text{ の分子を } k(n)\equiv n(1-\rho)-(1-\rho^n)$$

と定義する。その導関数

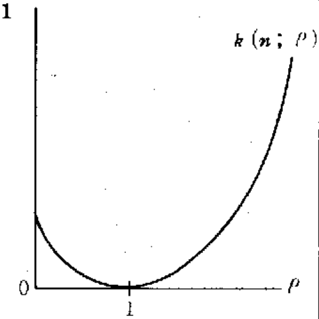
$$k'(n)=1-\rho+\rho^{n+1}\ln(\rho)$$

$$k''(n)=\rho^{n+1}\{\ln(\rho)\}^2$$

を得るが，$k'(n)$ の正負の符号を調べるために，$k'(n)$ をパラメター ρ で偏微分し，その符号は以下のようになる。

$$\frac{\delta k'(n;\rho)}{\delta\rho}=-1+(n+1)\rho^n\ln(\rho)+\rho^n \begin{array}{ll} <0, & 0<\rho<1 \\ >0, & \rho>1 \end{array}$$

この符号から，$k'(n;\rho)$ をパラメター ρ の関数とみなしたときのグラフが右図のように描かれ，かくて $\rho=1$ の場合を除き $k'(n)$ は正であることが示された。$k''(n)$ が正であることは容易に分かるので，以上のことから $H(n)$ のグラフが図2に描かれているようになる。



参考文献

Arnott, R., A de Palma and R. Lindsey (1990) : Economics of a Bottleneck, Journal of Urban Economics, 27, 111-130.

Knudsen, N. C. (1972), Individual and Social Optimization in a Multiserver Queue with a General Cost-Benefit Structure, Econometrica, 40, 515-528.

Lippman, S. A. and S. Stidham (1977), Individual versus Social Optimization in Exponential Congestion Systems, Operations Research, 25, 233-247.

Morse, P. M. (ed.) (1958), Queues, Inventories and Maintenance, John Wiley Sons.

Naor, P. (1969), The Regulation of Queue Size by Levying Tolls, Econometrica, 37, 15-24.

Pressman, I. (1970), A Mathematial Formulation of the Peak-Load Pricing Problem, Bell Journal of Economics, 1, 304-326.

Sherman, R. (1971), Congestion Interdependence and Urban Transit Fares, Econometrica, 39, 565-576.

Steiner, P. (1957), Peak-Loads and Efficient Pricing, Quarterly Journal of Economics, 71, 585-610.

Strotz, R. H. (1965), Urban Transportation Parables, in J. Margolis (ed.) The Public Economy of Urban Communities, Johns Hopkins Press, 1965, 127-169.

Walters, A. A. (1961), The Theory and Measurement of Private and Social Cost of Highway Congestion, Econometrica, 29, 676-699.

Yechiali, V. (1972), Customer's Optimal Joining Rules for the GI/M/s Queue, Management Science, 18, 349-370.

坂下 昇(1994),「交通超混雑の経済理論」, 坂下 昇・田淵隆俊, 自動車交通超混雑の経済分析, 日交研シリーズ A—164.