平成一四年三月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第169巻　第3号

平成14年3月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第169巻第3号，2002年3月

不確実性下の意思決定問題における類似関係の役割*

堀江（中川）真由美

I 序

不確実性下の選択行動の定式化において，現在最も広く用いられているのは期待効用理論である。一方，一連の非期待効用理論では，著名なアレのパラドクスを動機として，期待効用理論が対象としていない選好関係を扱うことで，より一般的な効用関数の存在が示されている。

この論文の主たる目的は，このような期待効用理論や非期待効用理論というアプローチではなく，不確実性下の選択行動を類似関係（similarity relations）によって再解釈することである。したがって，対象となる選好関係は，非期待効用理論で扱われる選好も含む。

類似関係の定式化は，Rubinstein〔8〕によって行われた。意思決定者の選択は選好関係ではなく類似関係を原始関係（primitives）としており，意思決定手続きは，類似関係と選択肢間の選好関係とを関連づけるものとされた。

本稿ではまず，Rubinstein の類似関係の拡張を提案する。それは，確率と賞金の相互に相関のある2つの類似関係であり，本論文ではそれらを ϕ, γー類似関係と呼ぶ。Aizpurua et al.〔1〕で扱われている相関類似関係（correlated similarity relations）は，確率にかんする類似関係が対応する賞金の大きさに依存するような類似関係であり，本稿における ϕ, γー類似関係は

* 今井晴雄教授並びに匿名査読者の方の貴重なご評言，ご佑助に対し，ここに厚謝いたします。尚，本稿の内容に関する責はすべて執筆者本人にあります。

その拡張形である。このような相関のある類似関係は，一般に対称性を満たさない。しかしながら，この論文で強調すべきは，非対称な類似関係であっても，ϕ, γ－類似関係という左右両側を代表するような対称性を満たす２つの類似関係を用いることにより分析が可能となるという点である。

類似関係を原始関係とした意思決定手続きによって誘導される選好関係は，一般に完備性を満たさない。しかし，類似関係が対称であるならば，結果として，この意思決定手続きと整合的な選択行動は，ほとんど一意な効用関数の最大化として特徴づけられる。Gilboa and Lapson〔4〕で指摘されるこのような一意性は，類似関係の対称性に起因するものであり，本稿においては，類似関係→意思決定手続き→選好関係という分析手法そのものを否定しない。その理由は，非対称な類似関係と意思決定手続きによって誘導される選好関係が，対称な場合のようにほとんど一意な効用関数では表現できないのは当然であり，その意味では全順序（total orders）を拡張したLuce〔6〕の半順序（semi orders）に対比されうるからである。むしろ対称な類似関係は，非対称な類似関係が異なる２つの対称な類似関係によって特徴づけられるという意味で重要な役割を果たすのである。

以下，第Ⅱ節ではまず Rubinstein の類似関係を再考し，ϕ, γ－類似関係と修正モデルが提起される。命題２および３は，類似関係を規定する関数から成る $U(p, x)$ が，ϕ－類似関係と意思決定手続きによって誘導される選好関係と整合的であり，かつ選択が $U(p, x)$ によって特徴づけられることを証明する。第Ⅲ節は，前節で得られた結果について議論する。

II　理論的枠組みと分析

この節では，まず確率 p と賞金 x における ϕ, γ－類似関係（similarity relations）を定義する。この類似関係とは，ロッテリー（lotteries）空間 $\boldsymbol{P}\times X$ 上の２つのペア (p_i, x_i) と (p_j, x_j)がそれぞれ p, x にかんして類似しているかどうかを表すものである。これらの類似関係に基づいた意思決定手続きを

通じて，意思決定者の選択は，類似関係を特徴づける ϕ や γ にのみ依存した効用関数の最大化として表されることを示す。

1 類似関係

類似関係（similarity relations）とは，ある与えられた数 a と b について，意思決定者が a と b を類似していると考えるか，類似していないと考えるかという関係である。例えば，ある意思決定者は，確率0.25と0.24を非常に近い数として捉え，それらの違いをあまり重視しないかも知れないが，0.25と0.4ならば，それらの数を非常に異なるものとして受け止めるかも知れない。

$A=[0, 1]$ を単位区間（a unit interval）とする。Rubinstein〔8〕の類似関係 $\approx$ とは，任意の $(a, b)\in A\times A$ にかんして，それらが類似しているか否かを規定する二項関係である。

定義1

$A\times A$ 上の二項関係 $\approx$ が類似関係（similarity relations）であるとは；

(S-1) 反射律：任意の $a\in A$ にかんして $a\approx a$.

(S-2) 対称律：任意の $a, b\in A$ にかんして $a\approx b$ ならば $b\approx a$.

(S-3) 連続性：$\approx$ は閉グラフをもつ.

(S-4) 中間性（betweenness）：$a\leq b\leq c\leq d$ かつ $a\approx d$ ならば $b\approx c$.

(S-5) 非退化性（non-degeneracy）：

(i) 任意の $a\in(0, 1)$ にかんして，ある b と c が存在して $b\approx a$ かつ $c\approx a$.

(ii) $a=1$ ならば，ある c が存在して $c\approx a$.

(iii) $a=0$ ならば，$c\approx a$ なる $c\in A$ は存在しない。

(iv) $0\not\approx 1$.

(S-6) 応答性（responsiveness）：$a^*=\sup_{\alpha\approx a}\alpha$, $a_*=\inf_{\alpha\approx a}\alpha$ をそれぞれ a の関数 $a^*(a)$，$a_*(a)$とする。このとき，a^*，$a_*\in(0, 1)$ ならば，

それらは a にかんする強い増加関数である。

定理 1

(S-1) - (S-6) を満たし $0<\lambda<1$ である任意の類似関係 $\approx$ にかんして，ある強い増加関数 $H:[0, 1]\to[0, 1]$ が存在し，

$$a\approx b \quad \text{iff} \quad \lambda\leq\frac{H(a)}{H(b)}\leq\frac{1}{\lambda}.$$ [1]

証明　Rubinstein〔8〕参照のこと。

この定理により，(S-1) - (S-6) を満たす任意の類似関係を定式化することが可能である。また，この λ は意思決定者に特有の識別度（the degree of discernment）を表すパラメータと解釈できる。$\lambda=1$ のとき，意思決定者は任意の与えられた数を完全に識別する。

2　モデル

$X=[0, 1]$ を賞金（金銭的結果）の集合，$P=[0, 1]$ とする。単ロッテリー（a simple lottery）(p, x) とは，確率 p で賞金 x を生じ，確率 $1-p$ で賞金 0 を生じるロッテリーのことをいう。このようなロッテリーの集合は $P\times X$ で表される。

$\succsim$ を単ロッテリーの集合 $P\times X$ 上に定義される選好関係とする。$\sim$，$\succ$ はそれぞれ $\succsim$ の対称部，非対称部とする。$\succsim$ は前順序（preorder）であると仮定する。つまり，$\succsim$ は，(R-1) 推移律と反射律，(R-2) 単調性，(R-3) 連続性，(R-4) $(0, x)\sim(0, 0)$，$(p, 0)\sim(0, 0)$ を満たすものとする。

$\approx_p$, $\approx_x$ をそれぞれ P, X 上の二項関係であるとし，ϕ: $P\times X\to(0, 1]$ は連続関数であるとする。

1)　Rubinstein〔8〕では，λ－比率類似関係は $\lambda>1$ によって定義されている。本稿では，λ を $0<\lambda\leq1$ としているが，何ら変わりはない。

定義2

(p_i, x_i), $(p_j, x_j) \in P \times X$ とする。$\approx_p^{\phi}$, $\approx_x^{\phi}$ がそれぞれ

(i)　$(p_i, x_i) \approx_p^{\phi} (p_j, x_j) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(p_i, x_i) p_i \leq p_j \leq p_i$ or $p_i \leq p_j \leq \dfrac{p_i}{\phi(p_j, x_j)}$,

(ii)　$(p_i, x_i) \approx_x^{\phi} (p_j, x_j) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(p_i, x_i) x_i \leq x_j \leq x_i$ or $x_i \leq x_j \leq \dfrac{x_i}{\phi(p_j, x_j)}$,

であるとき，ϕ－関係であるという。

定義1（S-4）を次のように修正する。

(S-4)′　任意の $x \in X$ にかんして，

$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$ かつ $(p_1, x) \approx (p_4, x)$ ならば $(p_2, x) \approx (p_3, x)$.

次の命題1では，この ϕ－関係が（S-1）～（S-3），（S-4）′，（S-5），（S-6）を満たす類似関係であることを示す。

命題1

$\approx_p$, $\approx_x$ を ϕ－関係であるとし，$\phi(p, x)p$ および $\phi(p, x)x$ がそれぞれ p, x にかんする強い増加関数であるとする。このとき，$\approx_p^{\phi}$, $\approx_x^{\phi}$ はそれぞれ，（S-1）～（S-3），（S-4）′，（S-5），（S-6）を満たす。

証明　付録A参照のこと。

命題1より，ϕ－関係は，$\phi(p, x)x$ がそれぞれ p, x にかんする強い増加関数であるとき，定義1の類似関係になっている。したがって，以下ではこの条件が満たされているとき，ϕ－関係を ϕ－類似関係であると呼ぶ。

$\gamma: P \times X \to (0, 1)$ は連続関数であるとし，任意の $x \in X$ について $\lim_{q \to 0} \dfrac{q}{\gamma(q, x)} = 0$，任意の $p \in P$ について $\lim_{y \to 0} \dfrac{y}{\gamma(p, y)} = 0$ を満たすとする。

定義3

(q_i, y_i), $(q_j, y_j) \in P \times X$ とする。$\approx_p^{\gamma}$, $\approx_x^{\gamma}$ がそれぞれ

(i)　$(q_i, y_i) \approx_q^\gamma (q_j, y_j) \iff \gamma(q_j, y_j) q_i \leq q_j \leq q_i \text{ or } q_i \leq q_j \leq \dfrac{q_i}{\gamma(q_i, y_i)},$

(ii)　$(q_i, y_i) \approx_y^\gamma (q_j, y_j) \iff \gamma(q_j, y_j) y_i < y_j < y_i \text{ or } y_i \leq y_j \leq \dfrac{y_i}{\gamma(q_i, y_i)}$

であるとき，γー関係であるという。

$\dfrac{q}{\gamma(q, x)}$, $\dfrac{x}{\gamma(q, x)}$ がそれぞれ p, x の強い増加関数であるとき，同様にして，γー関係を γー類似関係であると呼ぶ。

以降の小節では，混乱がない場合に限り $(p_i, x_i) \approx_p^k (p_j, x_j)$ を $p_i \approx_p^k p_j$, $(p_i, x_i) \approx_x^k (p_j, x_j)$ を $x_i \approx_x^k x_j$, $k=\phi, \gamma$ と書く。

3　意思決定手続き

Rubinstein〔8〕,〔9〕に従い，類似関係に基づく意思決定手続きを次のように定める。

定義4（意思決定手続き（DP））

(p_i, x_i), $(p_j, x_j) \in P \times X$, $\approx_p^k$, $\approx_x^k (k=\phi, \gamma)$ を任意の類似関係とする。

(DP-1)　$p_i > p_j$ かつ $x_i > x_j$ ならば，$(p_i, x_i) \succ (p_j, x_j)$.

(DP-2)　$p_i \leq p_j$, $p_i \approx_p^k p_j$, $x_i > x_j$ かつ $x_i \not\approx_x^k x_j$ ならば，$(p_i, x_i) \succ (p_j, x_j)$.

(DP-3)　$x_i \leq x_j$, $x_i \approx_x^k x_j$, $p_i > p_j$ かつ $p_i \not\approx_p^k p_j$ ならば，$(p_i, x_i) \succ (p_j, x_j)$.

4　ϕ, γー類似関係による効用表現

この小節では，前節で定義した ϕ, γー類似関係と意思決定手続きに基づいた意思決定者の選択行動を分析する。ϕ, γー類似関係に基づく意思決定手続き (DP) は，$P \times X$ 上の選好関係 $\succ$ を誘導する。次の命題2および命題3では，この誘導された $\succ$ と整合的な $\succsim$ がどのような効用関数によって特徴づけられるかを明らかにする。

命題 2

$\approx^{\phi}_{p}$, $\approx^{\phi}_{x}$ を ϕー類似関係であるとする。このとき，関数 $U(p, x)=\phi(p, x)px$ は，この $\approx^{\phi}_{p}$, $\approx^{\phi}_{x}$ に基づいた意思決定手続き（DP）から誘導される $\succ$ と整合的な選好関係 $\succsim$ を表現する。すなわち，任意の (p_i, x_i), $(p_j, x_j) \in P \times X$ にかんして，

$$(p_i, x_i) \succ (p_j, x_j) \quad \Rightarrow \quad U(p_i, x_i) > U(p_j, x_j).$$

である。

証明　付録B参照のこと。

命題 3

$\approx^{\phi}_{p}$, $\approx^{\phi}_{x}$ を ϕー類似関係であるとし，選好関係 $\succsim$ は $\approx^{\phi}_{p}$, $\approx^{\phi}_{x}$ に基づいた意思決定手続き（DP）と整合的であるとする。このとき，$U(p_1, x_1) > U(p_2, x_2)$ であるような任意の (p_i, x_i), $i=1, 2$ にかんして，$p_i' \approx^{\phi}_{p} p_i$ かつ $x_i' \approx^{\phi}_{x} x_i$ であるような (p_i', x_i'), $i=1, 2$ が存在して $(p_1', x_1') \succ (p_2', x_2')$ である。

証明　付録C参照のこと。

以上の 2 つの命題は，類似関係が対称性を満たす場合，誘導された選好関係を表現する効用関数は，類似関係を規定する ϕ に依存する形となることを意味する。

Aizpurua et al.〔1〕では，期待効用表現と整合的な p にかんする相関類似関係の存在が証明された。次の系で同様の結果が得られる。

系 1

$\approx^{\phi}_{x}$, $\approx^{\phi}_{p}$ を $\phi(p, x)x=u(x)$ であるような ϕー類似関係であるとする。このとき，関数 $U(p, x)=pu(x)$ は，$\approx^{\phi}_{p}$, $\approx^{\phi}_{x}$ に基づいた意思決定手続き（DP）から誘導される $\succ$ と整合的な選好関係 $\succsim$ を，命題 2 と同様の意味で表現する。

この系から分かるように，期待効用表現は $\phi(p,\ x)x=u(x)$ と同値である，つまり p および x の類似関係は，賞金額 x にのみ依存するような対称な類似関係ということである。

γー類似関係については，同様に次の系が導かれる。

系 2

$\approx_p^\gamma,\ \approx_x^\gamma$ を γー類似関係であるとし，選好関係 $\succsim$ は $\approx_p^\gamma,\ \approx_x^\gamma$ に基づいた意思決定手続き（DP）と整合的であるとする。このとき，

(i)　関数 $U(q,\ y)=\dfrac{qy}{\gamma(q,\ y)}$ は、命題 2 の意味で $\succsim$ を表現する。

(ii)　$U(q_1,\ y_1)>U(q_2,\ y_2)$ であるような任意の $(q_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2$ にかんして，$q_i'\approx_p^\gamma q_i$ かつ $y_i'\approx_x^\gamma y_i$ であるような $(q_i',\ y_i')$，$i=1,\ 2$ が存在して $(q_1',\ y_1')\succ(q_2',\ y_2')$ である。

証明　命題 2 および 3 とほぼ同様であるので省略。

III　結　論

$\phi,\ \gamma$ー類似関係は，単ロッテリーのペア $(p_i,\ x_i)$ と $(p_j,\ x_j)$ の間の p および x の対称性を満たす類似関係を定義するものであった。効用表現は，この ϕ や γ によって決まるのであるが，この $\phi,\ \gamma$ は，ある与えられた $p,\ x$ の対称性を満たさない類似関係となる範囲の上限，下限を決める関数であるとも考えられる。$\phi(p,\ x),\ \gamma(p,\ x)<1$ ならば，類似しているとされる区間はシングルトンではない。

このような類似区間の存在に対するひとつの解釈は，意思決定者の識別力の限界である。しかしながら，Prelec〔7〕にあるように，実験に基づく確率加重関数の推定では，$U(p,\ x)=w(p)u(x)$ としたとき，$w(0.8)$ は 0.65 か，それよりも小さい。意思決定者が，数値としての 0.8 と 0.65 を「識別できない」

と考えるのは現実的ではない。むしろ，意思決定者が選択に際して，どこまで識別することに関心があるか，と捉える方が自然であり，意思決定に伴う熟考の費用を少なくしたり，選択を単純化して捉えることで心理的負担を軽減しようする行動によるとも考えられよう。さらに，$w(p)$ の推定から分かる，もうひとつ重要な点は，$w(p)$ はS型をしており，p が小さいときには $w(p)>p$，大きいときには $w(p)<p$ であり，$p\simeq 0.4$ で不動点を持つ，ということである。ϕ，γ－類似関係の枠組みでいえば，p が小さいときには γ－類似関係を，p が大きいときには ϕ－類似関係を基にしていることになる。このような $w(p)$ と整合的な類似関係による枠組みは，今後の課題であるといえよう。

付　　録

（A．命題1の証明）

$\approx^{\phi}_{p}$ と $\approx^{\phi}_{x}$ は全く同じ性質を持つため，$\approx^{\phi}_{p}$ のみを考える。

(i) 任意の $(p_i, x_i)\in P\times X$ にかんして，$\phi(p_i, x_i)p_i\leq p_i\leq p_i$ であるから，$(p_i, x_i)\approx^{\phi}_{p}(p_i, x_i)$。

(ii) (p_i, x_i)，$(p_j, x_j)\in P\times X$，$p_i\neq p_j$ かつ $(p_i, x_i)\approx^{\phi}_{p}(p_j, x_j)$ とする。$p_i>p_j$ のとき $\phi(p_i, x_i)<p_j/p_i$，$p_j>p_i$ のとき $\phi(p_j, x_j)<p_i/p_j$ である。$(a_i, b_i)\equiv(p_j, x_j)$，$(a_j, b_j)\equiv(p_i, x_i)$ と定義する。このとき，$a_i>a_j$ ならば $\phi(a_i, b_i)<a_j/a_i$，$a_j>a_i$ ならば $\phi(a_j, b_j)<a_i/a_j$ であるから，定義より，$(a_i, b_i)\approx^{\phi}_{p}(a_j, b_j)$ である。したがって，$(p_j, x_j)\approx^{\phi}_{p}(p_i, x_i)$。

(iii) ϕ－関係の定義より（S-3）が満たされるのは明らか。

(iv) （S-4）′，（S-5），（S-6）が満たされるのは，ϕ の仮定より明らか。（証明終）

（B．命題2の証明）

$\succsim$ を $U(p, x)$ によって表される選好関係であるとする。

(i) $x_1>x_2$ かつ $p_1>p_2$ とする。このとき，意思決定手続き（DP）より，$(p_1, x_1)\succ(p_2, x_2)$。

$\phi(p, x)p$，$\phi(p, x)x$ はそれぞれ p，x にかんする強い増加関数であるから，$\phi(p, x)px$ も両引数にかんして強い増加関数である。したがって，$U(p_1, x_1)>U(p_2, x_2)$。

(ii)　$p_2>p_1$, $p_2\approx_p^{\phi}p_1$, $x_1>x_2$ かつ $x_1\not\approx_x^{\phi}x_2$ とする。このとき，意思決定手続き (DP) より，$(p_1, x_1)\succ(p_2, x_2)$。

$p_2\approx_p^{\phi}p_1$ かつ $x_1\not\approx_x^{\phi}x_2$ であることから，$\phi(p_2, x_2)<p_1/p_2<1$ かつ $x_2/x_1<\phi(p_1, x_1)$ である。

このとき，$\dfrac{\phi(p_2, x_2)}{\phi(p_1, x_1)}<\dfrac{p_1x_1}{p_2x_2}$。したがって，$U(p_1, x_1)>U(p_2, x_2)$。

(iii)　$x_2>x_1$, $x_2\approx_x^{\phi}x_1$, $p_1>p_2$ かつ $p_1\not\approx_p^{\phi}p_2$ とする。このとき，意思決定手続き (DP) より，$(p_1, x_1)\succ(p_2, x_2)$。

$p_2\not\approx_p^{\phi}p_1$ かつ $x_1\approx_x^{\phi}x_2$ であることから，$p_2/p_1<\phi(p_1, x_1)$ かつ $\phi(p_2, x_2)<x_1/x_2<1$ である。

このとき，$\dfrac{\phi(p_2, x_2)}{\phi(p_1, x_1)}<\dfrac{p_1x_1}{p_2x_2}$。したがって，$U(p_1, x_1)>U(p_2, x_2)$。(証明終)

（C．命題３の証明）

まず，次の補題を考える。

補題１

$\approx_p^{\phi}$, $\approx_x^{\phi}$ をそれぞれ p, x の ϕ－類似関係とし，$P\times X$ 上の選好関係 $\succsim$ は (R-1)-(R-4) を満たし，意思決定続き (DP) と整合的であるとする。このとき，$p_*>0$, $x^*>0$ であるような任意の $(p, x)\in P\times X$ について，$(p, x)\sim(p_*, x^*)$ である。

補題の証明

(DP) より，十分に小さい $\epsilon>0$ にかんして，$(p, x-\epsilon)\prec(p_*, x^*)$。$\succsim$ の連続性より $(p, x)\precsim(p_*, x^*)$。同様に，(DP) より，十分に小さい $\epsilon>0$ にかんして，$(p, x)\succ(p_*, -\epsilon, x^*)$ 。$\succsim$ の連続性より，$(p, x)\succsim(p_*, x^*)$。したがって，$(p, x)\sim(p_*, x^*)$。
(証明終)

$\phi(p_1, x_1)p_1x_1>\phi(p_2, x_2)p_2x_2$ であるとする。このとき，$p_1>p_2$ あるいは $x_1>x_2$, あるいはその両方が成立していなければならない。

(i)　$p_1>p_2$ かつ $x_1>x_2$ とする。(DP) より，$(p_1, x_1)\succ(p_2, x_2)$。

(ii)　$p_1>p_2$ かつ $x_2>x_1$ とする。

(a)　$x_2\approx_x^{\phi}x_1$ であったとする。仮定より，$\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{\phi(p_2, x_2)}{\phi(p_1, x_1)}\dfrac{p_2}{p_1}$。$x_{2*}$ を $x_{2*}=\phi(p_2, x_2)x_2$, p_{2*} を $p_{2*}=\phi(p_2, x_2)p_2$ とする。このとき，

$$\frac{x_1}{x_2}=\phi(p_2, x_2)\frac{x_1}{x_{2*}}>\frac{\phi(p_2, x_2)}{\phi(p_1, x_1)}\frac{1}{\phi(p_2, x_2)}\frac{p_{2*}}{p_1}.$$

であり，

$$\phi(p_1, x_1)\phi(p_2, x_2)\frac{x_1}{x_{2*}} > \frac{p_{2*}}{p_1}。$$

しかしながら，$\phi(p_2, x_2)x_1 \leq x_{2*}$ であるから，$\phi(p_1, x_1) > p_{2*}/p_1$ でなければならない。したがって，$p_1 > p_2$ かつ $p_1 \not\sim_p p_{2*}$。(DP) より，$(p_1, x_1) \succ (p_{2*}, x_{2*})$。

(b) $x_2 \not\sim_x x_1$ であったとする。次のようにして，数列 $\{p^n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する。

$$p^0 = p_1,\ p^1 = (p^0)_*,\ \ldots,\ p^n = (p^{n-1})_*$$

$$x^0 = x_1,\ x^1 = (x^0)^*,\ \ldots,\ x^n = (x^{n-1})^*$$

仮定より，$p^n = \phi(p^{n-1}, x^{n-1})p^{n-1}$ であり，$x^n = \dfrac{x^{n-1}}{\phi(p^n, x^n)}$ であるから，

$$\begin{aligned}\phi(p^n, x^n)p^n x^n &= \phi(p^n, x^n)\phi(p^{n-1}, x^{n-1})p^{n-1}\frac{x^{n-1}}{\phi(p^n, x^n)} \\ &= \phi(p^{n-1}, x^{n-1})p^{n-1}, x^{n-1}\end{aligned}$$

ここで，x^k を $\phi(p_2, x_2)x_2 \leq x^k \leq x_2$ となる $\{x^n\}$ の最初の要素であるとする。x^n は強い増加数列であるから，このような x^k は必ず存在する。x^kの定義より，$\phi(p^k, x^k)x^k > \phi(p_2, x_2)x_2$。(a)と同様に，$x_{2*}$ を $x_{2*} = \phi(p_2, x_2)x_2$, p_{2*} を $p_{2*} = \phi(p_2, x_3)p_2$ と定義する。このとき，

$$\phi(p^k, x^k)\phi(p_2, x_2)\frac{x^k}{x_{2*}} > \frac{p_{2*}}{p^k}$$

しかしながら，$\phi(p_2, x_2)x^k \leq x_{2*}$ より，$\phi(p^k, x^k) > p_{2*}/p^k$。したがって，$p^k > p_{2*}$ かつ $p^k \not\sim_p p_{2*}$。(DP) より，$(p^k, x^k) \succ (p_{2*}, x_{2*})$。補題1より，$(p_1, x_1) \succ (p_{2*}, x_{2*})$ が成立する。

(iii) $p_1 < p_2$ かつ $x_1 < x_2$ のときは，p と x の役割を入れ替えることにより全く同じ結果が得られるので，省略。

(証明終)

参考文献

〔1〕 Aizpurua, J. M., T. Ichiishi, J. Nieto, and J. R. Uriarte, "Similarity and Preference in the Space of Simple Lottery," *Journal of Risk and Uncertainty*, 6, 1993, pp. 289 297.

〔2〕 Allais, P. M., "Le Comportment de L'homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats de Axioms de L'ecole," *Econometrica*, 21, 1953, pp. 503-546.
〔3〕 Cohen, M., J. Y. Jaffray, and T. Said, "Individual Behavior under Risk and under Uncertainty : An Experimental Study," *Theory and Decision*, 18, 1985, pp. 203-228.
〔4〕 Gilboa, I. and R. Lapson, "Aggregation of Semiorders : Intransitive Indifference Makes a Difference," *Economic Theory*, 5, 1995, pp. 109-126.
〔5〕 Kahneman, D. and A. Tversky, "Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, 47, 1979, pp. 263-291.
〔6〕 Luce, R. D., "Semiorders and a Theory of Utility Discrimination," *Econometrica*, 24, 1956, pp. 178-191.
〔7〕 Prelec, D., "The Probability Weighting Function," *Econometrica*, 66, 1998, pp. 497-528.
〔8〕 Rubinstein, A., "Similarity and Decision-making under Risk (Is There a Utility Theory Resolution to the Allais Paradox ?)," *Journal of Economic Theory*, 46, 1988, pp. 145-153.
〔9〕 Rubinstein, A., *Modeling Bounded Rationality*, The MIT Press, 1998.
〔10〕 Tversky, A., "Features of Similarity," *Psychological Review*, 84, 1977, pp. 327 352.