経済論叢（京都大学）第174巻第4号，2004年10月

非完備市場におけるマルチンゲール測度（1）

岩　城　秀　樹
吉　川　大　介

I　はじめに

本論文（1）と（2）では，所与の連続した時間 [0, T] で取引可能な経済における条件付請求権の価格付けについて考察する。市場が完全競争的で，無摩擦かつ無裁定であるとするならば，時刻 T に金額 Y が支払われる条件付請求権の現在価格（時刻0価格）は，同値マルチンゲール測度 Q によって

$$\Pi(Y)=\mathsf{E}^{Q}[\Gamma_T^{-1}Y] \tag{1.1}$$

で与えられる。ただし，ここで，$\mathsf{E}^{Q}[\cdot]$ は Q の下での期待値を表わし，Γ_T^{-1} は割引率を表わす。すなわち，Γ_t は当該経済における時刻 $t\in[0, T]$ での価値尺度財の価格であり，$\Gamma_0=1$ とする。市場が完備であれば，同値マルチンゲール測度は，一意となり，価格 $\Pi(Y)$ も一意となる（Harrison and Pliska [1981]）。しかしながら，市場が完備でない，すなわち，非完備である場合には，一般に，同値マルチンゲール測度 Q は，無数に存在してしまうので，無裁定の議論だけでは，(1.1) によって価格を一意に与えることはできない (Harrison and Pliska [1981], Dalang, Morton and Willinger [1990], Föllmer and Shweizer [1991], Delbaen and Schachermayer [1994], Frittelli [2000])。そこで，市場が非完備な場合には，何らかの特定の選択基準によって，同値マルチンゲール測度を1つに特定することが考えられる。

選択基準として挙げられるのは主として次の二つである。一つは何らかの形で経済主体の効用最大化問題に還元できるということ，もう一つは資産価格が

従うもとの測度と何らかの距離の概念を用いて「近い」ということである。

特定の選択基準によって特定されたマルチンゲール測度の中で，既存の文献において，その性質がよく研究されてきたものには，最小マルチンゲール測度(minimal martingale measure，以下 MMM と略す)，分散最適マルチンゲール測度（variance optimal martingale measure，以下 v-MM と略す)，最小相対エントロピー・マルチンゲール測度（minimal entropy martingale measure，以下 MEMM と略す)[1] がある。これらのマルチンゲール測度はいずれも数学者によって提案されたものであるため，その経済学的意味や解釈が必ずしも明らかではない。

本論文（1）と（2）では，一連のこれらのマルチンゲール測度を概観すること目的とし，（1）では，はじめにマルチンゲール測度の一般的な定義を行った後に，MMM について説明し，その経済学的意味について考察する。続いて，（2）では，v-MM と MEMM について説明し，その経済学的意味について考察する。また，これら一連のマルチンゲール測度の関係についても言及する。なお，本論文（1）と（2）を通じて，理解の便宜を図るため，各命題や定理などには，可積分性や関数空間上の関数列の収束などの技術的な部分を除いて簡略な証明を付したが，厳密な証明については，各参考文献を参考されたい。

II マルチンゲール測度

以下，記法は一貫したものを用いる。当該経済の不確実性は，フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F}, P)$，$\mathbf{F} := \{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$，で表わされるものとする。当該経済には d 種類のリスク資産と 1 種類の価値尺度財となる無リスク資産が存在し，d 種類のリスク資産の価格を価値尺度財の価格で割った割引価格の変動は，$\mathbf{R}^d$-値確率過程 $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$ で表わされるとする。X は $\mathbf{F}$-

1) これは canonical martingale measure (CMM) (Miyahara [1996]) とも，minimal entropy martingale probability measure (MEM) (Frittelli [2000]) ともいわれる。

適合なセミマルチンゲールとする[2]。すなわち，Doob-Meyer 分解が可能であり，

$$X=X_0+M+A$$

と表現できる。ここで $M=\{M_t=(M_t^1, ..., M_t^d)^\top, t\in[0, T]\}$[3] は2乗可積分な局所マルチンゲールであり，$A=\{A_t=(A_t^1, ..., A_t^d)^\top, t\in[0, T]\}$ は有界変動をもつ可予測過程とする。以下では，議論を簡単にするため，特に断らない限り，Xをはじめとする確率過程のサンプル・パスは P-a.s. で連続であるとする。また，E を P の下での期待値演算子とする。

時刻 T でのみ，支払いのある条件付請求権の価格付けを考え，価値尺度財価格で割った条件付請求権の時刻 T での支払い金額を H で表わす。以下では，この条件付請求権を条件付請求権 H と呼ぶことにする。条件付請求権 H は $\mathfrak{F}_T$-可測な確率変数で，

$$(\mathsf{E}[H^2])^{\frac{1}{2}}<\infty, \text{ すなわち, } H\in\mathfrak{L}^2(P)$$

とする。

$\Theta:=\{\theta_t, t\in[0, T]\}$ は，リスク資産の取引戦略の集合を表わすとする。すなわち，θ_t は時刻 t でのリスク資産の保有単位数を表わす。$L^2(M)$ を

$$\|\theta\|_{L^2(M)}:=\left\|\left(\int_0^T \theta_s^\top d\langle M\rangle_s\theta_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}$$

$$=\left\|\left(\left\langle\int\theta_s dM_s\right\rangle_T\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}<\infty$$

を満たす R^d-値可予測過程 θ から成る空間とし，$L^2(A)$ を

$$\|\theta\|_{L^2(A)}:=\left\|\int_0^T|\theta_s^\top dA_s|\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}<\infty$$

を満たす R^d-値可予測過程 θ から成る空間とする。さらに

$$\Theta:=L^2(M)\cap L^2(A)$$

とする。このとき，

2) 以下，セミマルチンゲールに関する術語，記法は，特に断らない限り，Dellacherie and Meyer [1982] に準拠する。

3) ⊤ は，転置を表す。

$$G(\theta):=\left\{G_t(\theta):=\int_0^t \theta_s dX_s,\ t\in[0,\ T]\right\}\in\mathfrak{S}^2(P)$$

となる $\mathbf{R}^d$-値可予測過程 θ から成る空間は Θ に一致する（Schweizer [1994]）。

定義 2.1 （局所）マルチンゲール Z が $Z_0=1$ かつ XZ が（局所）マルチンゲールとなるとき，Z を X のマルチンゲール密度過程と呼ぶ。さらに Z が正値をとるならば，強意のマルチンゲール密度過程と呼ぶ。

定義 2.2 $(\Omega,\ \mathfrak{F})$ 上の（符号付）測度 Q が，$Q(\Omega)=1$，$Q\ll P$，$\left\{\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathfrak{F}_t},\ t\in[0,\ T]\right\}$ が X のマルチンゲール密度過程となるとき，Q を X の（符号付）（局所）マルチンゲール測度という。Q が非負値の場合，（局所）マルチンゲール測度と呼び，さらに $Q\sim P$ ならば，同値（局所）マルチンゲール測度と呼ぶ。また，

$$\mathbf{E}\left[\frac{dQ}{dP}G_T(\theta)\right]=0,\qquad \forall\,\theta\in\Theta$$

を満たすとき，Q を（符号付）Θ-マルチンゲール測度と呼ぶ。$\mathbf{P}_s(\Theta)$ を符号付 Θ-マルチンゲール測度のすべてから成る集合とし，$\mathfrak{D}:=\left\{D:=\frac{dQ}{dP}\ ;\ Q\in\mathbf{P}_s(\Theta)\right\}$ とする。

III 最小マルチンゲール測度

はじめに，Z がマルチンゲール密度過程となる必要十分条件を示し，次に，それから出発して，最小マルチンゲール測度を定義する。

命題 3.1 (Schweizer [1992], Proposition 5) $\alpha^i=\{\alpha_t^i,\ t\in[0,\ T]\}$，$i=1,\ldots,d$，を $\int_0^T(\alpha_u^i)^2 d\langle M^i\rangle_u<\infty$ となる可予測過程として，

$$A_t^i=\int_0^t \alpha_u^i\, d\langle M^i\rangle_u \tag{3.1}$$

とする。このとき，$Z\in\mathfrak{M}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ がマルチンゲール密度過程となるための必要十分条件は，各 i に対して，M^i と直交し，$N_0^i=0$ となる局所マルチンゲール

$N^i=\{N_t^i,\ t\in[0,\ T]\}$ によって

$$Z_t=1-\int_0^t Z_s\alpha_s^i dM_s^i+N_t^i,\qquad t\in[0,\ T] \tag{3.2}$$

となることである。

証明

$$N_t^i:=Z_t-1+\int_0^t Z_u\alpha_u^i dM_u^i$$

とする。伊藤の公式より，

$$\begin{aligned} d(X^iZ)&=X^idZ+Z^idX^i+d[Z,\ X^i]\\ &=\text{局所 }P\text{-マルチンゲール}+Z^idA^i+d[Z,\ M^i]\\ &=\text{局所 }P\text{-マルチンゲール}+Z^i\alpha^id\langle M^i\rangle+d[Z,\ M^i]\\ &=\text{局所 }P\text{-マルチンゲール}+Z^i\alpha^id[M^i]+d[Z,\ M^i]\\ &=\text{局所 }P\text{-マルチンゲール}+d[N^i,\ M^i] \end{aligned}$$

したがって，題意を得る。　□

以下では，(3.1)が満たされているとする。

定義 3.1

$$B_t:=\sum_{i=1}^d\langle M^i\rangle_t, \tag{3.3}$$

$$\sigma_t^{ij}:=\frac{d\langle M^i,\ M^j\rangle_t}{dB_t},\qquad i,j=1,\ldots,d, \tag{3.4}$$

$$\gamma_t^i:=\alpha_t^i\sigma_t^{ii},\qquad i=1,\ldots,d,\ t\in[0,\ T] \tag{3.5}$$

とする。このとき

$$\sigma_t\hat{\lambda}_t=\gamma_t\qquad P\text{-a.s.},\ t\in[0,\ T] \tag{3.6}$$

となる $\mathbf{R}^d$-値可予測過程 $\hat{\lambda}\in L^2_{\text{loc}}(M)$ が存在するならば，X は構造条件（SC）を満たすという（Jacod [1979]，Dellacherie and Meyer [1982]）。

(3.6)で定義される $\hat{\lambda}$ は，いわゆるリスクの市場価格（market price of risk）を表わしている。したがって，構造条件（SC）を満たす必要十分条件は，市場が無裁定となることである（Delbaen and Schachermayer [1994]）。

命題 3.2 (Schweizer [1992] Proposition 5, Schweizer [1995] Propositon 2)
X は構造条件（SC）を満たすとする。このとき，$Z\in\mathfrak{M}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ がマルチンゲール密度過程となるための必要十分条件は，各 i に対して，M^i と直交する $R\in\mathfrak{M}^2_{0,\mathrm{loc}}(P)$ が存在して，

$$Z_t=1-\int_0^t Z_s\hat{\lambda}_s dM_s+R_t, \qquad t\in[0,\ T] \tag{3.7}$$

を満たすことである。特に，

$$\hat{Z}:=\mathfrak{E}\left(-\int\hat{\lambda}dM\right) \tag{3.8}$$

は，X のマルチンゲール密度過程となる。

証明（十分性）
$Z\in\mathfrak{M}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ が(3.8)を満たすとする。このとき，伊藤の公式より，

$$d(ZX^i)=(X^i dZ+ZdM^i+d[Z,\ M^i]-d\langle Z,\ M^i\rangle) +ZdA^i+d\langle Z,\ M^i\rangle.$$

上式右辺の括弧内の項は，局所 P-マルチンゲールであり，(3.3)-(3.6)より，

$$ZdA^i+d\langle Z,\ M^i\rangle=Z\gamma^i dB-Z(\sigma\hat{\lambda})^i dB=0$$

であるから，Z はマルチンゲール密度過程となる。特に，$R\equiv0$ とすると，$Z=\hat{Z}$ となる。
(必要性)
國田・渡辺分解により，$\varsigma\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ と M と直交する $R^0\in\mathfrak{M}_{0,\mathrm{loc}}{}^2$ によって

$$Z_t=1+\int_0^t\varsigma_u dM_u+R_t^0 \tag{3.9}$$

と表せる。ここで，$R^0\in\mathfrak{M}^2_{0,\mathrm{loc}}$ を

$$R_t:=R_t^0+\int_0^t(\varsigma_u+Z_u\hat{\lambda})dM_u$$

とすると，Z は(3.8)を満たす。R^0 は，M と直交しているので，あとは，$\int(\varsigma_u+Z_u\hat{\lambda})dM_u$ が M と直交することを示せばよい。

$$\left\langle M^i, \int(\varsigma_u+Z_u\hat{\lambda})\,dM_u\right\rangle_t=\sum_{j=1}^{d}\int_0^t(\varsigma_u{}^j+Z_u\hat{\lambda}^j)\,d\langle M^i, M^j\rangle_u$$
$$=\int_0^t\sum_{j=1}^{d}\sigma_u{}^{ij}(\varsigma_u{}^j+Z_u\hat{\lambda}^j)\,dB_u$$
$$=\int_0^t((\sigma_u\varsigma_u)^i+Z_u\gamma_u{}^i)\,dB_u$$
$$=\int_0^t(\sigma_u\varsigma_u)^i dB_u+\int_0^t Z_u\alpha_u^i\,d\langle M^i, M^i\rangle_u$$
$$=\int_0^t(\sigma_u\varsigma_u)^i dB_u-\langle Z, M^i\rangle_t$$
$$=\int_0^t(\sigma_u\varsigma_u)^i dB_u-\int_0^t\sum_{j=1}^{d}\varsigma_u^j\sigma_u^{ji}dB_u$$
$$=\int_0^t(\sigma_u\varsigma_u)^i dB_u-\int_0^t(\sigma_u\varsigma_u)^i dB_u=0.\quad\square$$

定義 3.2　$\hat{Z}=\mathfrak{E}(-\int\hat{\lambda}dM)$ が（局所）マルチンゲールとなるとき，$\frac{d\hat{P}}{dP}:=Z_T$ で定義される（符号付）（局所）マルチンゲール測度 $\hat{P}$ を最小（符号付）（局所）マルチンゲール測度という。

注 3.1　$\hat{Z}$ は，確率微分方程式

$$Z_t=1-\int_0^t Z_s\hat{\lambda}_s dM_s,\qquad t\in[0,\ T]$$

の強解となっていることから，(3.7) との対比において $\hat{P}$ を最小符号付局所マルチンゲール測度と呼んでいる。

X が構造条件を満たすとき，

$$\hat{K}:=\int_0^t\hat{\lambda}_s^{\top}dA_s=\int_0^t\hat{\lambda}_s^{\top}\sigma_s\hat{\lambda}_s dB_s=\left\langle\int\hat{\lambda}dM\right\rangle_t\qquad(3.10)$$

を平均・分散トレードオフ過程，略して MVT 過程と呼ぶ。

定理 3.1 (Pham, Rheinländer and Schweizer [1998] Corollary 5)　MVT 過程 $\hat{K}$ が連続で有界ならば，全ての $H\in\mathfrak{L}^2(P)$ は，$H_0\in\mathsf{R}$, $\xi^H\in\Theta$ と，M と直交して $\mathsf{E}[L_0^H]=0$ となる $L^H\in\mathfrak{M}^2(P)$ によって，

$$H=H_0+\int_0^T \xi_s^H dX_s+L_T^H \qquad P\text{-a.s.} \tag{3.11}$$

と表現できる。

証明 $\theta, \psi\in\Theta$, $V_0\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{F}_0, P)$, および, M と直交する $L\in\mathfrak{M}^2$ によって,

$$V_t := V_0+\int_0^t \theta_s^\top dA_s+\int_0^t \psi_s dM_s+L_t, \qquad 0\leq t\leq T$$

とおく。はじめに, β を任意の正定数として,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[e^{\beta\hat{K}_T}V_T^2]\geq(\beta-y^2)\mathsf{E}\Big[\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2 d\hat{K}_t\Big] \\ +\mathsf{E}\Big[\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\psi_t^\top d\langle M\rangle_t\psi_t\Big] \\ -\frac{1}{y^2}\mathsf{E}\Big[\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\theta_t\Big] \qquad \forall y\in\mathbf{R}\,;\, y\neq 0\end{aligned} \tag{3.12}$$

となることを示す。

M と L が直交することに注意して, 伊藤の公式を用いると,

$$\begin{aligned}e^{\beta\hat{K}_T}V_T^2=V_0^2+\beta\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2 d\hat{K}_t+2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t\theta^\top dA_t \\ +\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}d\Big[\int\psi dM\Big]_t+\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}d[L]_t \\ +2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t\psi_t dM_t+2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t dL_t.\end{aligned}$$

ここで, (3.6) を用いたのち, Cauchy-Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned}2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t\theta_t^\top dA_t &= 2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\hat{\lambda}_t \\ &\geq -2\Big(\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\theta_t\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2 d\hat{K}_t\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq -y^2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2 d\hat{K}_t-\frac{1}{y^2}\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_s\theta_t.\end{aligned}$$

最後の不等式の導出には，$-2\sqrt{ab}\geq -a-b$ を用いた。したがって，Nを$N_0=0$ となるマルチンゲールとして，

$$e^{\beta\hat{K}_T}V_T^2\geq\beta\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2d\hat{K}_t-y^2\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}V_t^2d\hat{K}_t$$

$$+\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\phi_t^\top d\langle M\rangle_t\phi_t-\frac{1}{y^2}\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\theta_t+N_T$$

以上より，(3.12)を得る。

さて，國田・渡辺分解より，$\theta\in\Theta$ に対して，Mと直交するマルチンゲール$L(\theta)$ によって，

$$H-\int_0^T\theta_t^\top dA_t=H_0(\theta)+\int_0^T\phi_t dM_t+L_T(\theta),$$

$$H_0(\theta):=\mathbf{E}\left[H-\int_0^T\theta_t^\top dA_t\right]\qquad(3.13)$$

となる $\phi\in\Theta$ が存在する。ここで，$J:\Theta\to\Theta$ を $\theta\in\Theta$ に(3.13)の ϕ を対応させる写像とすると，(3.11)はJの不動点を見つけることであるといえる。(3.12)を用いてこのことを示そう。

$$\|\theta\|_\beta:=\left\|\left(\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\theta_t\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}$$

によってΘ上のノルムを定めると，これは，$\|\cdot\|_{L^2(M)}$ と同値なノルムとなる。

$\beta>y^2>1$ として，$\theta^{(1)},\theta^{(2)}\in\Theta$ に対して，$\theta:=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$,

$\phi:=J(\theta^{(1)})-J(\theta^{(2)})$, $V_0:=H_0(\theta^1)-H_0(\theta^{(2)})$, $L:=L(\theta^{(1)})-L(\theta^{(2)})$ とすると，$V_T=H-H=0$ であるから，(3.12)より，

$$\|J(\theta^{(1)})-J(\theta^{(2)})\|_\beta^2=\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\phi_t^\top d\langle M\rangle_t\phi_t\right]$$

$$\leq\frac{1}{y^2}\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta\hat{K}_t}\theta_t^\top d\langle M\rangle_t\theta_t\right]$$

$$=\frac{1}{y^2}\|\theta^{(1)}-\theta^{(2)}\|_\beta^2.$$

以上より，J が $(\Theta, \|\cdot\|_\beta)$ が縮小写像であることがわかる。したがって，縮小写像の不動点定理より，Θ 内に J の不動点となる点の存在が示される。

□

定義 3.3 (3.11)を H の **Föllmer-Schweizer** 分解という。

$\hat{K}$ が有界ならば，$\frac{d\hat{P}}{dP}\in\mathfrak{L}^2(P)$ となるから $\hat{L}\in\mathfrak{M}^2(P)$, $\hat{\varsigma}\in L^2(M)$ によって $\frac{d\hat{P}}{dP}\in\mathfrak{L}^2(P)$ は

$$\frac{d\hat{P}}{dP}=\mathsf{E}[\hat{Z}_T^2]-\mathsf{E}[\hat{Z}_T\hat{L}_T]+\int_0^T\hat{\varsigma}_s\,dX_s+\hat{L}_T \tag{3.14}$$

というように Föllmer-Schweizer 分解できる。

以下，MMM について，ヘッジという観点からその経済学的意味について考察する。

$$V_t=\theta_tX_t+\eta_t$$

で定義される $V=\{V_t, 0\leq t\leq T\}$ を考える。V_t は，時点 t におけるリスク資産と無危険資産からなるポートフォリオ $\phi_t:=(\theta_t, \eta_t)$ の価値を同じ時点での無危険資産価格で割った相対価値を表わしている。また，

$$C_t(\phi)=V_t-\int_0^t\theta_s\,dX_s$$

で定義される $C(\phi)=\{C_t(\phi), 0\leq t\leq T\}$ はポートフォリオを生成することに伴うコストを表わしており，**費用過程** (cost process) といわれる。とくに，$C_t=C_s$, $\forall t, s\in[0, T]$ のときは，ポートフォリオの取引戦略が**自己充足** (self-financing) であることを意味している。

市場が非完備な場合，自己充足取引戦略 $\phi=\{\phi_t=(\theta_t, \eta_t), t\in[0, T]\}$ による複製は不可能である。すなわち，どのような自己充足取引戦略のもとでも

$$H-V_T=0 \qquad P\text{-a.s.}$$

を満たすことは不可能である。この $H-V_T$ は時刻 T での支払い H を，あるヘッジャーが自己充足取引戦略 ϕ によってポートフォリオを生成してヘッジを行った場合の総損失であり，これがこの非完備市場において投資することに伴うリスクと考えられる。自己充足な取引戦略が可能な場合，このリスクは $H-c-G_T(\theta)$ となる。そこで，所与の $c\in\mathsf{R}$ と所与の条件付請求権 $H\in\mathfrak{L}^2(P)$ に対して，最小化問題：

$$\min_{\theta\in\Theta}\mathsf{E}[(H-c-G_T(\theta))^2] \tag{3.15}$$

を考える。これは損失（リスク）を平均二乗の意味で最小化する戦略を求める問題である。リスク指標をどのように定義するかについては，議論の余地はあるが[4]，伝統的には二次リスクを最小化するという議論が一般的であるので，本稿でも二次リスクを用いた議論を考える。この問題に対する解は，次の定理で与えられる。

定理 3.2 (Pham, Reinländer and Schweizer [1998] Theorem 7)　$\hat{K}$ は有界であるとする。さらに，X が次の仮定

(SA)：Föllmer-Schweizer 分解(3.14)において $\hat{L}_T=0$ (3.16)

を満たすとする。このとき，$H\in\mathfrak{L}^{2+\varepsilon}(P)$, $\varepsilon>0$ に対して，問題(3.15)の解 $\theta=\xi^{(c)}$ は，次で与えられる。

$$\xi_t^{(c)}=\xi_t^H-\frac{\hat{\varsigma}_t}{\hat{Z}_t^0}\left(\hat{V}_t-c-\int_0^t\xi_s^{(c)}dX_s\right), \tag{3.17}$$

ただし，ここで，

$$\hat{Z}_t^0:=\hat{\mathsf{E}}[\hat{Z}_T|\mathfrak{F}_t]=\mathsf{E}[\hat{Z}_T^2]+\int_0^t\hat{\varsigma}_s dX_s,$$

$$\hat{V}_t:=\hat{\mathsf{E}}[H|\mathfrak{F}_t]=H_0+\int_0^t\xi_s^H dX_s+L_t^H,\qquad t\in[0,T]$$

4) Coleman, Li and Patron [2002] 参照。

とし，$\hat{\mathsf{E}}$ は，$\hat{P}$ の下での期待値演算子を表わす。

証明　最小化の 1 階の条件から，最適戦略 $\xi^{(c)}$ は，

$$\mathsf{E}[(H-c-G_T(\xi^{(c)}))G_T(\theta)]=\hat{\mathsf{E}}\left[\frac{H-c-G_T(\xi^{(c)})}{\hat{Z}_T}G_T(\theta)\right]$$
$$=0,\ \forall\theta\in\Theta.$$

を満たさなければならない。一方，$\hat{P}$ は，X に対するマルチンゲール測度であるから，$\theta\in\Theta$ を任意の有界過程とすると，$\hat{P}$ のもとで，X と直交する $N\in\mathfrak{M}^2(\hat{P})$ に対して，

$$\hat{\mathsf{E}}[N_T G_T(\theta)]=0$$

となる。したがって，

$$H-c-G_T(\xi^c)=N_T\hat{Z}_T=N_T\hat{Z}_T^0. \tag{3.18}$$

となる N を求めればよいと考えられる。伊藤の公式より，

$$H-c-G_T(\xi^c)-N_T\hat{Z}_T^0$$
$$=H_0-c-N_0\mathsf{E}[\hat{Z}_T^2]+\int_0^T(\xi_s^H-\xi_s^{(c)}-N_s\hat{\varsigma}_s)dX_s+L_T^H$$
$$-\int_0^T\hat{Z}_s^0dN_s-[N,\hat{Z}^0]_T.$$

X の連続性と $\hat{P}$ の下で X と N が直交することより，

$$[N,\hat{Z}^0]_T=\int\hat{\varsigma}^{\top}d[N,X]=\int\hat{\varsigma}^{\top}d\langle N,X\rangle^{\hat{P}}=0.$$

したがって，

$$N_t:=\frac{H_0-c+L_0^H}{\mathsf{E}[\hat{Z}_T^2]}+\int_0^t\frac{1}{\hat{Z}_s^0}dL_s^H,$$

$$\xi^{(c)}:=\xi^H-N\hat{\varsigma}$$

とすればよい。ここで，伊藤の積公式より，

$$\hat{Z}_t^0N_t=H_0-c+\int_0^tN_s\hat{\varsigma}_s dX_s+L_t^H$$
$$=H_0-c+\int_0^t(\xi^H-\xi^{(c)})dX_s+L_t^H$$

$$=\hat{V}_t-c-\int_0^t \xi^{(c)}dX_s$$

となることに注意すると(3.17)を得る。 □

注 3.2 仮定（SA）は既存のリスク資産価格過程から，マルチンゲール測度が構成できることを意味している。

定理3.2より，$c=H_0=\hat{\mathsf{E}}[H]$ とすれば，MMM の価格体系の下で，損失リスクの分散を最小化するヘッジ戦略において最適なヘッジ・ポートフォリオの価値がヘッジする条件件請求権の価値に一致することになる。しかしながら，この定理では，仮定（SA）という特別な仮定が置かれていた。この仮定が満たされない場合，このヘッジ戦略と MMM の価格体系との整合性は不明となる。仮定（SA）をはずしても，損失リスクの分散を最小化するヘッジ戦略と価格体系が一般に整合的になるマルチンゲール測度が次節で取り上げる分散最適マルチンゲール測度である[5]。

例 3.1 **(Pham, Rheinländer and Schweizer [1998])** $X=(X^1,\ldots,X^d)^\top$ が次の確率微分方程式にしたがっているとする。

$$\frac{dX_t^i}{X_t^i}=(b_t^i-r_t)dt+\sum_{j=1}^n v_t^{ij}dW_t^j,$$

ただし，W は $\mathbf{R}^n$-値標準ブラウン運動である。$d\leq n$ として，各時点 $t\in[0,T]$ における分散共分散行列 $v_t:=[v_t^{ij}]$ の階数は rank $v_t=d$ とする。いまの場合，

$$\int\hat{\lambda}dM=\int(b-r\underline{1})^\top(vv^\top)^{-1}vdW,$$

$$\hat{K}=\left\langle\int\hat{\lambda}dM\right\rangle=\int(b_s-r_s\underline{1})^\top(v_sv_s^\top)^{-1}(b_s-r_s\underline{1})ds$$

5) 損失リスクのヘッジ問題では，MMM が一般に用いられないという議論については Rheinländer and Schweizer [1997] に詳しい。

となる。ただし，$\underline{1}:=(1,\ldots,1)^{\top}\in\mathsf{R}^d$. したがって，相対リスク過程（あるいはリスクの市場価格）

$$v^{\top}(vv^{\top})^{-1}(b-r\underline{1})$$

が有界であれば，MVT 過程 $\hat{K}$ も有界となる。F^W を W から生成されるフィルトレーションの完備化フィルトレーションとし，F を $\mathsf{F}\supset\mathsf{F}^W$ となる任意のものとする。ここで，$n=d$ とし，

$$v^{\top}(vv^{\top})^{-1}(b-r\underline{1}) \text{ は } \mathsf{F}^W\text{-適合的}$$

とする。このとき，$\hat{Z}_T=\mathfrak{E}(-\int\hat{\lambda}dM)_T$ は，$\mathfrak{F}^W_T$-可測となり，マルチンゲール表現定理から，仮定（SA）が満たされて定理3.2の結果を適用できる。 □

参考文献

Coleman, T. F., Li, Y. and Patron, M. C. [2003] "Discrete hedging under piecewise linear risk minimization," *Journal of risk*, 5.

Dalang, R. C., Morton, A. and Willinger, W. [1990] "Equivalent martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market models," *Stochastics and stochastics reports*, 29, pp. 185-201.

Delbaen, F., Grandits, P., Rheinländer, T., Samperi, D., Schweizer, M., and Stricker, C. [2002] "Exponential hedging and entropic penalties," *Mathematical finance*, 12, pp. 99-123.

Delbaen, F. and Schachermayer, W. [1994] "A general version of the fundamental theorem of asset pricing," *Mathematische annalen*, 300, pp. 463-520.

——— [1996] "The variance optimal martingale measure for continuous processes," *Bernoulli*, 9, pp. 81-105.

Dellacherie, C. and Meyer, P.-A. [1982] *Probabilities and potential B*, North-Holland.

Föllmer, H. and Schweizer, M. [1991] "Hedging of contingent claims under incomplete information," in *Applied stochastic analysis, stochastics monographs*, 5, London, Gordon and Breach.

Frittelli, M. [2000] "The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets," *Mathematical finance*, 10, pp. 39-52.

Gourieroux, C., Laurent, J. P. and Pham, H. [1998] "Mean-variance hedging and numeraire," *Mathematical finance*, 8, pp. 179-200.

Harrison, J. M, and Pliska, S. R. [1981] "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading," *Stochastic processes and their applications*, 11, pp. 215-260.

Ihara, S. [1993] *Information theory for continuous system*, World Scientific.

Jacod, J. [1979] *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Springer.

Laurent, J. P. and Pham, H. [1999] "Dynamic programing and mean-variance hedging," *Finance and stochastics*, 3, pp. 83-110.

Miyahara, Y. [1996] "Canonical martingale measures of incomplete asset market," *Probability thoery and mathematical statistics : proceedings of the seventh Japan-Russia symposium*, Tokyo World Scientific, pp. 343-352.

——— [1999a] "Minimal entropy martingale measures of jump type price processes in incomplete assets markets," *Asia-Pacific financial markets*, 6, pp. 97-113.

——— [1999b] "Minimal relative entropy martingale measures and their applications to option pricing theory," *Proceedings of JIC99, The 5th JAFEE international conference*, pp. 316-323.

——— [2000] "Minimal relative entropy martingale measure of Birth and Death process," *Discussion papers in economics, Nagoya City University*, 273, pp. 1-20.

Pham, H. and Rheinländer, T. and Schweizer, M. [1998] "Mean-variance hedging for continuous processes:new proofs and examples," *Finance and stochastics*, 2, pp. 173-198.

Rheinländer, T. and Schweizer, M. [1997] "On L^2-projections on a space of stochastic integrals," *The annals of probability*, 25, pp. 1810-1831.

Schweizer, M. [1991] "Option hedging for semimartingales," *Stochastic processes and their applications*, 37, pp. 339-363.

——— [1992] "Martingale densities for general asset prices," *Journal of mathematical economics*, 21, pp. 363-378.

——— [1994] "Approximation random variables by stochasitc integrals," *The annals of probability*, 22, pp. 1536-1575.

——— [1995a] "On the minimal martingale measure and the Follmer-Schweizer decomposition," *Stochastic analysis and applications*, 13, pp. 573-599.

——— [1995b] "Variance-optimal hedging in discrete time," *Mathemathics of operations research*, 20, pp. 1-32.

——— [1996] "Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure," *The annals of probability*, 24, pp. 206-236.