

ゼロ金利政策下における 金利の期間構造に関する考察*

山 分 俊 幸

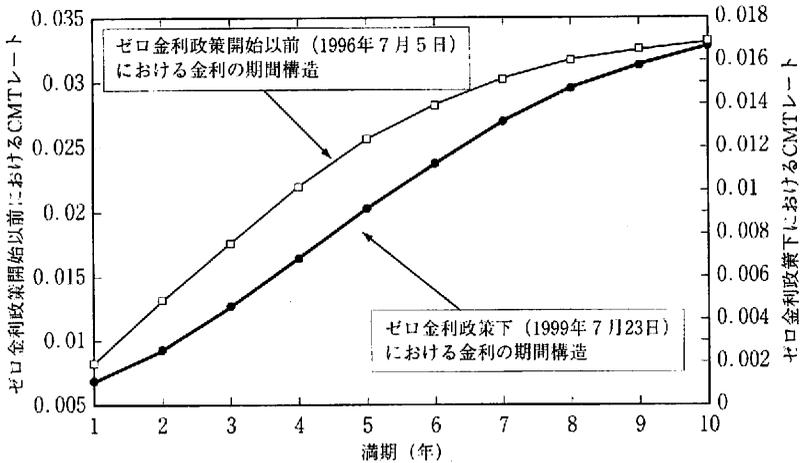
I はじめに

1999年2月のゼロ金利政策開始以来現在まで、日本の無担保コール・オーバーナイト・レートは、ほとんどの期間においてほぼゼロの値を示している。またアメリカでも、FF レート（Federal Funds rate）誘導目標が2003年6月には1%まで引き下げられた。FF レートは2004年9月末において1.75%であり、さらに今後段階的に引き上げられることが予想されるものの、まだ非常に低い状態にあるといえる。現在のような世界的低金利の状態においては、金利の期間構造の推定によく用いられてきた Vasicek モデルなどの Gaussian モデルでは、瞬間的スポットレートが負になる可能性を排除できないため、推定に不具合が生じる。

第1図はゼロ金利政策開始以前と以後において、日本の国債のイールド（Constant Maturity Treasury rate: CMT レート）カーブがどのような形状をしているのかを示している。ゼロ金利政策が行われていた期間は、1999年2月3週から2000年8月1週まで、ならびに2001年3月3週から現在までである。2001年3月から現在まで行われている政策は、いわゆる量的緩和政策であり、正確にはゼロ金利政策と異なるが、両政策期間における金利の特徴が同じであ

* 本論文作成に当たり、指導教官である木島正明教授には日頃の暖かいご指導とともに貴重な助言を頂戴した。また、乾孝治助教授、辻村元男助教授にも同様に貴重な助言を頂戴した。ここに謝意を表したい。もちろん、本論文における全ての誤りは著者に帰する。

第1図 ゼロ金利政策開始以前とゼロ金利政策下における金利の期間構造



るので、本論文では両政策期間を合わせてゼロ金利政策期間と呼ぶことにする。第1図を見ると、ゼロ金利政策下においては、イールドカーブが、短中期において下に凸かつ中長期において上に凸という複雑な形状を示していることがわかる。これに対して、Gaussian モデルを用いた1ファクター期間構造モデルでは、イールドカーブが必ず上に凸となるため、ゼロ金利政策下におけるイールドカーブをうまく捉えられないことがわかる。

無裁定の仮定の下で、満期 T の無リスク割引債の0時点価格 $D(T)$ は

$$D(T) = E^{P^*}[\exp(-\int_0^T r_s ds)]$$

と表される。ここで r_s は瞬間的スポットレートを表し、期待値は同値マルティンゲール測度 P^* についてとられている。

He [2000] によると、金利の期間構造モデルが複雑な形状のイールドカーブにうまくフィットするためには、瞬間的スポットレート r_s が3ファクター以上で表されなければならない。当然ゼロ金利政策下においても、多くのファクターを用いるならば、複雑な形状のイールドカーブにうまくフィットするモデルを作ることができるはずである。しかし、ファクターを多くすれば、バラ

メータの数が増えるだけでなく、推定方法が複雑になり、パラメータ推定が困難になる。

このような問題に対して丸茂他 [2003] では、ゼロ金利政策下において、1ファクターモデルにゼロ金利政策解除時点 τ という確率変数を導入することで、実際のデータとうまく合う国債イールドの期間構造モデルを構築している。丸茂他 [2003] では、Vasicek モデルの平均回帰とボラティリティーのパラメータが長期的に変化しないと仮定している。そして、それらのパラメータをゼロ金利政策下のデータのみによって推定するのではなく、ゼロ金利政策以前のデータによって推定された値をゼロ金利政策下でも用いている。

本論文では、丸茂他 [2003] のモデルを利用することで、ゼロ金利政策下における金利の期間構造を推定する。丸茂他 [2003] と異なる点は、ゼロ金利政策下におけるパラメータの値が、ゼロ金利政策以前のものと異なっているかもしれないという考えから、ゼロ金利政策下のデータのみを用いて、全てのパラメータを同時に推定したことが挙げられる。また、丸茂他 [2003] では、ゼロ金利政策解除時点 τ の従う確率分布として標準ガンマ分布を用いたが、本論文では、ゼロ金利政策解除のハザードレートがワイブル分布に従うと仮定した。ワイブル分布を採用した理由は、ワイブル分布を用いた場合には、標準ガンマ分布を用いた場合に比べて、イールドカーブが下に凸となる短期において、モデルから得られるイールドと現実のイールドとのフィットが良いためである。また、ハザードレートに関してワイブル分布を用いる方が直感的に理解しやすいことも理由として挙げられる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず次の第Ⅱ節で丸茂他 [2003] のモデルを基にして、ゼロ金利政策下における無リスク割引債の価格モデルを提示し、第Ⅲ節では用いるデータの紹介をする。そして、第Ⅳ節では用いた推定方法を示し、第Ⅴ節で推定結果の考察をする。最後の第Ⅵ節では本論文の結論と今後の課題を示す。

II モデル

1 通常の1ファクターモデル

瞬間的スポットレート r_t の変動は、同値マルチンゲール測度 P^* の下で

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \delta dW_t^* \quad (1)$$

と表される Vasicek モデルに従うとする。

このとき木島 [1999] によると、無裁定の仮定の下で、満期 T の無リスク割引債の0時点価格 $D(T)$ は

$$D(T) = E^{P^*}[\exp(-\int_0^T r_s ds)] = H_1(T) e^{-H_2(T)r_0} \quad (2)$$

$$H_1(t) = \exp\left\{\frac{(H_2(t) - t)(\beta^2\alpha - \delta^2/2)}{\beta^2} - \frac{\delta^2 H_2^2(t)}{4\beta}\right\}$$

$$H_2(t) = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}$$

と表される。ここで期待値は同値マルチンゲール測度 P^* についてとられている。

2 ゼロ金利政策下におけるモデル

ゼロ金利政策実施期間は事前に決定されているわけではないので、ゼロ金利政策解除時点 τ を確率変数として考えることができる。よって、ゼロ金利政策解除をデフォルトのようにとらえ、同値マルチンゲール測度 P^* の下で、ゼロ金利政策解除時点 τ のハザード率を $h^*(t)$ とし、

$$1_{\tau \leq t} = N_t$$

とする。また、ゼロ金利政策期間中における短期金利の推移がほぼゼロになっていることから、ゼロ金利政策下における瞬間的スポットレートをゼロと仮定する。そして、政策解除後には瞬間的スポットレートの変動が Vasicek モデルに従うと考える。よって、ゼロ金利政策解除時点 τ が与えられたときの時点 t における瞬間的スポットレート r_t^i が、同値マルチンゲール測度 P^* の下で

$$dr_t^r = N_t \{ \kappa(\mu - r_t^r) dt + \sigma dW_t^* \} \quad (3)$$

を満たすとする。ここで、ブラウン運動 W_t^* は τ と独立であるとする。

このとき、満期 T の無リスク割引債の t 時点価格 $D(t, T)$ は

$$D(t, T) = E^{P^*} [\exp(-\int_t^T r_s^r ds) | \mathfrak{F}_t] \quad (4)$$

と表されるが、これは $\tau > t$ という条件の下で解析的に表され、

$$D(t, T) = \int_t^T H_1(T-s) h^*(s) e^{-(\phi_s^* - \phi_t^*)} ds + e^{-(\phi_t^* - \phi_t^*)} \quad (5)$$

$$H_1(t) = \exp \left\{ \frac{(H_2(t) - t)(\kappa^2 \mu - \sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 H_2^2(t)}{4\kappa} \right\}$$

$$H_2(t) = \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}$$

となる。ここで、 $\phi_t^* = \int_0^t h^*(u) du$ とする¹⁾。

本論文のモデルが抱える問題点の1つは、(3)式が示すように、ゼロ金利政策解除後において瞬時的スポットレートが負になる可能性が排除されていないことである。しかし本論文では、ゼロ金利政策下における金利の期間構造のみを推定しているために、この問題の影響は少ないと思われる。

III データ

データとしては、1年物から10年物までの国債の利率 (Constant Maturity Treasury rate: CMT レート) の週次データ²⁾を用いる。サンプル期間は、1999年2月3週から2000年8月1週まで、ならびに2001年3月3週から2003年8月5週までである。第1期は、ゼロ金利政策が開始されてから一度解除されるまでの期間である。第2期は、ゼロ金利政策が再開されてからの期間である。

IV パラメータ推定方法

本論文モデルの生存関数が、同値マルチンゲール測度の下でワイブル分布に

1) 証明については丸茂他 [2003] を参照。

2) 満期6ヶ月から10年における6ヶ月ごとの国債の割引債イールド (Houglter 法により推定) を用いて導出している。

従うと仮定し $h^*(t) = ab(at)^{b-1}$ とする。 t 時点におけるモデルから得られる CMT レートの理論値は、CMT レートが額面同価の無リスククーポン債のクーポン額であるので、割引債価格を用いて

$$1 = \sum_{j=1}^{2i} \frac{1}{2} CMT^*(i)_t D\left(t, t + \frac{j}{2}\right) + D(t, t+i)$$

$$CMT^*(i)_t = 2 \left[\frac{1 - D(t, t+i)}{\sum_{j=1}^{2i} D\left(t, t + \frac{j}{2}\right)} \right] \quad (6)$$

と表せる。ここで、 $CMT^*(i)_t$ はモデルから得られる t 時点における満期 i 年の CMT レートの理論値を表す。

(5) 式を (6) 式に代入することで CMT レートの理論値が得られ、次の (7) 式を週ごとに最小化することで同値マルチンゲール測度の下での r_t^f のパラメータが求められる。

$$\sum_{i=1}^{10} (CMT(i)_t - CMT^*(i)_t)^2 \quad (7)$$

ここで、 $CMT(i)_t$ は t 時点における満期 i 年の CMT レートの観測値を表す。

V 推定結果

第 1 期、第 2 期において推定されたパラメータの平均と標準偏差が、それぞれ第 1 表、第 2 表に示されている。第 1 表、第 2 表によると、 κ 、 μ 、 σ は全ての期間において正に推定されている。これは望ましい結果である。パラメータの水準としては、全ての期間において κ が低く推定された。したがって、ゼロ金利解除後の瞬時的スポットレートの変動は全ての期間において低い平均回帰性を示すことになる。一方、長期平均 μ は 3% と少し高く推定された。瞬時的スポットレートの長期平均としては高い値なので、ゼロ金利政策解除後におけるスポットレート変動のリスクプレミアムは、常に正に非常に大きいと考えられる。また、 σ の推定値は第 1 期では少し高い値を示しており、第 2 期では低い値を示しているものの妥当な値であるといえる。

第1表 第1期におけるパラメータ
推定値³⁾

パラメータ	平均	標準偏差
κ	0.5927	0.0691
μ	0.0313	0.0051
σ	0.0354	0.0315
a	0.4171	0.0800
b	1.3816	0.0501

第2表 第2期におけるパラメータ
推定値⁴⁾

パラメータ	平均	標準偏差
κ	0.2664	0.0555
μ	0.0372	0.0104
σ	0.0005	0.0021
a	0.2055	0.0453
b	1.6467	0.3221

一方、 τ に関するパラメータについても全ての期間において正に推定されており、望ましい結果が得られたといえる。特にbの値が常に1以上に推定されたことは望ましい結果であった。その理由は、bの値が1以上であるならば、ハザードレートが時間とともに増大していくからである。つまり、投資家が、時間とともにゼロ金利政策が解除されやすくなると考えていることになるからである。そしてbの値が1以下であるならば、投資家が、時間とともにゼロ金利政策が解除されにくくなると考えていることになるので、現実と整合的でなくなるからである。

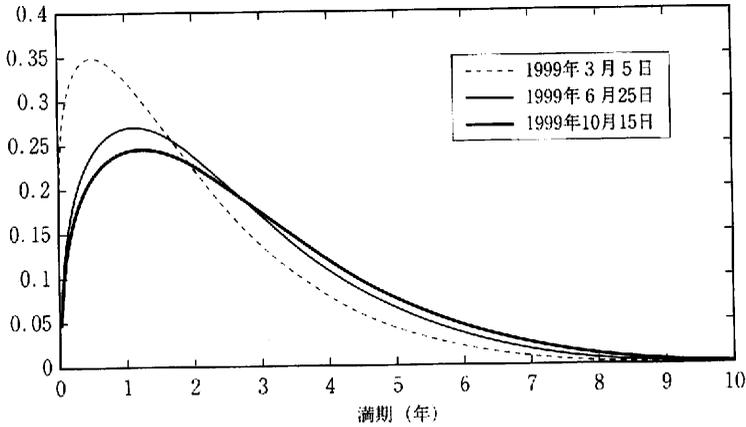
また、週ごとのゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数⁵⁾は、丸茂他[2003]の結果と整合的な変化を示している。第2図は、第1期の2つの期間におけるゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数の推計例を示している。第2図によると、ゼロ金利政策第1期開始当初から期間の中ごろまでは、次第に確率密度関数が全体的に平らになっていき、期間の中ごろから解除前までは、次第に確率密度関数の山が高くなっていくことがわかる。また第3図は、第2期におけるゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数の推計例を示している。第3図によると、ゼロ金利政策の継続期間が長くなるにつれて、次第に確率密度関数が全体的に平らになっていくことがわかる。さらに第2期では、開始当

3) 第1期：1999年2月3週～2000年8月1週

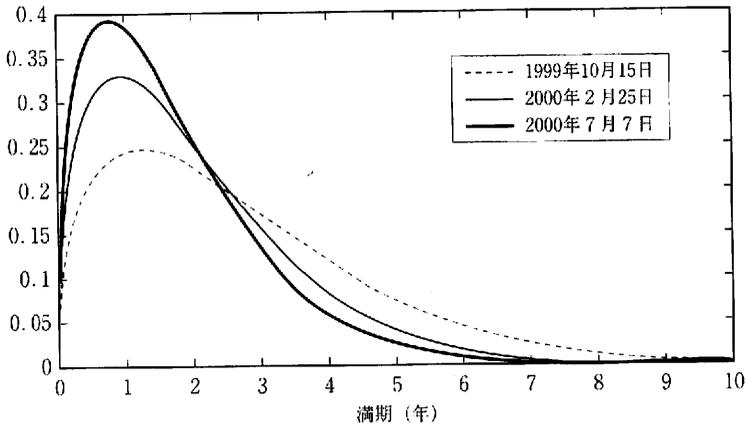
4) 第2期：2001年3月3週～2003年8月5週

5) τ に関するパラメータを基にして導出している。

第2図 第1期におけるゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数の推計例
(1999年3月5日～1999年10月15日)

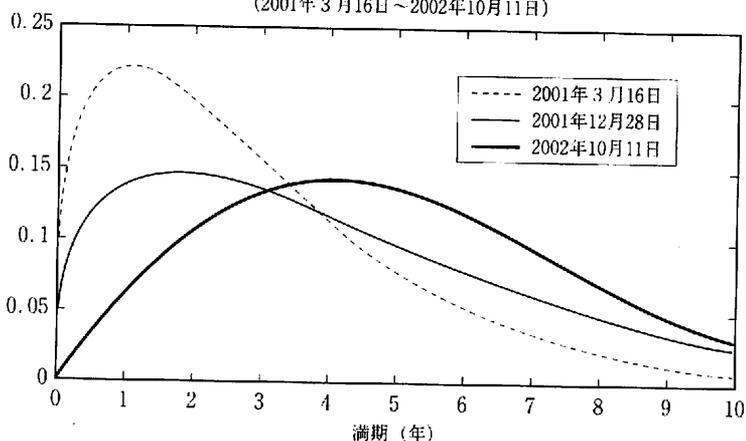


(1999年10月15日～2000年7月7日)



初から第1期に比べて確率密度関数が全体的に平らであることが確認される。その理由としては、株価の水準が第1期を下回っているなど、第1期に比べて第2期開始当初は、より景気の悪化した状態であり、第2期開始当初からゼロ金利政策が長続きすると予想されていたことが考えられる。これら第2図、第3図によって確認される結果より、ゼロ金利政策下のデータのみを用いて全て

第3図 第2期におけるゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数の推計例
(2001年3月16日～2002年10月11日)



のパラメータを同時に推定するという方法で得られた τ のパラメータは、妥当な推定値であることがわかる。

第4図、第5図は、各期におけるCMTの推定期間構造ならびに通常の1ファクターモデルを用いて推定した金利の期間構造⁶⁾を示している。第4図、第5図より、通常の1ファクターモデルは、市場金利に対して著しく当てはまりが悪く、本論文のモデルは、市場金利に対して当てはまりが良いことがわかる。特に、イールドカーブが下に凸になっている短期で違いが顕著である。また、(7)式から得られる週ごとの残差 ε 乗和については、全期間を通じて本論文のモデルのほうが低い水準で推移している。

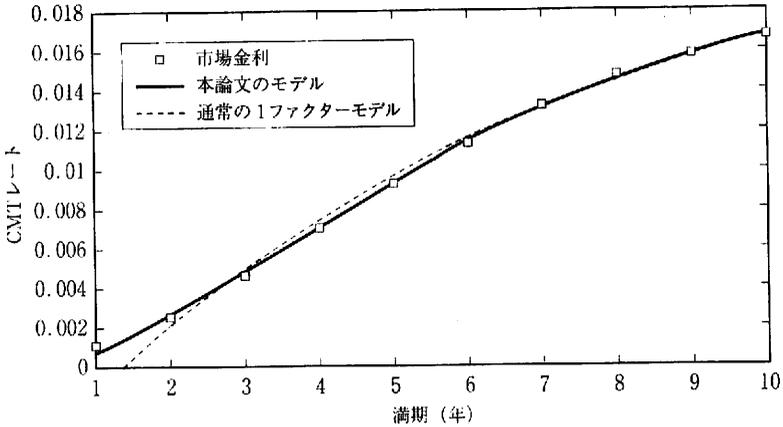
第6図は、現実のイールドに対して全期間で最も当てはまりの悪かった推定期間構造を示している。第6図より、本論文のモデルにおける各満期の金利の推定誤差は、最大で約0.05%と十分小さい水準であることがわかる。

第7図、第8図は、それぞれ第1期、第2期におけるゼロ金利政策継続期間

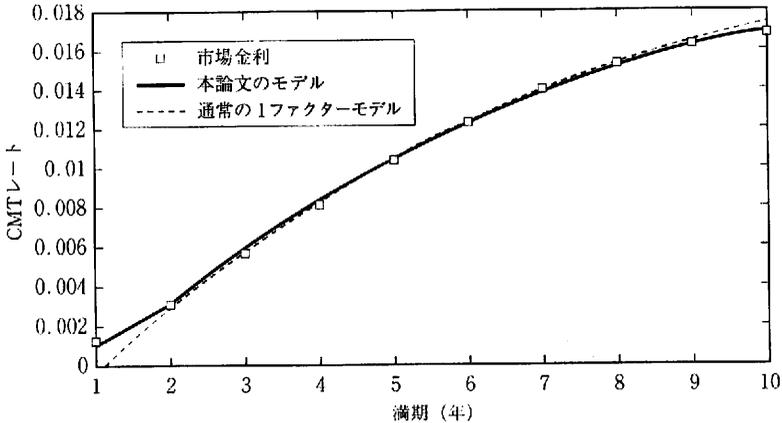
6) (2)式を(6)式に代入することで得られたCMTレートの理論値を用いて、(7)式を週ごとに最小化することでパラメータを導出している。

第4図 第1期における推定期間構造

(1999年7月23日)



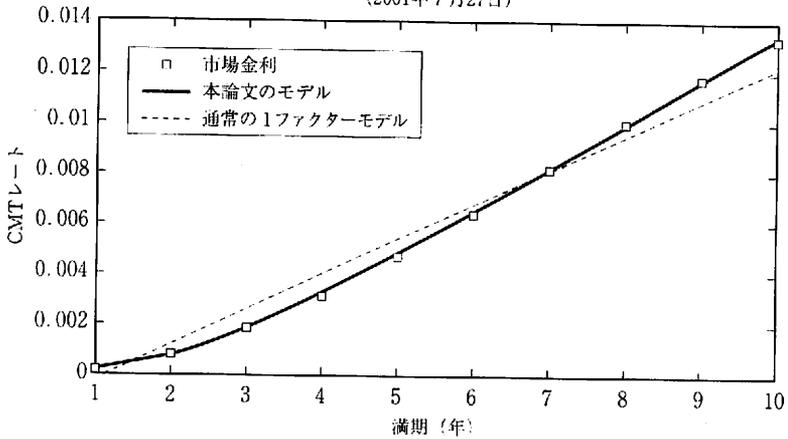
(2000年5月26日)



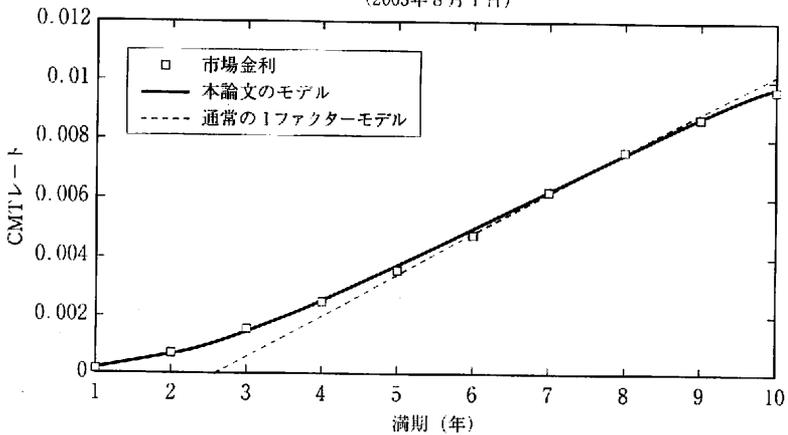
の確率密度関数から得られる最頻値、中央値を示したものである。最も多くの投資家が予想するゼロ金利政策継続期間が最頻値である。また、過半数の投資家が中央値までにはゼロ金利政策が解除されると予想している。市場の動きは、最も多くの参加者がとる行動に他の参加者が追従することで決定される、もしくは過半数の参加者の行動によって決定されることができるので、こ

第5図 第2期における推定期間構造

(2001年7月27日)



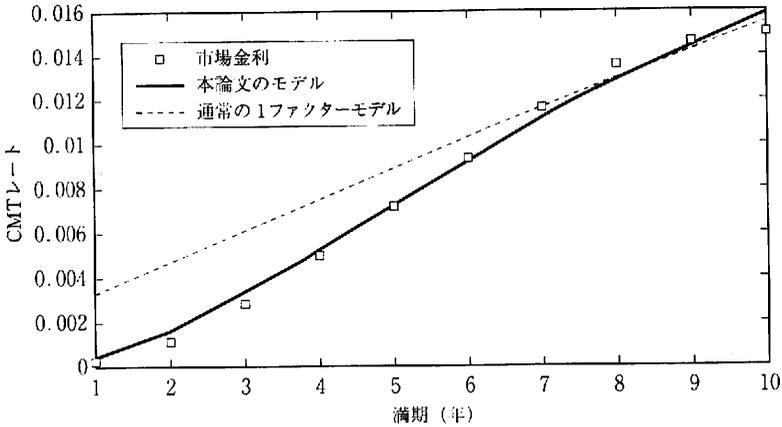
(2003年8月1日)



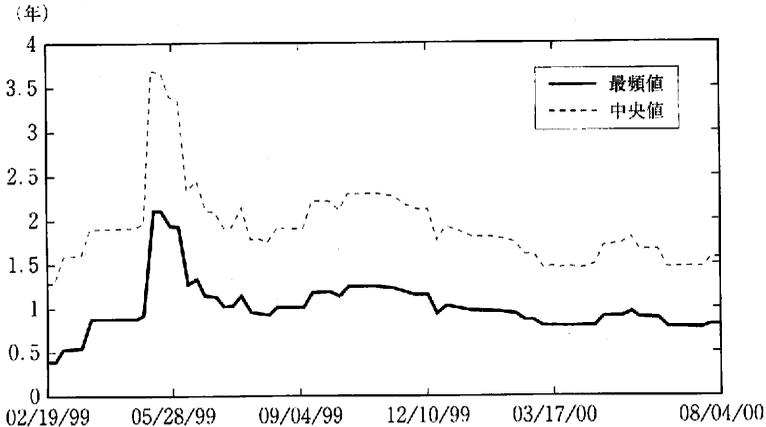
これらの値は、投資家が想定するゼロ金利政策継続期間を表す指標となりうると考えられる。本論文では、丸茂他 [2003] とは異なり、ゼロ金利政策継続期間に関する投資家の総意を表すと考えられる期待値をこの指標として採用していない。その理由の1つとして、市場の動きが投資家の総意によっては決定されないことが挙げられる。また、本論文のモデルの期待値が第1期では非常に小

第6図 推定期間構造の最も当てはまりの悪い例

(2002年2月1日)



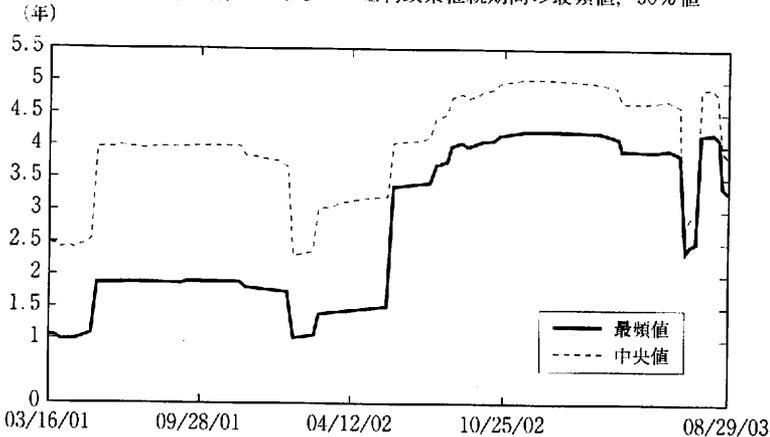
第7図 第1期におけるゼロ金利政策継続期間の最頻値, 50%値



さく、第2期では異常に大きい値を示すことが挙げられる。

第7図、第8図によると、最頻値と中央値とは約1年の差があるが、この2つの水準は妥当な値で推移している。第7図からは、際立った変化ではないが、実際のゼロ金利政策解除時点が近づくにつれて、それぞれの値が小さくなっていくことがわかる。第8図からは、ゼロ金利政策開始とともに、それぞ

第8図 第2期におけるゼロ金利政策継続期間の最頻値, 50%値



れの値が大きくなっていくことが確認される。また第2期における最頻値, 中央値は, ほとんどの期間において第1期に比べて高かったので, 第2期においては, ゼロ金利政策が再開された当初より, 投資家はゼロ金利政策の長期化を予想していたということがわかる。

最後に, 第7図, 第8図におけるそれぞれの値の急激な変化についての考察を行い, 本論文の推定によって得られたゼロ金利政策継続期間の従う確率密度関数の推移が, ある程度妥当であることを示す。第7図によると, 1999年5月中旬において急激な値の上昇があるのは, G7や日米会談などで補正予算に対する具体的な言及がなかったことによって, 市場の景気悲観論が強まり, ゼロ金利政策解除時期に関する予想が長期化したためであると考えられる。また, ゼロ金利政策開始より3ヶ月が経過し, 期間が長めの短期金利にまでゼロ金利政策の効果が浸透してきていたことから考えて, この時期に政策の長期化が本格的に金利に織り込まれ始めたためであるといえる⁷⁾。一方, 1999年6月初旬から中旬にかけて急激に値が下落しているのは, 景気好転を予想できる材料⁸⁾

7) 1999年5月12日には, CD3ヶ月物が過去最低水準の0.05%で発行された。

8) 1999年6月8日に全産業の経常利益が6・4半期(1年6ヶ月)ぶりに経常増益になったこと

が発表されたことで、市場の景気悲観論が一気に弱まり、ゼロ金利政策解除時期に関する予想が短期化したためであると考えられる。第8図によると、2001年5月上旬に急激に値が上昇しているのは、4月27日に財政再建を強く掲げる小泉内閣が発足し、経済へのデフレ圧力が強まるとの見方が広がったことの影響であるといえる。またこの時期に、中期債の応募者利回りがのきなみ最低を記録したことからも、ゼロ金利政策解除予想が長期化していたことがわかる。一方、2002年6月上旬に急激に値が上昇しているのは、6月7日に発表された1～3月期のGDP成長率が市場予想を大幅に下回ったことや、米国株の値動きが不安定なことによる米国景気の先行き不透明感によって、市場の景気悲観論が急激に強まった影響であると考えられる。2002年6月上旬から2003年4月下旬まで株価の下げ基調が止まらなかったことから考えても、2002年6月上旬に市場の景気悲観論が急激に強まったという見方は妥当であるといえる。

一方、最頻値、中央値の急激な変化のうちで、実際に起こった経済事象によっては説明がつかないものも確認された。第8図によると、2002年1月末から2月初めに急激な値の下落がある。しかしこの時期には、債券だけでなく、株価、為替の値も同時に下がっていたことから、日本経済の先行きは厳しいという見方が大勢を占めていたと考えられる。したがって、この時期に市場の景気悲観論が弱まり、ゼロ金利政策解除時期予想が短期化したという第8図の結果は、現実と整合的ではない。この結果が得られた理由としては、2002年1月末から2月初めには、日本経済の先行きに対する厳しい見方から、外国人投資家による「日本売り」の動きが活発化しており、この動きによる急激な金利の上昇をモデルが捉えてしまったことが考えられる。そして3月上旬に、ある程度の値の回復がみられたのは、株価の回復によって「日本売り」の動きが止まったためであるといえる。

、とが発表され、6月10日にGDPの実質伸び率が同じく6・4半期ぶりにプラス成長になったことが発表された。

VI 結 論

本論文の目的の1つは、ゼロ金利政策下において複雑な形状（短中期で下に凸かつ、中長期で上に凸）を示す国債イールドカーブに対して、少ないファクターでも実際のデータとうまく合うモデルを構築することであった。この目的に関しては、丸茂他 [2003] において導入されたゼロ金利政策解除時点 τ という確率変数を用い、丸茂他 [2003] とは異なりハザードレートがワイブル分布に従うと仮定したことで、丸茂他 [2003] のモデルと比べて特に短期において実際のデータとうまく合うモデルを構築することができた。

また、丸茂他 [2003] とは異なり、ゼロ金利政策下におけるデータのみを用いて、瞬時的スポットレートならびにゼロ金利政策解除時点のパラメータを推定することも目的の1つであった。この目的に関しては、全てのパラメータの水準、符号において妥当な結果が得られた。特に、ゼロ金利政策解除時点のパラメータについては、ゼロ金利政策開始より、それぞれの時点において期待されるゼロ金利政策解除時点が遠のき、ゼロ金利政策解除が近づくにつれて、それぞれの時点において期待されるゼロ金利政策解除時点が近づくという現象をうまく捉えることのできるものであった。また、ゼロ金利政策継続期間の従う確率密度関数の推移についても妥当な結果が得られるものであった。

最後に今後の課題として、本論文のモデルを拡張して、クレジットスプレッドの推定を行うこと、ゼロ金利政策下における瞬時的スポットレート、ゼロ金利政策解除時点の観測確率の下でのパラメータを推定することが挙げられる。ただし、過去にゼロ金利政策が解除された事例はわずか1回のみであるので、現時点において観測確率の下でのパラメータを推定することは不可能である。しかし、今後ゼロ金利政策の解除と再開がたびたび行われ、ゼロ金利政策解除の事例がある程度多くなれば、推定が可能になるであろう。また本論文では、モデル化において瞬時的スポットレートのみを用いたが、ゼロ金利政策下におけるフォワードレートに注目し、フォワードレートにすでに織り込まれている

であろうゼロ金利政策解除に関する情報をうまく用いることができれば、観測確率下におけるゼロ金利政策解除時点のパラメータを推定することは可能であると思われる。

参考文献

- 木島正明 [1999] 『期間構造モデルと金利デリバティブ』朝倉書店、93-95ページ。
- 木島正明・小守林克哉 [1999] 『信用リスク評価の数理モデル』朝倉書店、95-99ページ。
- 丸茂幸平・中山貴司・西岡慎一・吉田敏弘 [2003] 『ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデル』ワーキングペーパー、日本銀行金融市場局。
- Duffie, D. and K. Singleton [1997] "An Economic Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Spreads," *The Journal of Finance*, pp. 1287-1321.
- Grinblatt, M. [2002] "An Analytical Solution for Interest Rate Swap Spreads," *Working Paper*, University of California, Los Angeles—Finance Area.
- He, H. [2000] "Modeling Term Structures of Swap Spreads," *Working Paper*, Yale University.
- Liu, J., F. A. Longstaff and R. E. Mandell [2000] "The Market Price of Credit Risk," *Working Paper*, University of California, Los Angeles—Finance Area, University of California, Los Angeles—Finance Area and Salomon Smith Barney, Inc.
- Longstaff, F. and E. Schwartz [1995] "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," *The Journal of Finance*, pp. 789-819.
- Vasicek, O. [1977] "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *The Journal of Financial Economics*, pp. 177-188.