数理解析研究所講究録 1421 巻 2005 年 55-64

WHITTAKER FUNCTIONS FOR P_J-PRINCIPAL SERIES REPRESENTATIONS OF $Sp(3,\mathbf{R})$

MIKI HIRANO (平野　幹)
TAKAYUKI ODA (織田　孝幸)

1. Introduction

このノートでは、$Sp(3,\mathbf{R})$ のヤコビ放物部分群から誘導された一般主系列表現に対する Whittaker 模型について、その第 2 種球関数の明示公式を扱う。ここで、第 2 種球関数とは模型から定まるホロノミック系の確定特異点におけるべき級数解のことであり（*cf.* [2], [3]）、保型形式論においては Poicaré 級数の構成に応用が知られている（[9], [10]）。詳しい計算などについては論文 [5] を参照のこと。

2. Preliminaries

2.1. Groups and algebras. この小節では、このノートで必要となる Lie 群および Lie 環に関する記号を準備する。$M_n(\mathbf{R})$ で n 次の実正方行列の全体をあらわし、1_n および O_n をそれぞれ n 次の単位行列およびゼロ行列とする。さて、G を次で定義される 3 次実シンプレクティック群 $Sp(3,\mathbf{R})$ とする：

$$G = Sp(3,\mathbf{R}) = \left\{g \in M_6(\mathbf{R}) | {}^t g J_3 = J_3 g^{-1}, \det g = 1\right\}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} O_3 & 1_3 \\ -1_3 & O_3 \end{pmatrix}.$$

このとき、$\theta(g) = {}^t g^{-1}, g \in G,$ で定義される G の Cartan 対合 θ に対し、θ の固定点の集合 $K = \{g \in G | \theta(g) = g\}$ は 3 次ユニタリ群 $U(3)$ と同型な G の極大コンパクト部分群となる。

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と書く：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(3,\mathbf{R}) = \left\{X \in M_6(\mathbf{R}) | J_3 X + {}^t X J_3 = 0\right\}.$$

Cartan 対合 θ の微分に対する ± 1 固有空間を $\mathfrak{k}$ および $\mathfrak{p}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \left\{X \in \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \middle| A, B \in M_3(\mathbf{R}), {}^t A = -A, {}^t B = B\right\}, \\ \mathfrak{p} &= \left\{X \in \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \middle| A, B \in M_3(\mathbf{R}), {}^t A = A, {}^t B = B\right\}, \end{aligned}$$

となる。このとき、$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が成立する。ここで、$\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{u}(3)$ は K の Lie 環であるが、$\mathfrak{u}(3)$ と $\mathfrak{k}$ の同型写像 κ を次のように定めておくことにする。

$$\kappa : \mathfrak{u}(3) \ni X \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X + \bar{X} & \sqrt{-1}(\bar{X} - X) \\ \sqrt{-1}(X - \bar{X}) & X + \bar{X} \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}.$$

一般に、Lie 環 $\mathfrak{l}$ の複素化 $\mathfrak{l} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ を $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$ と書くことにする。各 $1 \leq i \leq 3$ に対し $T_i = \kappa(\sqrt{-1}E_{ii})$ とおく。ただし、E_{ij} は $M_3(\mathbf{R})$ における (i,j)-行列単位。このとき、$\mathfrak{h} = \mathbf{R}T_1 \oplus \mathbf{R}T_2 \oplus \mathbf{R}T_3 \subset \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト Cartan 部分環となる。各 $1 \leq i \leq 3$

に対し、$\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ 上の線形形式 β_i を $\beta_i(T_j)=\sqrt{-1}\delta_{ij},\ 1\leq j\leq 3$ によって定義すると、$(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}},\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ のルートの集合は

$$\Delta=\Delta(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}},\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=\{\pm 2\beta_i\ (1\leq i\leq 3),\ \pm\beta_i\pm\beta_j\ (1\leq i<j\leq 3)\}$$

で与えられ、Δ の部分集合 $\Delta^+=\{2\beta_i\ (1\leq i\leq 3),\ \beta_i\pm\beta_j\ (1\leq i<j\leq 3)\}$ は正ルート系をなす。また、

$$\Delta_c^+=\{\beta_i-\beta_j\ (1\leq i<j\leq 3)\},\quad \Delta_n^+=\{2\beta_i\ (1\leq i\leq 3),\ \beta_i+\beta_j\ (1\leq i<j\leq 3)\}$$

で与えられる集合 Δ_c^+ および Δ_n^+ はそれぞれコンパクトおよび非コンパクト正ルートの集合であり、$\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ および $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の分解

$$\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}\oplus\left(\oplus_{\beta\in\Delta_c^+}\mathfrak{g}_{\pm\beta}\right),\quad \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{p}_-,\quad \mathfrak{p}_\pm=\oplus_{\beta\in\Delta_n^+}\mathfrak{g}_{\pm\beta}$$

が成立する。ここに、各ルート $\beta\in\Delta$ に対して $\mathfrak{g}_\beta$ は対応するルート空間を意味する。さて、$\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ および $\mathfrak{p}_\pm$ の基底を以下のようにとる。$\mathfrak{u}(3)$ から $\mathfrak{k}$ への同型写像 κ の複素化への延長を再び κ とかく。このとき、各 $1\leq i\leq 3$ に対して $\kappa(E_{ii})\in\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$、$i\neq j$ に対して $\kappa(E_{ij})\in\mathfrak{g}_{\beta_i-\beta_j}$ となり、集合 $\{\kappa(E_{ij})|1\leq i,j\leq 3\}$ は $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ の基底をなす。一方、

$$p_\pm:\{X\in M_3(\mathbf{C})|X={}^tX\}\ni X\mapsto\begin{pmatrix} X & \pm\sqrt{-1}X\\ \pm\sqrt{-1}X & -X\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_\pm$$

で定義される写像 $p_\pm$ と $1\leq i,j\leq 3$ に対して

$$X_{\pm ij}=p_\pm\left(\frac{E_{ij}+E_{ji}}{2}\right),\ 1\leq i\leq j\leq 3$$

とおく。このとき、$X_{\pm ij}\in\mathfrak{g}_{\pm(\beta_i+\beta_j)}$ であり、集合 $\{X_{\pm ij}|1\leq i\leq j\leq 3\}$ は $\mathfrak{p}_\pm$ の基底をなす。

$H_1=\mathrm{diag}\,(1,0,0,-1,0,0)$, $H_2=\mathrm{diag}\,(0,1,0,0,-1,0)$, $H_3=\mathrm{diag}\,(0,0,1,0,0,-1)$ に対し、$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathbf{R}H_1\oplus\mathbf{R}H_2\oplus\mathbf{R}H_3$ とおくと、$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環となる。このとき、各 $1\leq i\leq 3$ に対し $e_i(H_j)=\delta_{ij},\ 1\leq j\leq 3$ によって $e_i\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ を定義すると、集合

$$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\mathfrak{g})=\{\pm 2e_i\ (1\leq i\leq 3),\ \pm e_i\pm e_j\ (1\leq i<j\leq 3)\}$$

は $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\mathfrak{g})$ の制限ルート系を与え、Σ の部分集合 $\Sigma^+=\{2e_i\ (1\leq i\leq 3),\ e_i\pm e_j\ (1\leq i<j\leq 3)\}$ は正ルート系をなす。さらに、各 $\alpha\in\Sigma$ に対する制限ルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とかき、次のように制限ルートベクトル $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ を選んでおく：

$$E_{2e_i}=\left(\begin{array}{c|c} O_3 & E_{ii}\\ \hline O_3 & O_3\end{array}\right),\ 1\leq i\leq 3,$$

$$E_{e_i+e_j}=\left(\begin{array}{c|c} O_3 & E_{ij}+E_{ji}\\ \hline O_3 & O_3\end{array}\right),\ E_{e_i-e_j}=\left(\begin{array}{c|c} E_{ij} & O_3\\ \hline O_3 & -E_{ji}\end{array}\right),\ 1\leq i<j\leq 3,$$

とし、$E_{-\alpha}=\theta E_\alpha,\ \alpha\in\Sigma^+$ とおく。$\mathfrak{n}_\mathfrak{p}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$ とおけば、$\mathfrak{g}$ の岩澤分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}$ が成り立ち、また、$A=\exp\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $N=\exp\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$ に対して G の岩澤分解 $G=NAK$ が成り立つ。

次に、$\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{m}_J,\mathfrak{a}_J,\mathfrak{n}_J$ を、

$$\mathfrak{m}_J=\mathbf{R}H_3\oplus\mathfrak{g}_{2e_3}\oplus\mathfrak{g}_{-2e_3}\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}),\ \ \mathfrak{a}_J=\mathbf{R}H_1\oplus\mathbf{R}H_2,\ \ \mathfrak{n}_J=\oplus_{\alpha\in\Sigma^+\setminus\{2e_3\}}\mathfrak{g}_\alpha,$$

で定義し、G の部分群 M_J, A_J, N_J を、

$$
\begin{aligned}
M_J &= Z_K(\mathfrak{a}_{J_2}) \exp \mathfrak{m}_{J_2} \\
&= \{1_6, \mu_1\} \times \{1_6, \mu_2\} \times \exp \mathfrak{m}_{J_2} \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \epsilon_1 & & & & & \\ & \epsilon_2 & & & & \\ & & a & & & b \\ \hline & & & \epsilon_1 & & \\ & & & & \epsilon_2 & \\ & & c & & & d \end{array} \right) \middle| \epsilon_i \in \{\pm 1\}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}) \right\},
\end{aligned}
$$

および

$$A_J = \exp \mathfrak{a}_J, \ N_J = \exp \mathfrak{n}_J,$$

で定義する。ここに、$Z_K(\mathfrak{a}_J)$ は K における $\mathfrak{a}_J$ の中心化群で、$\mu_i = \exp \pi T_i$ とおいた。このとき、$P_J = M_J A_J N_J$ は単純ルート $2e_3$ に対応する G の放物部分群、$\mathfrak{p}_J = \mathfrak{m}_J \oplus \mathfrak{a}_J \oplus \mathfrak{n}_J$ は P_J の Lie 環となり、右辺はその Langlands 分解を与えている。このノートでは、P_J を G の Jacobi 放物部分群と呼ぶことにする。

2.2. Representations. 次に、上で定義した群 K, G, および N の表現について扱う。

最高ウェイトの理論によれば、G の極大コンパクト群 $K \simeq U(3)$ の既約表現の同値類は最高ウェイトの集合 $\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) | \lambda_i \in \mathbf{Z}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ によってパラメーターづけされる。このパラメーター $\lambda \in \Lambda$ に対応する K の表現を $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ と書くことにすると、τ_λ の表現空間 V_λ は最高ウェイト λ に対する G-パターンの集合 $G(\lambda)$ によってパラメーターづけされる Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}_{M \in G(\lambda)}$ を持つ。ここに、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda$ に対する G-パターン $M \in G(\lambda)$ とは、条件 $\lambda_1 \geq \alpha_1 \geq \lambda_2 \geq \alpha_2 \geq \lambda_3$ および $\alpha_1 \geq \beta \geq \alpha_2$ をみたす 6 つの整数よりなる三角列

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \\ \alpha_1 \ \alpha_2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

のことである。Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}$ の定義、および $\{f(M)\}$ 上の $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ の明示的作用については、論文 [1] および [4] を参照せよ。$\lambda = (m, m, m)$ であるとき、対応する表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ は 1 次元表現で、任意の $v \in V_\lambda$ に対して

$$\tau_\lambda(\kappa(E_{ii}))v = mv, \ (1 \leq i \leq 3), \quad \tau_\lambda(\kappa(E_{ij}))v = 0, \ (i \neq j),$$

によって $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ は作用する。また、$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ は K の随伴表現によって K-加群となるが、分解 $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ はその既約分解を与え、同型 $\mathfrak{p}_+ \simeq V_{(2,0,0)}$ および $\mathfrak{p}_- \simeq V_{(0,0,-2)}$ が成り立つ。

$\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, D)$ を、ε_i が $\{1_6, \mu_i\}$ 上の指標、$D = \mathcal{D}_k^{\pm}$ が Blattner パラメーター $\pm k$ を持つ $\exp \mathfrak{m}_J \simeq SL(2, \mathbf{R})$ の離散系列表現であるような $M_J = \{1_6, \mu_1\} \times \{1_6, \mu_2\} \times \exp \mathfrak{m}_J$ の表現とする。さらに、ν を A_J 上の疑指標とする。このとき、Jacobi 放物部分群 $P_J = M_J A_J N_J$ から誘導された G の一般主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma \otimes \nu \otimes 1_{N_J})$ を、このノートでは G の P_J-主系列表現と言う。次に述べる P_J-主系列表現の K-type に対する重複度公式は、誘導表現に対する Frobenius 相互律によって示すことが出来る。

Proposition 2.1. $\mathrm{sgn}\,(D)$ を $D = \mathcal{D}_k^+$ のとき 1、$D = \mathcal{D}_k^-$ のとき -1 で定義する。このとき、パラメーター $\lambda \in \Lambda$ に対応する既約 K-加群 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ の、P_J-主系列表現

$\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma\otimes\nu\otimes 1_{N_J})$ の K への制限における重複度 m_λ は次で与えられる：

$$m_\lambda = \#\left\{ M\in G(\lambda) \,\middle|\, \begin{array}{c} \varepsilon_i(\mu_i)=(-1)^{w_i},\ i=1,2 \\ k\equiv w_3\,(\mathrm{mod}\,2),\ k\le \mathrm{sgn}\,(D)w_3 \end{array} \right\}.$$

ここに、$w=(w_1,w_2,w_3)$ は

$$w_1=\beta,\ w_2=\alpha_1+\alpha_2-\beta,\ w_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\alpha_1-\alpha_2$$

で定義される $M\in G(\lambda)$ のウェイトである。

上の命題によれば、$\sigma=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\mathcal{D}_k^+)$ が条件 $\varepsilon_1(\mu_1)=\varepsilon_2(\mu_2)=(-1)^k$ をみたすとき、K-type $\tau_{(k,k,k)}$ は既約 P_J-主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma\otimes\nu\otimes 1_{N_J})$ において重複度 1 であり、また $\tau_{(k-2,k-2,k-2)}$ は K-type として現れないことがわかる。この場合、$\tau_{(k,k,k)}$ を既約 P_J-主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma\otimes\nu\otimes 1_{N_J})$ のコーナー K-type と呼ぶ。

η を N のユニタリ指標とし、η の微分も同じ記号で表すとする。今、

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}=\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}/[\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}},\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}]\simeq \mathfrak{g}_{e_1-e_2}\oplus\mathfrak{g}_{e_2-e_3}\oplus\mathfrak{g}_{2e_3}$$

であることから、η は

$$\eta(E_{e_1-e_2})=2\pi\sqrt{-1}c_{12},\ \eta(E_{e_2-e_3})=2\pi\sqrt{-1}c_{23},\ \eta(E_{2e_3})=2\pi\sqrt{-1}c_3$$

なる 3 つの実数 $c_{12},c_{23},c_3\in\mathbf{R}$ によって定められることがわかる。特に、$c_{12}c_{23}c_3\neq 0$ なる実数 c_{12},c_{23},c_3 によって定められる N の指標 η を非退化指標と呼ぶ。

3. Whittaker functions

K の有限次元表現 (τ,V_τ) と N の非退化指標 η に対し、$C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ で条件

$$\varphi(ngk)=\eta(n)\tau(k)^{-1}\varphi(g),\quad (n,g,k)\in N\times G\times K.$$

をみたす滑らかな関数 $\varphi: G\to V_\tau$ のなす空間をあらわす。このとき G の岩澤分解 $G=NAK$ により、関数 $f\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ はその A への制限 $f|_A$ によって定まることがわかる。また、表現空間

$$C_\eta^\infty(N\backslash G)=\{\varphi\in C^\infty(G)\,|\,\varphi(ng)=\eta(n)\varphi(g),(n,g)\in N\times G\},$$

上の右移動により与えられる η から誘導された G の C^∞-誘導表現を $C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$ とする。このとき、(τ^*,V_{τ^*}) で (τ,V_τ) の反傾表現、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ で $V_{\tau^*}\times V_\tau$ 上の標準的双線型形式をあらわすと、$\mathrm{Hom}_K(\tau^*,C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta))$ と $C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ は関係 $\iota(v^*)(g)=\langle v^*,F^{[\iota]}(g)\rangle$, $v^*\in V_{\tau^*}$, $g\in G$ により定まる $\iota\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta))$ と $F^{[\iota]}\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ の対応により同型となる。

さて、G の既約許容表現 (π,H_π) とその K-type(τ^*,V_{τ^*}) をとり、さらに τ^* の π への埋め込み $i\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,\pi)$ をひとつ固定する。このとき、π および $C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$ における K-有限ベクトルたちのなす $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群の間の絡空間

$$\mathcal{I}_{\eta,\pi}=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(\pi,C^\infty\mathrm{Ind}_N^G(\eta))$$

の各元 T に対し $T_i\in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ が関係 $T(i(v^*))(g)=\langle v^*,T_i(g)\rangle$, $v^*\in V_{\tau^*}$, $g\in G$ により定まる。そこで、

$$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)=\bigcup_{i\in\mathrm{Hom}_K(\tau^*,\pi)}\{T_i\,|\,T\in\mathcal{I}_{\eta,\pi}\}$$

によって定義される $C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)$ の部分空間 $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ を、(π,η,τ) に対する Whittaker 関数の空間と呼ぶことにする。

4. Differential Equations

$\varepsilon_i(\mu_i)=(-1)^k$ をみたす M_J の表現 $\sigma=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\mathcal{D}_k^+)$、および $(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{C}^2$ に対して $\nu(\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,1,a_1^{-1},a_2^{-1},1))=a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}$ で定義される A_J 上の疑指標 ν に対して、G の P_J-主系列表現 $\pi=\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma\otimes\nu\otimes 1_{N_J})$ を考える。また、π は既約であると仮定する。このとき、$\tau=\tau_{(-k,-k,-k)}$ とすると π のコーナー K-type は τ の反傾表現 $\tau^*=\tau_{(k,k,k)}$ で与えられる。さらに、η を $c_{12},c_{23},c_3\in\mathbf{R}$ により定まる N の非退化指標とする。この節および次節では、上の表現の組 (π,η,τ) に対する Whittaker 関数の空間 $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ について議論する。

Definition 4.1. 各 $1\le i\le 3$ に対し、$\pm$-カイラル行列 $m_i(C_\pm)$ を

$$m_1(C_\pm)=\begin{bmatrix} X_{\pm11} & X_{\pm12} & X_{\pm13}\\ X_{\pm12} & X_{\pm22} & X_{\pm23}\\ X_{\pm13} & X_{\pm23} & X_{\pm33}\end{bmatrix},\quad m_2(C_\pm)=\begin{bmatrix} M_{\pm11} & -M_{\pm12} & M_{\pm13}\\ -M_{\pm12} & M_{\pm22} & -M_{\pm23}\\ M_{\pm13} & -M_{\pm23} & M_{\pm33}\end{bmatrix},$$

および $m_3(C_\pm)=\det(m_1(C_\pm))$ で定義し、$C_{2i}=\mathrm{Tr}\,(m_i(C_+)m_i(C_-))$ とおく。ここに、各 $1\le i\le j\le 3$ に対し、$M_{\pm ij}$ は行列 $m_1(C_\pm)$ の (i,j)-小行列式とする、すなわち

$$M_{\pm11}=\begin{vmatrix} X_{\pm22} & X_{\pm23}\\ X_{\pm23} & X_{\pm33}\end{vmatrix},M_{\pm22}=\begin{vmatrix} X_{\pm11} & X_{\pm13}\\ X_{\pm13} & X_{\pm33}\end{vmatrix},M_{\pm33}=\begin{vmatrix} X_{\pm11} & X_{\pm12}\\ X_{\pm12} & X_{\pm22}\end{vmatrix},$$

$$M_{\pm12}=\begin{vmatrix} X_{\pm12} & X_{\pm23}\\ X_{\pm13} & X_{\pm33}\end{vmatrix},M_{\pm13}=\begin{vmatrix} X_{\pm12} & X_{\pm22}\\ X_{\pm13} & X_{\pm23}\end{vmatrix},M_{\pm23}=\begin{vmatrix} X_{\pm11} & X_{\pm12}\\ X_{\pm13} & X_{\pm23}\end{vmatrix}.$$

このとき、容易に確かめられるように、

$$C_{2i}\in U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K=\{X\in U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})|\mathrm{Ad}\,(k)X=X,k\in K\}$$

が成り立つ。

Remark 4.2. n 次実シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbf{R})$ においても、各 $1\le i\le n$ に対して $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K$ の元 C_{2i} を同様に定義することが出来る。特に、C_{2n} は本質的に所謂 Maass シフト作用素である。(*cf.* [7])

さて、上で定義した $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K$ の元 C_{2i} の $C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)$ 上の明示的な作用について考える。次の補題は、岩澤分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}$ に従った順序による書き換えによってこの作用の明示公式が得られることを示している。

Lemma 4.3. $f\in C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)$ とする。このとき、$X\in U(\mathfrak{k}_\mathbf{C})$, $Y\in U(\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}\mathbf{C}})$, $Z\in U(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\mathbf{C}})$ および $a\in A$ に対し、$(\mathrm{Ad}\,(a^{-1})Y)ZXf(a)=\eta(Y)\tau(-X)(Zf)(a)$ が成り立つ。特に、$a=\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,a_3,a_1^{-1},a_2^{-1},a_3^{-1})\in A$ に対して、$H_if(a)=a_i\frac{\partial}{\partial a_i}f(a)$ であり、また

$$E_{e_1-e_2}f(a)=2\pi\sqrt{-1}c_{12}\tfrac{a_1}{a_2}f(a),\quad E_{e_2-e_3}f(a)=2\pi\sqrt{-1}c_{23}\tfrac{a_2}{a_3}f(a),$$
$$E_{2e_3}f(a)=2\pi\sqrt{-1}c_3a_3^2f(a),$$

および $E_\alpha f(a)=0$, $\forall\alpha\in\Sigma^+\backslash\{e_1-e_2,e_2-e_3,2e_3\}$, が成り立つ。

さて、$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ の各元の A-動径成分、すなわちその A への制限がみたすホロノミック系を明示的に記述する。以下では、$A=\{\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,a_3,a_1^{-1},a_2^{-1},a_3^{-1})\mid a_i>0\}$ の座標として、

$$x_1=\left(\pi c_{12}\frac{a_1}{a_2}\right)^2,\ \ x_2=\left(\pi c_{23}\frac{a_2}{a_3}\right)^2,\ \ x_3=4\pi c_3 a_3^2,$$

で定まる座標 $x=(x_1,x_2,x_3)$ を用いることにする。

Theorem 4.4. Whittaker 関数 $f\in \mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ の A-動径成分 $f|_A$ のなす空間を $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)|_A$ とかく。このとき、$\varphi\in \mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)|_A$ は次のホロノミック系をみたす：

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_2\varphi(x)=\frac{1}{4}\chi_{2,k,\nu},\\ \mathcal{D}_3\varphi(x)=0,\\ \mathcal{D}_4\varphi(x)=\frac{1}{16}\chi_{4,k,\nu}.\end{array}\right.$$

ここに、変数 x_i に関する Euler 作用素を $\partial_i=x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ とかくとき、$\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ は以下で定義されるそれぞれ 2, 3, 4 階の微分作用素である：

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2 \ =\ & \left(\partial_1+\frac{k}{2}-3\right)\left(\partial_1-\frac{k}{2}\right)+\left(-\partial_1+\partial_2+\frac{k}{2}-2\right)\left(-\partial_1+\partial_2-\frac{k}{2}\right)\\
& +\left(-\partial_2+\partial_3-\frac{x_3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)\\
& -2x_1-2x_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3 \ =\ & \left(\partial_1-\frac{k}{2}-1\right)\left\{\left(-\partial_1+\partial_2-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)+x_2\right\}\\
& +x_1\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_4 \ =\ & \left\{\left(-\partial_1+\partial_2+\frac{k}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(-\partial_2+\partial_3-\frac{x_3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)+x_2\right\}\\
& \quad\cdot\left\{\left(-\partial_1+\partial_2-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)+x_2\right\}\\
& +\left(\partial_1+\frac{k}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(-\partial_2+\partial_3-\frac{x_3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)\\
& \quad\cdot\left(\partial_1-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)\\
& +\left\{\left(\partial_1+\frac{k}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(-\partial_1+\partial_2+\frac{k}{2}-2\right)+x_1\right\}\\
& \quad\cdot\left\{\left(\partial_1-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\partial_1+\partial_2-\frac{k}{2}\right)+x_1\right\}\\
& -2x_1\left(-\partial_2+\partial_3-\frac{x_3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$+2x_1x_2 - 2x_2\left(\partial_1 + \frac{k}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(\partial_1 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

また、固有値は以下で与えられる：

$\chi_{2,k,\nu} = \{\nu_1^2 - (k-3)^2\} + \{\nu_2^2 - (k-2)^2\}$, $\chi_{4,k,\nu} = \{\nu_1^2 - (k-2)^2\}\{\nu_2^2 - (k-2)^2\}$.

Proof. $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^K$ の元 C_2 および C_4 の $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ 上の作用は明らかにスカラー作用であり、その固有値は、それぞれ $\chi_{2,k,\nu}$ および $\chi_{4,k,\nu}$ で与えられる。また、これらの $C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)|_A$ 上の明示的な作用については Lemma 4.3 により（多少の計算の後）得られる。これより、2 階および 4 階の微分方程式を得る。

作用素 C_6 も同様にスカラー作用であるが、これについてはより詳細に見る。定義より、作用素 $m_3(C_-)$ は π の Harish-Chandra 加群において K-type $\tau^* = \tau_{(k,k,k)}$ を $\tau_{(k-2,k-2,k-2)}$ に写像する。しかしながら、$\tau_{(k,k,k)}$ は π のコーナー K-type であるから、$\tau_{(k-2,k-2,k-2)}$ は π の K-type に現れないので、$\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ の各元は $m_3(C_-)$ の作用によって消えることがわかる。このことより、3 階の微分方程式を得る。(Q.E.D)

ここで得られたホロノミック系の解については次節で議論する。

この定理の系として、Whittaker 関数の空間の次元について言及しておくことにする。上の定理と Kostant ([6] Theorem 6.8.1) および松本 ([8] Corollary 2.2.2, Theorem 6.2.1) の結果を組み合わせることにより、次の主張が得られる。

Corollary 4.5. 絡空間 $\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ および Whittaker 関数の空間 $\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)$ の次元は次で与えられる：

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{I}_{\eta,\pi} = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau) = \frac{1}{2}|W| = 24.$$

ここに、$W = W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \simeq \{\pm 1\}^3 \times \mathfrak{S}_3$ は $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ に関する（小さい）Weyl 群である。特に、π の Harish-Chandra 加群の Bernstein 次数は 24 である。

5. Secondary Whittaker functions

前節で得たホロノミック系 (1) は点 $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ において正規交叉する 3 つの divisor $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ に沿った確定特異性を持つ。この節では、点 $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ のまわりにおける系 (1) のべき級数解を第 2 種 Whittaker 関数と呼び (*cf.* [3])、これを決定する。

まず最初に、第 2 種 Whittaker 関数に対する 24 個の特性根を与える。系 (1) の点 $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ における各特性根 $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ に対して $\delta = (\delta_1,\delta_2,\delta_3) = (\gamma_1, -\gamma_1+\gamma_2, -\gamma_2+\gamma_3)$ とおくと、δ は以下で与えられる：

$$\delta = \sigma\left(\frac{\epsilon_1\nu_1}{2}, \frac{\epsilon_2\nu_2}{2}, \frac{k-1}{2}\right),\ \epsilon_1,\epsilon_2 \in \{\pm 1\},\ \sigma \in \mathfrak{S}_3 \tag{2}$$

ここに、$\mathfrak{S}_3$ は 3 次対称群である。

さて、このノートの主結果である第 2 種 Whittaker 関数の明示公式は次の定理で与えられる。

Theorem 5.1. ホロノミック系 *(1)* の各特性根 $\gamma \in \mathbf{C}^3$ に対して、

$$M_\gamma(x) = x_1^{\frac{3}{2}+\gamma_1} x_2^{\frac{5}{2}+\gamma_2} x_3^{3+\gamma_3} \exp\left(-\frac{x_3}{2}\right) \sum_{l,m,n\geq 0} C^\gamma_{l,m,n} x_1^l x_2^m x_3^n,$$

とおく。ここで、$M_\gamma(x)$ のべき級数部分における係数 $\{C^\gamma_{l,m,n}\}$ は次で定義される：$l,m,n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$、および定数 a,b,c,a',b',c' に対し、

$$\begin{aligned}k_{l,m,n} &= k_{l,m,n}(a,b,c,a',b',c')\\ &= \frac{1}{n!}\cdot\frac{(m+a)_n(-l+b)_n}{(c)_n}{}_4F_3\left(\begin{array}{c}-n,\,1-n-c,\,-m+a',\,l+b'\\ 1-n-m-a,\,1-n+l-b,\,c'\end{array}\middle|\,1\right).\end{aligned}$$

とおく。ここに、$(a)_n$ は Pochhammer 記号、${}_pF_q$ は一般超幾何関数をあらわす (*cf.* [11])。γ に対応する $\delta=(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ について $\delta_3\neq\frac{k-1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned}C^\gamma_{l,m,n} &= \frac{1}{m!}\Gamma\left[\begin{array}{c}l+m-n+\alpha_2,\,\alpha_1,\,\alpha_3,\,\alpha_4,\,\alpha_5,\,\alpha_6\\ m-n+\alpha_1,\,l+\alpha_2,\,m+\alpha_3,\,n+\alpha_4,\,l+\alpha_5,\,l+\alpha_6\end{array}\right]\\ &\qquad\times k_{l,m,n}(\alpha_4,-\alpha_2+1,-\alpha_3+\alpha_4+1,0,\alpha_2+\alpha_4-1,\alpha_3+\alpha_4-1)\end{aligned}$$

と定義する。ここに、パラメータ $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ は

$$\begin{array}{lll}\alpha_1=-\delta_3+\frac{k+1}{2}, & \alpha_2=\delta_1-\delta_3+1, & \alpha_3=\delta_*-\delta_3+1,\\ \alpha_4=\delta_*+\delta_3+1, & \alpha_5=\delta_1-\frac{k-3}{2}, & \alpha_6=-\delta_2+\frac{k+1}{2}\end{array}$$

および $\delta_*=\delta_1+\delta_2-\frac{k-1}{2}$ で与えられる。$\delta_3=\frac{k-1}{2}$ のときは、$m\geq n$ に対して

$$\begin{aligned}C^\gamma_{l,m,n} &= \frac{1}{(m-n)!l!}\Gamma\left[\begin{array}{c}l+m-n+\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3,\,\beta_1,\,\beta_4\\ l+\beta_1,\,l+\beta_2,\,n+\beta_3,\,m+\beta_1,\,m+\beta_4\end{array}\right]\\ &\qquad\times k_{m,l,n}(\beta_3,\,-\beta_1+1,\,-\beta_2+\beta_3+1,\,0,\,\beta_1+\beta_3-1,\,\beta_2+\beta_3-1),\end{aligned}$$

$m<n$ に対して $C^\gamma_{l,m,n}=0$ と定義する。ここに、パラメータ $\beta_1,\cdots,\beta_4$ は

$$\beta_1=\delta_1-\tfrac{k-3}{2},\ \beta_2=\delta_1-\delta_2+1,\ \beta_3=\delta_1+\delta_2+1,\ \beta_4=\delta_2-\tfrac{k-3}{2}$$

で与えられる。このとき、集合 $\{M_\gamma(x)\}$ はホロノミック系 (1) の点 $x=(0,0,0)$ における基本解系を与える。

Proof. この定理を得るためには、まずホロノミック系 (1) をその形式的べき級数解の係数に対する差分方程式系に書き換える。このようにして得られた差分方程式系は (1) と同値であるが、この差分方程式系は適当な Γ-因子を出すことにより、次の Key Lemma に帰着することが出来る。(Q.E.D.)

Lemma 5.2. 定数 a,b,c,a',b',c' は条件 $c,c'\notin\mathbf{Z}_{\leq 0}, a,b\notin\mathbf{Z}$ をみたすとする。このとき、$\{k_{l,m,n}\}$ は次の 2 つの差分方程式をみたす。

$$\begin{aligned}f_1(l,m,n)k_{l,m,n}&=f_2(l,m,n)k_{l,m,n-1}+2(m-a')(m+a-c)k_{l,m-1,n},\\ g(l,m,n)k_{l,m,n}&=(m-a')(m+a-c)k_{l,m-1,n}-(l-b)(l+b'-c')k_{l-1,m,n}.\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}f_1(l,m) &= n^2+(-2m+2a'+c-1)n+2(m-a')(m+a-c),\\ f_2(l,m,n) &= n^2-(m+l-2a'-a-b+2)n-(a+a'-1)(m+l-a'-b+1),\\ g(l,m,n) &= (l-m-a-b+c)n-(l+m-a'-b)(l-m-a-b+c),\end{aligned}$$

であり、$l,\,m,\,n$ のいずれかが負であるときは $k_{l,m,n}=0$ であると約束する。

6. Appendix

ここでは、Gの極小放物部分群から誘導された主系列表現に対するWhittaker関数について、それらがみたすホロノミック系を与えることにする。

Kにおける$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$の中心化群$Z_K(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$を$M_0$とかくと、

$$M_0 = \{1_6, \mu_1\} \times \{1_6, \mu_2\} \times \{1_6, \mu_3\}$$

である。また、このとき$P_0 = M_0AN$はGの極小放物部分群で、右辺はそのLanglands分解を与える。$\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$を$\varepsilon_i$が$\{1_6, \mu_i\}$上の指標であるような$M_0$の表現、$\nu$を$A$上の疑指標とする。このとき、極小放物部分群$P_0$から誘導された$G$の主系列表現$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma \otimes \nu \otimes 1_N)$について、その$K$-typeの重複度は次で与えられる。

Proposition 6.1. パラメーター$\lambda \in \Lambda$に対応する既約K-加群$(\tau_\lambda, V_\lambda)$の、主系列表現$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma \otimes \nu \otimes 1_N)$の$K$への制限における重複度$m_\lambda$は次で与えられる：

$$m_\lambda = \#\{M \in G(\lambda) \mid \varepsilon_i(\mu_i) = (-1)^{w_i},\ 1 \le i \le 3\}.$$

ここに、$w = (w_1, w_2, w_3)$は$M \in G(\lambda)$のウェイトである。

この命題より、Gの主系列表現$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma \otimes \nu \otimes 1_N)$が1次元表現$\tau_{(k,k,k)}$を$K$-typeに持つ必要十分条件は

$$\varepsilon_1(\mu_1) = \varepsilon_2(\mu_2) = \varepsilon_3(\mu_3) = (-1)^k$$

であることがわかる。

以下、$1 \le i \le 3$に対して$\varepsilon_i(\mu_i) = (-1)^k$をみたす$M_0$の表現$\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$、および$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}^3$に対して$\nu(\mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3, a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1})) = a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} a_3^{\nu_3}$で定義される$A$上の疑指標$\nu$に対する$G$の主系列表現を$\pi = \mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma \otimes \nu \otimes 1_N)$とおく。このとき、$\pi$は$\tau = \tau_{(-k,-k,-k)}$およびその反傾表現$\tau^* = \tau_{(k,k,k)}$を$K$-typeに持つ。また、$\eta$を$c_{12}, c_{23}, c_3 \in \mathbf{R}$により定まる$N$の非退化指標とする。このとき、上の表現の組$(\pi, \eta, \tau)$に対して、$\mathrm{Wh}(\pi, \eta, \tau)$の各元の$A$-動径成分がみたすホロノミック系を$P_J$-主系列表現の場合と同様にして明示的に記述することができる。

Theorem 6.2. $\varphi \in \mathrm{Wh}(\pi, \eta, \tau)|_A$は次のホロノミック系をみたす：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_2\varphi(x) = \frac{1}{4}\tilde{\chi}_{2,k,\nu}, \\ \mathcal{D}_4\varphi(x) = \frac{1}{16}\tilde{\chi}_{4,k,\nu}, \\ \mathcal{D}_6\varphi(x) = \frac{1}{64}\tilde{\chi}_{6,k,\nu}. \end{cases} \tag{3}$$

ここに、$\mathcal{D}_2$および$\mathcal{D}_4$は*Theorem 4.4*で定義されたそれぞれ2, 4階の微分作用素、$\mathcal{D}_6$は以下で定義される6階の微分作用素である：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_6 \ = \ & \Bigg[\left(\partial_1 + \frac{k}{2} - 2\right) \left\{ \left(-\partial_1 + \partial_2 + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(-\partial_2 + \partial_3 - \frac{x_3}{2} + \frac{k}{2} - 1\right) + x_2 \right\} \\ & \quad + x_1 \left(-\partial_2 + \partial_3 - \frac{x_3}{2} + \frac{k}{2} - 1\right) \Bigg] \\ & \cdot \Bigg[\left(\partial_1 - \frac{k}{2} - 1\right) \left\{ \left(-\partial_1 + \partial_2 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(-\partial_2 + \partial_3 + \frac{x_3}{2} - \frac{k}{2}\right) + x_2 \right\} \end{aligned}$$

$$+x_1\left(-\partial_2+\partial_3+\frac{x_3}{2}-\frac{k}{2}\right)\Bigg].$$

また、固有値は次で与えられる：

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_{2,k,\nu} &= \{\nu_1^2-(k-3)^2\}+\{\nu_2^2-(k-2)^2\}+\{\nu_3^2-(k-1)^2\},\\
\tilde{\chi}_{4,k,\nu} &= \{\nu_2^2-(k-1)^2\}\cdot\{\nu_3^2-(k-1)^2\}+\{\nu_1^2-(k-2)^2\}\cdot\{\nu_3^2-(k-1)^2\}\\
&\quad+\{\nu_1^2-(k-2)^2\}\cdot\{\nu_2^2-(k-2)^2\},\\
\tilde{\chi}_{6,k,\nu} &= \{\nu_1^2-(k-1)^2\}\cdot\{\nu_2^2-(k-1)^2\}\cdot\{\nu_3^2-(k-1)^2\}.
\end{aligned}$$

また、Whittaker 関数の空間の次元については以下が成立する。

Corollary 6.3.

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{I}_{\eta,\pi}=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Wh}(\pi,\eta,\tau)=|W|=48.$$

REFERENCES

[1] Gelfand, I. and Zelevinsky, A., Canonical basis in irreducible representations of $\mathfrak{gl}_3$ and its applications, Group Theoretical Methods in Physics vol.II, VNU Science Press, 1986, 127-146.

[2] Harish-Chandra, Spherical functions on a semi-simple Lie group I, II, Amer. J. Math. **80** (1958), 241-310, 553-613.

[3] Hirano, M., Ishii, T., Oda, T., Confluence from Siegel-Whittaker functions to Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$, preprint.

[4] Hirano, M., Oda, T., Integral switching engine for special Clebsch-Gordan coefficients for the representations of $\mathfrak{gl}_3$ with respect to Gelfand-Zelevinsky basis, preprint.

[5] Hirano, M., Oda, T., Whittaker functions for P_{J_2}-principal series renresentations of $Sp(3,\mathbf{R})$, preprint.

[6] Kostant, B., On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math. **48** (1978), 101–184.

[7] Maass, H., Siegel's modular forms and Dirichlet series, LNM **216**, Springer-Verlag,

[8] Matumoto, H., Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators, Acta Math. **161** (1988), 183–241.

[9] Miatello, R., Wallach, N., Automorphic forms constructed from Whittaker vectors, J. Funct. Anal. **86** (1989), 411–487.

[10] Oda, T., and Tsuzuki, M., Automorphic Green functions associated with the secondary spherical functions, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), 451–533.

[11] Slater, L. J., Generalized hypergeometric functions, Cambridge, 1966.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, EHIME UNIVERSITY, 2-5 BUNKYO-CHO, MATSUYAMA, EHIME, 790-8577, JAPAN

E-mail address: `hirano@math.sci.ehime-u.ac.jp`

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO, TOKYO, 153-8914 JAPAN

E-mail address: `takayuki@ms.u-tokyo.ac.jp`