Title	一般化ぷよぷよのNP完全性 (計算機科学基礎理論とその応用)
Author(s)	松金, 輝久; 武永, 康彦
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1426: 147-152
Issue Date	2005-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/47272
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 147-152

一般化ぷよぷよの NP 完全性

松金輝久 (Teruhisa MATSUKANE)
武永康彦 (Yasuhiko TAKENAGA)

電気通信大学 (The University of Electro-Communications)

1 はじめに

計算理論において、ある問題を解くためにかかる時間量や領域量を計算し、その複雑さを調べるのは重要なことである。扱われる問題は数多くあるが、パズルやゲームもその中の一つである。本論文ではぷよぷよ [4, 5] というゲームを取り上げて、その複雑さを調べた。ぷよぷよとは、日本では広く知られるアクションパズルゲームである。

本論文では、一般化ぷよぷよにおいて「入力の初期盤面とピース列から k 連鎖可能であるか」を判定する連鎖数判定問題を扱う。一般化ぷよぷよに適切な問題を与えると、それが NP に属することが明らかに成り立つことを利用して、3-Partition からの帰着を行う。これは、同じくコンピュータゲームとして広く知られる、テトリスの NP 完全性を示す手法 [1] を取り入れている。

2 一般化ぷよぷよ

2.1 一般化ぷよぷよの定義

まず、ぷよぷよを以下のルールにしたがって、1 人で行う組合せパズルとして定義する。

ルール

1. 盤面は格子状の正方形のマスに区切られ、各マスに右方向を x、上方向を y 座標として (x, y) $(y > 0)$ に整数の座標を持つ座標平面である。$y = 0$ を地面としてサイズの制限は考えない。盤面の一番左下を座標 $(1, 1)$ とする。
2. 盤面には「ぷよ」と呼ばれるブロックを盤面のマスに置くことができる。ぷよには「色ぷよ」と「おじゃまぷよ」の 2 種類がある。
3. 色ぷよ (以下、単に「ぷよ」と呼ぶ) には a 種類の色があり、同色のぷよが縦、横に 4 個以上連結すると消える。
4. あるぷよが消えたときにおじゃまぷよが隣接していれば、そのおじゃまぷよは消える。
5. ピースは 2 個のぷよがつながったものであり、入力としてピース列が与えられる、
6. ピースは 1 つずつ順に盤面の十分高いところから表れ、プレイヤーはそれを次の順に操作する。
   - ピースに対して回転 $(0°, 90°, 180°, 270°)$ を行う
   - ピースに対して x 軸方向の移動を行う
   - ピースを落下させる
7. 下に空白ができたぷよは、他のぷよか地面に接触するまで落下する。

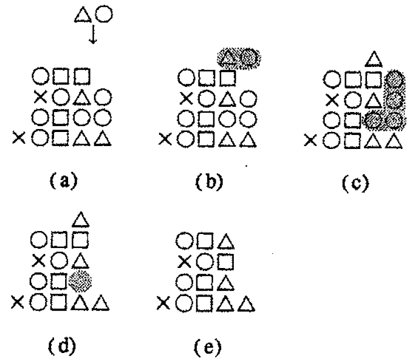

図 1 一般化ぷよぷよの操作の例

このようなぷよぷよを、一般化ぷよぷよと呼ぶ。その操作の仕方を図 1 の例に示す。以下、ぷよを記号○, ×, △, □ で表すことにする。

ルール 7. の性質を利用して、他のぷよが消えて下に空白ができたときに、また同色のぷよが 4 個以上隣接し消えることがある。この現象を連鎖という。連鎖はゲームとしてのぷよぷよにおいて非常に重要な性質である。本論文ではこの連鎖について詳しく扱っている。

ぷよぷよでは、通常のぷよとは性質の異なるおじゃまぷよが現れる。以下、おじゃまぷよを記号 ● で表すことにする。

これは、ルール 2. のように縦、横に 4 個以上連結しても消えることはない。その代わり、あるぷよが消えたときにおじゃまぷよが隣接していれば、そのおじゃまぷよは消える。

2.2 連鎖数判定問題

一般化ぷよぷよにおける連鎖数判定問題を以下のように定義する。

入力 初期盤面: B, ピースの列: P, 正整数: k
出力 B, P に対して k 連鎖することが可能か?

定理 1 連鎖数判定問題 $\in$ NP

3 帰着とインスタンス

連鎖数判定問題の NP 完全性の証明は、3-Partition [3] からの帰着により行う。3-Partition の定義は以下の通りである。

入力 正整数 $a_1, \ldots, a_{3s}, T$

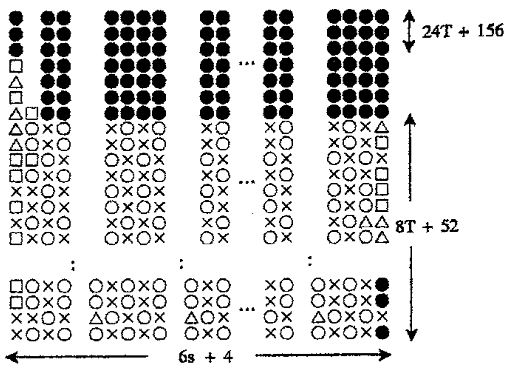

図 2 初期盤面

- $\frac{T}{4} < a_i < \frac{T}{2} (1 \leq i \leq 3s)$,
- $\sum_{i=1}^{3s} a_i = sT$ の両方をみたす。

出力 $\{a_1, \ldots, a_{3s}\}$ を s 個の部分集合 $A_1, \ldots, A_s$ に分割し、それらの全てについて $\sum_{a_i \in A_j} a_i = T$ となるか?

定理 2 3-PARTITION は NP 完全 [2]。

3.1 連鎖数判定問題のインスタンス

3-PARTITION から次のように連鎖数判定問題のインスタンスに帰着する。

初期盤面の構成 初期盤面を図 2 に示す。

初期盤面の大半は繰り返し部分で構成されており、それを図 3 に示す。見方は以下の通りである。

- 列 1, 2:
  - 行 $8T + 57 \sim 32T + 208$: 列 1 にパーツ F が繰り返される
  - 行 $8T + 49 \sim 8T + 56$: パーツ A
  - 行 $\sim 8T + 48$: パーツ B, B' が交互に繰り返される
- 列 $3 \sim 6s + 2$
  - 行 $8T + 53 \sim 32T + 208$: パーツ G の繰り返し
  - 行 $5 \sim 8T + 52$: パーツ C の繰り返し
  - 行 $1 \sim 4$: パーツ C' の繰り返し
- 列 $6s + 3, 6s + 4$
  - 行 $8T + 53 \sim 32T + 208$: パーツ H の繰り返し
  - 行 $5 \sim 8T + 52$: パーツ D, D' が交互に繰り返される
  - 行 $1 \sim 4$: パーツ E

B, B' および D, D' の繰り返しにおいて、T の偶奇によってその終端が異なる。すなわち、

- T が奇数: B, B', ..., B および D, D', ..., D
- T が偶数: B, B', ..., B' および D, D', ..., D'

となる。ただし、いずれにしても隣接する他のパーツに影響はない。

行 $4j + 1 \sim 4j + 4$ の集まりをそれぞれ **belt** と呼び、後にぷよが連鎖で消える単位を表す。

また、列 $6i + 5$ および $6i + 6$ の空の座標の集まりをそれぞれ

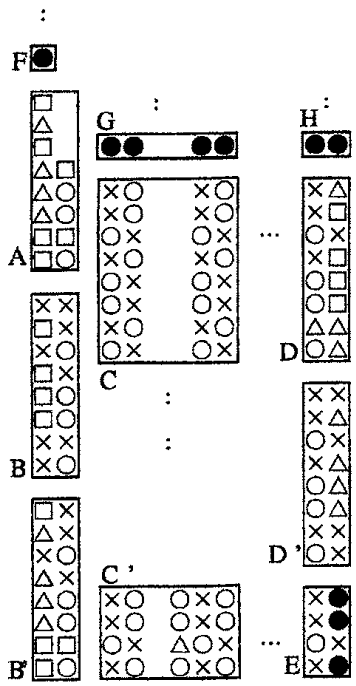

図 3 初期盤面の繰り返し部分

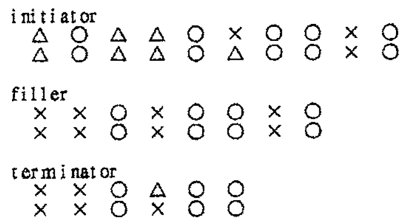

図 4 ピースの列

bucket と呼び、後にぷよを置く際の議論で用いる。この bucket は s 個あり、3-PARTITION のインスタンスの分割 $A_1, \ldots, A_s$ に対応している。さらに、bucket にある行 $52 + 8T$ 以下の空の座標の総和のことを、**bucket の容積**と呼ぶ。

ピースの構成 以下に入力のピースの列を示す。まず、initiator, filler, terminator を図 4 のように定義する。

- 以下が $3s$ 組、この順で表れる
  - initiator, filler $\times a_i$, terminator
- Key: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bigcirc}{\triangle} \times s$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\triangle}{\triangle} \times s$
- Tsumo: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$

Filler が a_i 回繰り返されるのは、3-PARTITION のインスタンスの a_i に対応しており、$\sum_{a_i \in A_j} a_i = T$ となるとき、bucket がちょうど満たされる。

また、$k = 20sT + 58s + 8T + 53$ とする。

補題 3 連鎖数判定問題のサイズは、s, T の多項式で表される。

4 完全性

本章で示した連鎖数判定問題のインスタンスが、3-PARTITION からの帰着として正しいことを、本章、次章にわたって示す。

連鎖の性質上、入力のぷよの総数を 4 で割った商が得られる最大連鎖数の上界となる。したがって、連鎖数判定問題では次のような性質がただちに導かれる。

定理 4 この連鎖数判定問題のインスタンスにおいて、5 個以上の同時消しはできない。また、最後のピース以外では連鎖として消える以外ぷよを消すような操作はできない。

定理 4 より、次のような操作を行って得られる連鎖を正当でない連鎖と呼ぶことにする。

- ピース列が終了していないにもかかわらず、ぷよを消す
- 連鎖の過程で 5 個以上の同時消しが起こる
- 連鎖の過程で絶対に消されないぷよが現れる

逆に、そのような操作をしないで得られる連鎖を正当な連鎖と呼ぶことにする。

定理 5 任意の 3-PARTITION のインスタンスに対して、連鎖数判定問題のインスタンスで k 連鎖可能となる初期盤面 B に対するピース P の操作が必ず存在する。

証明の概略 各 bucket に配置するピースは initiator, filler$\times a_i$, terminator である。これらはすべて図??のように置いていく。これを 1 セットとする。A_j に対応した bucket だとすると、3 セットのピースが置かれたときに bucket が満たされることと、$\sum_{a_i \in A_j} a_i = T$ となることは対応している。3-PARTITION のインスタンスが "yes" となるならば、すべての bucket についてこれが成り立つ。その後に key,tsumo を図 6 のように配置して発火させると、連鎖が正しく動作し、$20sT + 58s + 8T + 53$ 連鎖となる。□

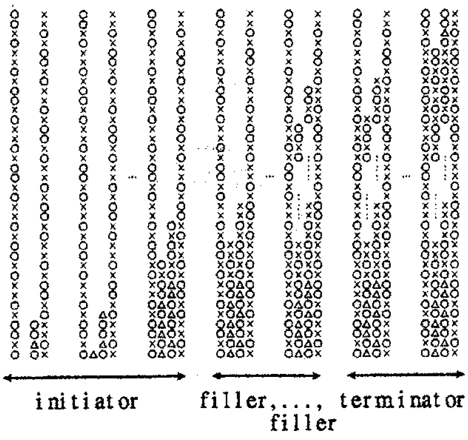

図 5 Bucket へのピースの正当な配置

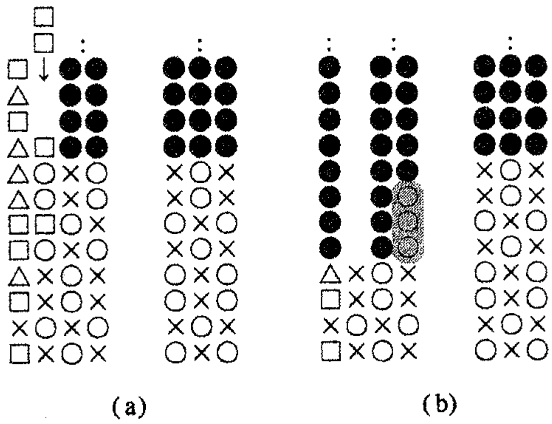

図 7 盤面左上部における連鎖の発火

5 帰着の正当性

以下では、3-PARTITION で "no" となるならば、連鎖数判定問題でも k 連鎖が不可能であることを示す。

ピースを bucket に積み上げていく過程において、連鎖の進行方向が明らかでないとその形を想定するのが困難である。そのために、初期盤面に置かれているぷよの組合せから、どのような流れで連鎖が進行するのかが一意に定まることを示す。

本論に入る前に、連鎖の発火について確認しておく。

補題 6 連鎖の発火は、tsumo $\substack{\square\\\square}$ が、座標 $(1, 8T+54)$, $(2, 8T+53)$ の□のぷよと連結することで行われる。

連鎖を発火する箇所は決まっているので、はじめの数連鎖目までは明らかである。しかし、bucket 内の構成は定まっていない。そこで、連鎖がはじめの bucket にたどり着いたとき、bucket の外へどう連鎖が進行していくかを考え、全体の連鎖の進行方向を明らかにする。

5.1 連鎖の流れ

5.1.1 Bucket の側面

まず、連鎖を発火直後の連鎖の様子を見てみよう。補題 6 から連鎖の発火は図 7(a) のように行われる。途中までその連鎖を追っていくと、図 7(b) の状態まで進行する。この連鎖を続けるために、図 7(b) の色で示した、列 $(5, 8T+51), (5, 8T+50), (5, 8T+49)$ のいずれかに○のぷよを置くことになる。

この時点で、次の連鎖は bucket 内のぷよを用いて進む。何回かの bucket 内の連鎖の後、初期盤面にあったぷよが消える。Bucket 内の連鎖の構成を想定するのは現段階では困難なので、列 $(4, y), (6, y) (y = 1, \ldots, 4), (7, y) (y = 5, \ldots, 8T + 52)$ のうちどのぷよが消えるかに注目する。各 bucket について、これらのぷよを **bucket の側面**と呼ぶことにする。また、そのうち色ぷよがある y 座標のうち最も値の大きいものを**側面の高さ**と呼ぶことにする。

補題 7 ある bucket に連鎖が及んだとき、その側面の高さを $3t$ とすると、そのうち正当に消すことができるのは高さ $3t - 2$ のぷよ

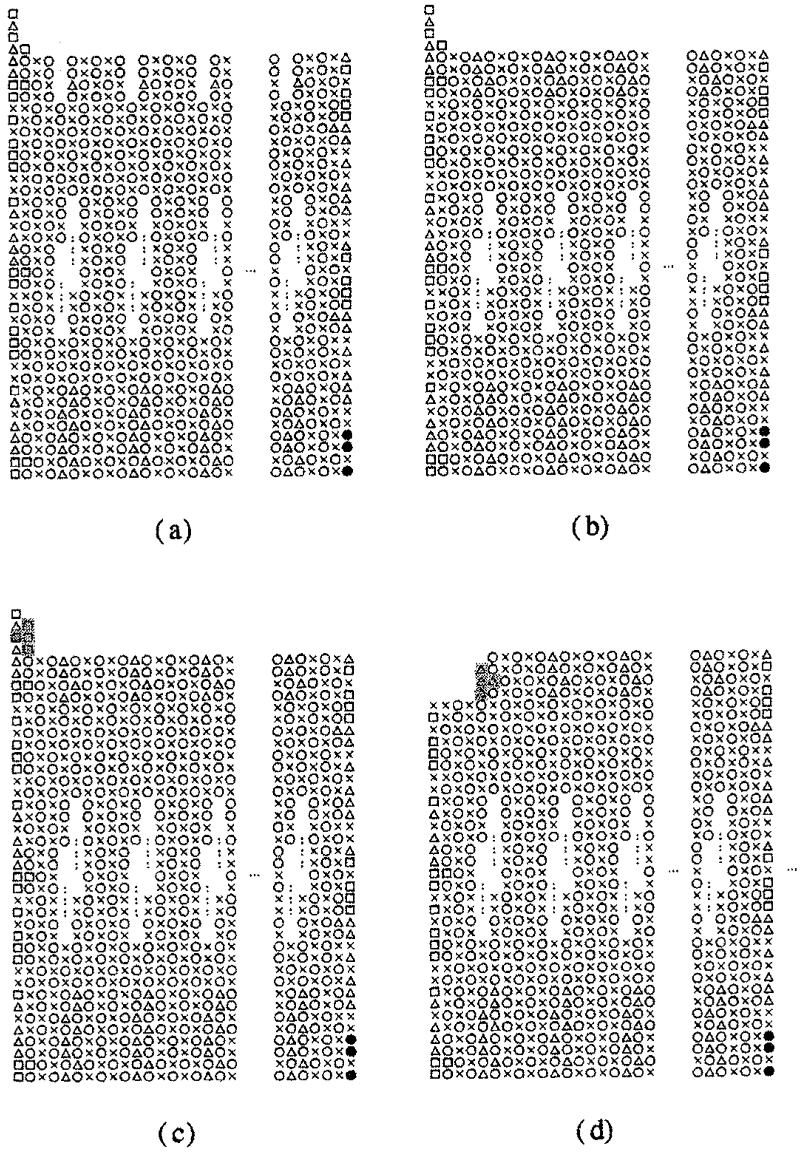

図 6　Bucket へのピースの正当な配置と連鎖の発火

のみである。

証明の概略　まず、ある高さ $3t$ の bucket の左側面について考える。同色のぷよのつながりを上部から $l_1, l_2, \ldots, l_t$ とし、その中で正当に消すことのできるぷよを探す。すると、l_2 以外を消すと正当でないことがわかる。

この場合に消えるぷよのかたまりに注目すると、その belt 上の 16 個のぷよが 1 つの単位となって消えることがわかる。すなわち、bucket の側面のぷよが消えるときは、4 行分ずつ消されるということになる。

4 行分消された bucket の側面についても、先に示した場合分けが同様に適用することができ、それが成り立つ。

右側面についても同様の理由から成り立つ。したがって、bucket の側面は、上から 2 番目のつながりのみを正当に消すことができる。　□

5.1.2　Bucket 内の連鎖の進行方向

bucket 内での連鎖の構成について明らかにする。補題 7 により、bucket に連鎖が及んだときに初期盤面のどのぷよが消されるかが 2 通りに絞られた。1 つは連鎖方向が一定のままになるのと、もう 1 つは連鎖が「折り返し」を起こすものである。

各 bucket と belt が交差する、座標 $(6i+5, 4j+1), (6i+6, 4j+4)$

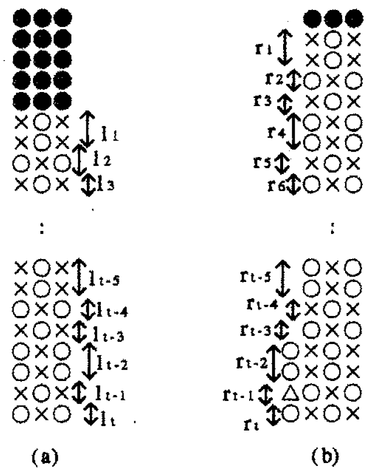

図8　Bucket の側面で消すことができるぷよを探す

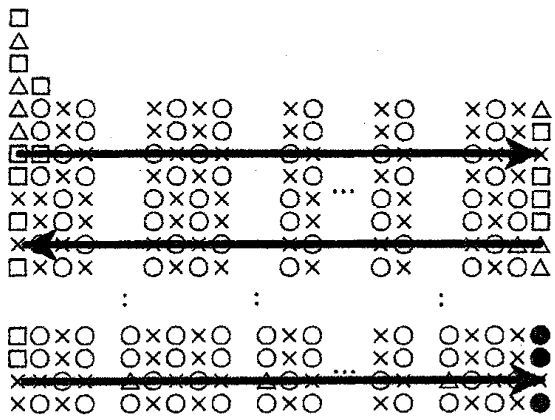

図9　盤面全体における連鎖の流れ

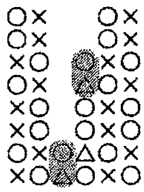

図10　始めの2手の配置

を対角線とするような長方形の領域を、**box** と呼ぶ。

補題 8 各 box において、○のぷよはちょうど4個ずつ置かれる。

次に、これから全体の連鎖方向を決定付ける補題を示す。

補題 9 Bucket の中での折り返しは正当でない。

証明の概略　左から右に向かって進行する連鎖を例として考える。Bucket の左側面に到達した連鎖が、下の belt の同じく左側面に連鎖が及ぼうとすると、そこで消える○のぷよの連結するパターンは4通り考えられる。一方、その box に配置できる○のぷよのパターンは補題8より7通りとなる。そのいずれにおいても、図中の色で示した○のぷよをよりも下の行には連鎖を進めることができない。なぜならば、○のぷよを消すときは必ず bucket の側面を巻き込む形でなければならないからである。したがって、bucket 内での折り返しは正当でない。　□

補題7と補題9により、盤面全体における連鎖方向が明らかになった。それを次の定理として示す。また、それを図9に表す。

定理 10 連鎖は盤面両端でのみ折り返され、奇数番目の belt は左から右、偶数番目の belt は右から左に向かって進行する。

5.1.3 Bucket の容積

本節では、各 bucket に置くことができるぷよの総数を求める。

補題 11 正当な連鎖のために、各 bucket において、bucket に入るぷよの個数とその容積の差は4の倍数でなければならない。

補題 12 正当な連鎖のために、各 bucket において、その容積と等しい個数のぷよが置かれなければならない。

5.1.4 Bucket 内で消える色の順番

ここからは bucket 内でどのような連鎖が構成可能かを調べていく。

定理7によって bucket 間の連鎖の流れが明らかになったわけだが、bucket の中ではどのような連鎖が起こるだろうか。ある bucket ですべての belt において、例えば○→△→○のように○以外のぷよが1組だけ消えると、Bucket の容積とぷよの個数の関係からちょうど bucket が満たされるように連鎖を構成することができるだろう。しかし、○→△→□→○のように○以外のぷよが2回続けて消えると、その bucket では別に○→○のような連鎖が起こらなければならなくなる。

そこで、○→○と消える連鎖は bucket 中で構成することができないことを示し、より詳細な連鎖の構成を明らかにする。

補題 13 Bucket 中で○→○と消える連鎖の形は一通りに定まる。

定理 14 Bucket 中で○→○と消える連鎖は正当でない。

証明の概略　補題13より、bucket の最も下でないある box で、○→○と消える連鎖を1つ構成し、その下の box の連鎖の形を考える。すると、○→○の連鎖がある box の下の box もまた○→○の連鎖でなければならないことが分かる。ところが、最も下の box はそのような構成ができないことが、初期盤面からただちに判断できる。したがって、どの box にも○→○の連鎖を構成することはできない。　□

5.2 ピースの配置

前節までの議論によって、盤面全体の連鎖の流れと bucket 内の連鎖の構造について明らかになった。ここからは、入力のピースをどのように配置できるかを考える。

	$3^{\triangle}_{\triangle}$	$4^{\triangle}_{\triangle}$	$5^{\bigcirc}_{\bigcirc}$	$6^{\times}_{\triangle}$	$7^{\bigcirc}_{\bigcirc}$	$8^{\bigcirc}_{\bigcirc}$	$9^{\times}_{\times}$	$10^{\bigcirc}_{\bigcirc}$	$11^{\times}_{\times}$
1.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2.	A	A	A	B	B	-			
3.	A	B	B	B'	B'	-			
4.	B	B'	B	B''	B'	B''	B''	B''	-

表 1　3 ~ 10 手目の bucket への配置

定理 10,14 により、次のことが言える。

補題 15 ある box に○以外のぷよが置かれると、正当な連鎖のために、その box には○とその色のぷよだけ置くことができる。

さらに、初期盤面から次のことも言える。

補題 16 初期盤面において、bucket に○のぷよを置くことは正当でない。

補題 17 このインスタンスにおいて、おじゃまぷよの上にピースを置くことは正当でない。

ここから入力のピースの配置を調べ、initiator, filler, terminator についてその配置の一意性を確認する。初期盤面における bucket の状態はどれも同じなので、どの bucket にピースを置くかは任意に選択するものとする。以後、その bucket を A、それ以外の bucket を $B, B', B'', \ldots$ とする。

補題 15 により、1,2 手 ${}^{\triangle}_{\triangle}, {}^{\bigcirc}_{\bigcirc}$ は配置が確定する (図 10)。1 手目を $0°$ 回転して列 $6i+5$ または列 $6i+6$ に置くと、2 手目を正当に置くことができなくなるからである。

3,4,6 手目は A 以外の bucket に置ける可能性がある。3,4,6 手目を A, B, B', B'' のどの bucket に置くか、またそれによって 5 手目以降のピースはどの bucket に置かれるかを表 1 に示した。

表 1 より、初期盤面においてピース列 initiator は 1 つの bucket にのみ配置することができ、その結果、filler を迎える。Filler,terminator についても同様の議論によりピースの配置は一意に定まり、次の補題が導かれる。

補題 18 $r \geq 0$ について、ピース列 initiator, filler$\times r$, terminator は 1 つの bucket に続けて置かれなければならない。また、その配置は一意に定まる。

Key、tsumo ${}^{\square}_{\square}$ を補題 6 にしたがって配置することで、連鎖が発火される。

補題 19 ピース列 key ${}^{\bigcirc}_{\triangle} \times s$, ${}^{\triangle}_{\triangle} \times s$ は全ての bucket にピース 1 つずつ配置されなければならない。

定理 20 連鎖数判定問題のあるインスタンスで k 連鎖可能であるとき、対応する 3-PARTITION のインスタンスでも "yes" となる。

証明　連鎖数判定問題のインスタンスで k 連鎖可能であるということは、正当な連鎖を構成できるということである。

補題 6 より入力 P の最後のピース tsumo で連鎖を発火し、補題 18, 19 より tsumo 以外のピースで入力の盤面 B の bucket はちょうど満たされる。このとき、各 bucket を 3-PARTITION に置ける集合の分割 $A_1, \ldots, A_s$ に対応づけ、また、入力 P に現れる filler の繰り返し回数を、3-PARTITION のインスタンス $\{a_1, \ldots, a_{3s}\}$ に対応づけると、補題 18 により、$\sum_{a_i \in A_j} a_i = T$ が成り立つ。すなわち、これは 3-PARTITION において "yes" となる。 □

6　結論と今後の課題

定理 21 連鎖数判定問題は NP 完全。

証明　補題 3, 定理 1, 5, 20 より明らか。 □

以上より、一般化ぷよぷよの連鎖数判定問題が NP 完全であることが示された。

一般化ぷよぷよにおける他の問題として、**全消し判定問題**がある。これは、入力 P のピース列が終了した時点で盤面上のぷよを全て消すことができるかを判定する問題である。これも NP 完全であることが知られている [6]。

また、初期盤面が空で、かつ入力 P には 2 色のぷよで限定した全消し判定問題は、線形時間で計算可能であることが示されている [7]。

多くの場合、初期盤面を空にするとピースの配置の仕方が無数に考えられるため、その計算量がどう変化するかはわからないが、それを調べることは困難であると思われる。

参考文献

[1] Erik D.Demaine, Susan Hohenberger, David Liben-Nowell. Tetris is Hard, Even to Approximate. *Technical Report MIT-LCS-TR-865, Massachusetts Institute of Technology.* 2002.

[2] Michael R. Garey and David S. Johnson. Complexity Results for Multiprocessor Scheduling under Resource Constraints. *SIAM J. Comput.*, 4:397-411, 1975.

[3] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[4] (c) SEGA. `http://www.sega.co.jp/`.

[5] COMPILE. `http://www.compile.co.jp/`.

[6] 牟田秀俊. ぷよぷよ全消し判定問題は NP 完全. **東京大学卒業論文**, 2005.

[7] 亀村真理. ぷよぷよの 2 色全消し判定問題. **電気通信大学卒業論文**, 2005.