数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 250-255

LA Symposium, Winter 2005
(Jan. 31– Feb. 2, 2005, Kyoto)

計算万能な双曲セル・オートマトンについて

今井 克暢 (Katsunobu IMAI), 岩本 宙造 (Chuzo IWAMOTO), 森田 憲一 (Kenichi MORITA)
広島大学大学院工学研究科 (Graduate School of Engineering, Hiroshima University)
東広島市鏡山 1-4-1
{imai,iwamoto,morita}@iec.hiroshima-u.ac.jp

abstract: われわれは等辺四角形セルによる 5 状態 5 近傍 (ノイマン近傍) 万能双曲セル・オートマトンを構成した。Delay-insensitive(DI) 回路と呼ばれる非同期回路を模倣することで万能性を示している。DI 回路の論理万能素子を双曲 CA で構成できることと、ユークリッド CA 上の有限サイズの格子を対応する双曲 CA に移す写像が実現できることを示した。これにより、任意の有限サイズの DI 回路を双曲 CA 上で模倣できる。

1 はじめに

双曲面上のセル・オートマトン (CA) [7] は特異な構造を持っているにもかかわらず水平方向に枝を持つ木上の CA で高々定数倍の減速で模倣できることが知られている [10] ため、双曲 CA を設計するにはそのような CA の規則を設計するだけで十分である。しかし、単純な万能双曲 CA を設計すると言った、小さな状態数を持つ双曲 CA を設計するには双曲 CA の遷移規則を直接設計することが必要である。

論理万能な CA とはフィードバックを許した任意の論理回路を模倣できる CA のことである。ユークリッドノイマン近傍 CA の場合には Banks [1] が 2 状態で十分であることを示しておりこれが最小である。双曲 CA の場合には、5 角形のセルをもつ 22 状態の CA で、レジスタ機械を模倣できる回路を構成することで万能なものが示されている [2]。

本論文では、この状態数の削減を試みる。さらに、ユークリッド CA の規則を用いて双曲 CA とを設計することを可能にするため、等辺四角形セルによる 5 近傍双曲 CA を用いる。これらの CA は回転対称な規則に限定する限り、双曲版のノイマン近傍 CA と見なすことができ、さらに同じ定義がユークリッドの場合にも適用できる。この定義を用いることで、双曲 CA を構成する直感的な方法を提供することができる。すなわち、ユークリッド CA の規則にいくらかの修正や追加を加えることで双曲 CA の規則に拡張することが可能になる。

Serizawa [9] はユークリッドノイマン近傍 3 状態万能 CA を構成している。この CA では、構成万能性をも示すために多数の基本動作が実現されているが、3 つの基本動作のみが論理万能性を示すために必要である。これらの 3 つの基本動作が 5 状態の双曲 CA 上でも実現可能であることが示されているが [3]、Serizawa の方法をそのまま用いたのではフィードバックを含む回路を構成することができず、フィードバックを含まない組み合わせ論理回路を計算することができるだけである。また、何らかの方法で、フィードバックを実現することができたとしても Serizawa の CA の任意の状相を双曲 CA に移す写像を見つけるのは困難である。

そこで、本論文ではまず任意の Delay-insensitive(DI) 回路 [4] を模倣することができる 5 状態ユークリッド CA を [6] の直列万能素子集合の素子を模倣することで構成する。DI 回路はある種の非同期回路で配線路の長さが変わっても計算結果には影響しない。構成した CA において、静止状態でないのは幅 1 のワイヤか論理素子を構成するセルのみであり、論理素子は必ずワイヤーの交点に配置され、交差点とその点を囲む 4 つのセルのみが使われる。そこで、ユークリッド CA 上の有限サイズの格子を双曲 CA に移すアルゴリズムを示す。このアルゴリズムを用いて、ユークリッド CA 上の回路の状相を対応する双曲 CA の状相に移すことができる。移された格子の各辺の長さは等しくないが、非同期回路のため、模倣時間が増加するだけで、計算結果は変わらない。このようにして万能な 5 状態双曲 CA を得ることができる。

2 双曲平面における等辺四角形によるタイリング

双曲平面では、直角 n 角形 ($n \geq 5$) によるタイリングが可能であるが、正方形によるタイリングはできない。しかし、角度が $\pi/2$ 以下の等辺四角形によるタイリングは

可能である。図 1 に頂点の次数が 5, 6, 10 の場合を示す。以下、双曲面を表すためにポアンカレの半平面モデルを用いる。

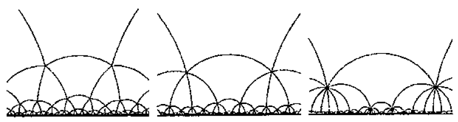

図 1: Tiling with quadrangles (degree=5,6,10).

双曲平面では、大域的な方角を決定することができず、ユークリッド平面のようなセルの座標を導入するのは難しい。そこで、本論文では局所的な相対方向の連接符号を用いてセルのインデックスを表現する。最初に**起点セル**を選びそこからの**相対方向**を決める。相対方向は 0 から 3 の数で近傍セルの方向を示すものである (図 2)。起点セルと相対方向の連接で、任意の双曲（と同様にユークリッド）平面上のセルを示すことができる。セルインデックスは (0|1|2|3)* の形式を持つ。まず、起点セルのインデックスを ϕ (すなわち空) と定義する。つぎにあるセルの近傍セルのインデックスをそのセルのインデックスと相対方向を表す数の連接で表現する。すなわち、座標 c のセルの近傍セルはそれぞれ $c0$, $c1$, $c2$, $c3$ と表される。

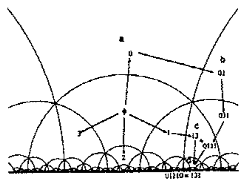

図 2: An example of the chain code.

一つのセルを表現するインデックスは無限にあり得る。例えば、セル d は 131 でも 01110 でも表現できるが、同一のセルによる同値類と見なし、その代表元を用いて一意に表すことができる。

3 ノイマン近傍双曲セル・オートマトン

上述の連接符号を用いてノイマン近傍双曲セル・オートマトンを以下のように定義する。

定義 3.1 ノイマン近傍双曲セル・オートマトン A は $A = (I, d, Q, f, q)$ で定義される。ここで I は上述の同値類の代表元の集合で、Q はセルの状態の有限集合。$f : Q^5 \to Q$ は**局所写像**で、$q \in Q$ は**静止状態** で $f(q, q, q, q, q) = q$ を満たす。A の**状相** α は $\alpha : I \to Q$ なる写像で、Q のすべての状相の集合 $\mathrm{Conf}(Q)$ は $\mathrm{Conf}(Q) = \{\alpha | \alpha : I \to Q\}$ で表される。**大域写像** $F : \mathrm{Conf}(Q) \to \mathrm{Conf}(Q)$ は $\forall c \in I, F(\alpha)(c) = f(\alpha(c), \alpha(c0), \alpha(c1), \alpha(c2), \alpha(c3))$ で定義される。ここで、$cx, x \in \{0, 1, 2, 3\}$ は c と x との連接である。

f は本質的に **回転対称**である。すなわち f は以下の条件を満たす。

$$\forall c, u, r, d, l \in Q, f(c, u, r, d, l) = f(c, r, d, l, u).$$

$d = 4$ のとき、I について適切な還元規則が用意されれば、上の定義は回転対称ノイマン近傍ユークリッド CA の場合に対応する。本論文では、この定義をユークリッド、双曲の両方の場合に用いる。以下では、双曲 CA の場合に特に説明のないときは、次数 6 とする。次に例を示す。

例 3.1 以下に挙げる遷移規則を持つ $E = (I, d, (0, 1), f_E, 0)$ なる CA を考える。

$$\begin{array}{lll}
(0,0,0,0,0) \to 0 & (1,0,0,0,0) \to 0 & (0,0,0,0,1) \to 1 \\
(1,0,0,0,1) \to 1 & (0,0,0,1,1) \to 0 & (1,0,0,1,1) \to 0 \\
(0,0,1,0,1) \to 0 & (1,0,1,0,1) \to 0 & (0,0,1,1,1) \to 1 \\
(1,0,1,1,1) \to 1 & (0,1,1,1,1) \to 0 & (1,1,1,1,1) \to 0
\end{array}$$

図 4 は双曲 CA の場合 ($d = 6$) で、状相はユークリッドの場合 (図 3) と非常に異なる。

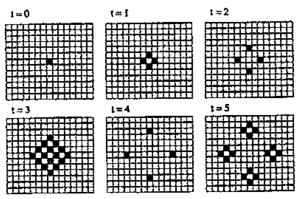

図 3: A configuration of Fredkin's parity CA (Euclid).

4 双曲 CA 上のスペースシップパタン

Serizawa [9] は, 3 状態論理万能ノイマン近傍 CA が示している。あるステップ後にあるパタン平行移動する**スペースシップ** パタンを信号伝達に用い、それらの衝突、複製、消去などの基本動作を定義している (図 5)。それらを組み合わせることで、AND, NOT, FANOUT 素子を実現し、さらにそれらによって遅延を考慮した任意の回路を構成できることから、論理万能性を示している。

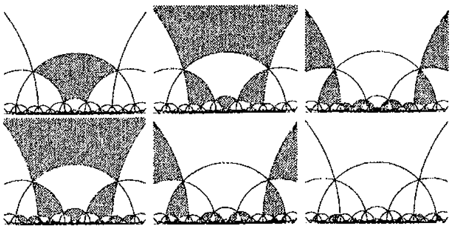

図 4: A configuration of Fredkin's parity CA (hyperbolic).

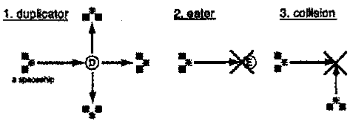

図 5: Three actions in the Serizawa's CA.

この枠組みを双曲 CA でも用いることを考え [3] では、表 1 の遷移規則を持つ 4 状態双曲 CA 上でスペースシップが実現できることを示している (図 6)。

表 1: Rules of a 4-state hyperbolic spaceship.

$(0,0,0,0,0) \to 0$	$(1,0,0,0,0) \to 0$	$(0,1,0,0,0) \to 3$
$(2,0,0,0,0) \to 0$	$(0,2,0,0,0) \to 0$	$(0,1,2,0,0) \to 3$
$(0,2,1,0,0) \to 3$	$(0,3,0,0,0) \to 2$	$(3,0,0,0,0) \to 0$
$(0,2,1,2,0) \to 0$	$(0,3,3,3,0) \to 0$	$(0,2,2,0,0) \to 2$
$(0,2,2,2,0) \to 1$	$(0,2,3,0,0) \to 0$	$(0,3,2,0,0) \to 0$
$(0,2,0,2,0) \to 0$		

さらにこのパタンを用いて、表 2 の規則を持つ 5 状態の双曲 $\mathrm{CA}H_1 = (I, 6, (0,1,2,3,4), f_1, 0)$ で、上述の 3 つの基本動作を実現できることが示されている。しかし、双曲の場合には、Serizawa の方法ではフィードバック配線を実現することはできない。

スペースシップの方向転換はスペースシップの複製によって実現されるが、複製に使われるパタンのサイズ以下で方向転換を繰り返すことはできない。ユークリッドの場合にはセルインデックス $1^4 = (10^n)^4 = \phi$ であり、n が大きくても高々4回方向転換するだけでもとのセルに戻ることが可能だが、双曲の場合 ($d = 6$) には $1^6 = \phi$ だが、$(10^n)^6 \neq \phi$ であり、11 の系列を含まない限り元のセルに戻ることはあり得ない。そこで、このような "急旋回" が必ず必要であるが、上述の枠組みでは不可能である。たとえフィードバックか可能であったとしても、模倣される任意の回路の状相を双曲 CA 上の状相に変換するのは困難である。

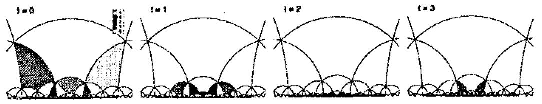

図 6: A configuration of a 4-state hyperbolic spaceship.

5　5 状態直列万能ユークリッド CA

この節では非同期回路の模倣による 5 状態の万能ユークリッド CA を示す。

5.1　DI 回路と直列万能性

Keller は *Delay-Insensitive (DI)* 回路と呼ばれるある種の非同期回路を導入した [4]。そこでは、同時に複数の入力端子に入力されることを禁じた**直列**モジュールの概念を導入しており、**直列万能**な基本モジュールの集合を見いだした。モジュールの集合が直列万能とは任意の直列モジュールがその集合のモジュールを用いることで実現できることをいい、さらに Keller は直列万能なら計算万能であることを示している。すなわち、直列万能性は従来の回路における論理万能性に対応する。DI 回路では直列万能な素子は少なくとも 6 以上の入出力端子を持つ必要があることが知られているが、Lee ら [6] は DI 回路に要求される条件を、モジュールの端子がバッファを持ち、入出力双方の信号を扱えるように緩和することで、高々3つの入出力端子を持つ直列万能基本モジュール {MERGE, FORK, S-JOIN, IOM} を示した (図 7)。これらの素子は端子数が 4 以下なので、これらのモジュールと信号の交差が実現できれば、ユークリッド CA 上の格子上に配置し、格子点を結ぶ辺上にワイヤを配置することで任意の配線が可能なので、任意の DI 回路を模倣できる [5]。

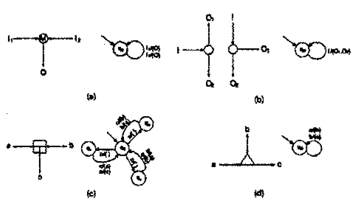

図 7: (a) A MERGE, (b) a FORK, (c) an S-JOIN, and (d) an IOM serial elements and their machine specifications [6].

5.2 直列万能ユークリッド CA E

直列万能な回転対称ノイマン近傍ユークリッド CA $E=(I,6,(0,1,2,3,4),f_A,0)$ を構成した。f_A の遷移規則は表 3 に示す。E はワイヤパタンと信号パタンを模倣することができる。ワイヤパタンは状態 1 のセルの幅 1 の系列で状態 3 のセルを配置することで ±90 度方向を転換することができ (図 8(a))、信号の "急旋回" も可能である (図 8(b))。信号パタンは状態 2,0 の 2 つのセルで表現される。ワイヤの交点に状態 3 のセルを配置することで信号の交差が実現できる (図 8(c)), 図 10。ワイヤの交点に図 9 に示すよう

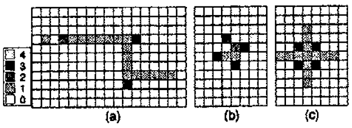

図 8: Configurations of (a) A wire and a signal (b) a feedback loop by sharp turning (c) a crossing.

に配置することで、MERGE, S-JOIN, FORK, IOM 直列モジュールも実現できる。すべてのモジュールは交点とその近傍セルのみを用いている。図 11 MERGE の状相の遷移を示す。

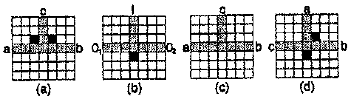

図 9: Configurations of modules of E, (a) MERGE (b) FORK (c) S-JOIN (d) IOM.

E に埋め込まれたモジュールは直列なので、ワイヤの長さが非一様に変わっても計算結果は変わらない。任意の直列回路を状相に埋め込むために必要な情報は、格子上の各点に配置されている基本モジュールの種類と配置方向、各辺がワイヤとして接続されているか、静止状態であるかのみである。

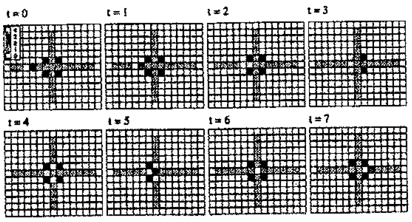

図 10: A crossing process of E.

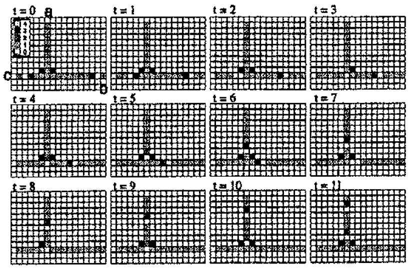

図 11: A MERGE process of E.

5.3 ユークリッド CA 上の格子から双曲平面パスへの写像

前節で DI 回路を埋め込むことができるユークリッド CA を構成した。回路を埋め込んだ状相は幅 1 のワイヤと交点の周囲のセルのみが非静止状態で、ユークリッド CA 上の格子の辺と交点を双曲 CA 上のパスとその交点に対応づけることができれば、ユークリッド CAE に埋め込まれた回路の状相を双曲 CA の状相に変換することができる。

ユークリッド CA 上の格子 (V_E,E_E) を考える。ここで、$V_E(\in Z^2)$ はサイズ m,n の領域のすべてのセルの座標の集合、すなわち、$V=(k,l),0\le k\le m,0\le l\le n$, E_E は隣接する 2 セル間の辺の集合とし、$((k_1,l_1),(k_2,l_2))$ と表す。ここで、$(k_1,l_1),(k_2,l_2)\in V_E$ かつ $|l_2-l_1|+|k_2-k_1|=1$ である。セルの座標 V_E から次数 6 の双曲セルインデックス I への写像 g を以下のように定義する。

$$g(k,l)=\begin{cases}10^{k-1}30^{l-1} & (k\ge 1,l\ge 1)\\ 10^{k-1} & (k\ge 1,l=0)\\ 0^l & (k=0,l\ge 1)\\ \phi & (k=l=0).\end{cases}$$

ユークリッド CA 上の辺 $((0,l),(0,l+1))$, $((k,0),(k+1,0))$, $((k,l),(k,l+1))$ は双曲 CA 上の長さ 1 のパスに対応し、それらは次のようになる。

$$\begin{array}{lcl}((0,l),(0,l+1)) & \rightarrow & (0^l,0^{l+1}),\\ ((k,0),(k+1,0)) & \rightarrow & (10^{k-1},10^k),\\ ((0,l),(0,l+1)) & \rightarrow & (10^{k-1}30^{l-1},10^{k-1}30^l).\end{array}$$

しかし、$((k,l),(k+1,l)),l\ge 1$ に対応するパスは長さ 1 では表せない。そこで、以下のように $((k,0),(k+1,0))\rightarrow(10^{k-1},10^k)$ から逐次的にパスを求める。ユークリッド CA の場合には、$((0,0),(1,0))$ の一つ上の辺は $((0,1),(1,1))$ である。双曲 CA の場合にもパス $(\phi,1)$ から次のパスを求める。パスの起点セルは 0、終点セルは 13 であり、中継セルは 01 と 011 である。$((0,1),(1,1))$ に対応するパスはそれらを

結合した $(0,01,011,13)$ となる。同様に $((0,1),(1,1))$ に対応するパスは $(10^{k-1}3, 10^{k-1}31, 10^{k-1}311, 10^{k}3)$ である。さらに、ユークリッド CA の $((0,1),(1,1))$ の一つ上の辺は $((0,2),(1,2))$ である。双曲 CA の場合には $(0,01,011,13)$ から次の辺を求める。起点セルは 00、終点セルは 130 であり、中継セルは $0,01,011,13$ の 4 つのセルに対して $(00,001,0011)$, $(013,0131,01311,013111,0131111,01311110,013111101)$, $(0113,01131,011311,0113111,01131111,011311110, 0113111101)$,$(130)$ である。これらをすべて連結した $(00,001,0011,013,0131,01311,013111,0131111,01311110, 013111101,0113,01131,011311,0113111,01131111, 011311110,0113111101,130)$ が対応するパスになる。

一般に、ユークリッド CA 上の格子の辺 $((k,l),(k+1,l)), l \geq 1$ に対応する双曲 CA 上のパスは $(s, r_1, ...r_u, e)$ と表すことができる。ここで、s は起点セル、$r_1, \cdots, r_u$ は中継セルで、e は終点セルである。$(s, r_1, ...r_u, e)$ の次のパスは起点セル s を $s0, s01, s011$, 中継セル r_i を $r_i3, r_i31, r_i311, r_i3111, r_i31111, r_i311110, r_i3111101$, 終点セル e を $e0$ と書き換えることで求められる。E_E に対応するすべての双曲 CA 上のパスはこの書き換えを n 回、$[10^{k-1}3, 10^{k-1}31, 10^{k-1}311, 10^{k}3]$ の各 m 個のパスに対して行うことで得られる。

この対応に従って直列モジュールとワイヤを双曲 CA 上に配置することができる。

5.4 5 状態直列万能双曲 CA H_2

この節では E を次数 6 の双曲 CA$H_2 = (I, 6, (0,1,2,3,4), f_{H2}, 0)$ に拡張した結果を示す。f_{H2} の遷移規則は 3 に 4. を追加したものである。

状態の割当は E と同じである。信号は状態が 0, 2 の 2 セル、ワイヤは幅 1 の状態 1 のセルの連結で表される。図 12(a) は最小のフィードバックループの例である。各旋回点には状態 3 のセルが配置されている。図 12(b) は交差モジュールでユークリッド CA の場合と違い、交点の周囲にはワイヤ以外に 12 個のセルがあるので、そのすべてのセルの状態を 3 とする。交差点での遷移を図 14 に示す。交点で交差するワイヤに状態 3 のセルを通って到達するにはユークリッドの場合と違い 5 ステップ必要である。

MERGE, FORK, S-JOIN, IOM モジュールを図 13 に示す。モジュールの周囲のセルが 3 であることをのぞくとユークリッドの場合と同じである。

表 4 の規則は E では使われないので、f_E を f_{H2} で置き換えることができる。さらに、規則を f_{H2} へ追加することで、次数を $d \geq 4$ の場合にも拡張することができる。すなわち、H_2 は次数に依存しない CA に拡張することができる。

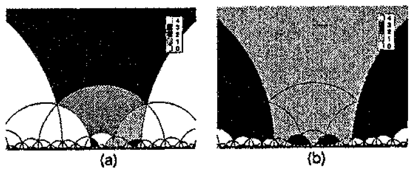

図 12: Configurations of H_2, (a) a feedback loop by sharp turning (b) a crossing

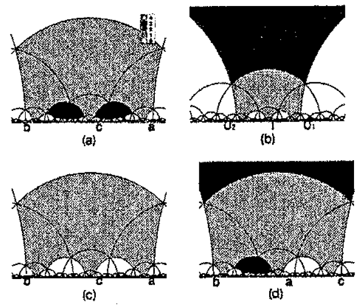

図 13: Configurations of modules of H_2, (a) MERGE (b) FORK (c) S-JOIN (d) IOM.

6 まとめ

本論文では、次数 6 の等辺四角形セルによる 5 状態ノイマン近傍双曲 CA で万能なものを構成した。ユークリッド CA の場合にも同じ規則を適用することができ、さらに次数に依存しない CA に拡張することができる。

7 謝辞

双曲幾何に関して中尾輝男 (NEC)、非同期回路に関して Jia Lee (情報通信研究機構) から有益な助言を得たことに感謝する。

参考文献

[1] Banks, E. R.: Universality in cellular automata, *Proc. Eleventh Annual Symposium on Switching and Automata Theory* (1970) 194–215.

[2] Hermann, F, Margenstern, M.: A universal cellular automaton in the hyperbolic plane, *Theoretical Computer Science* **296** (2003) 327-364.

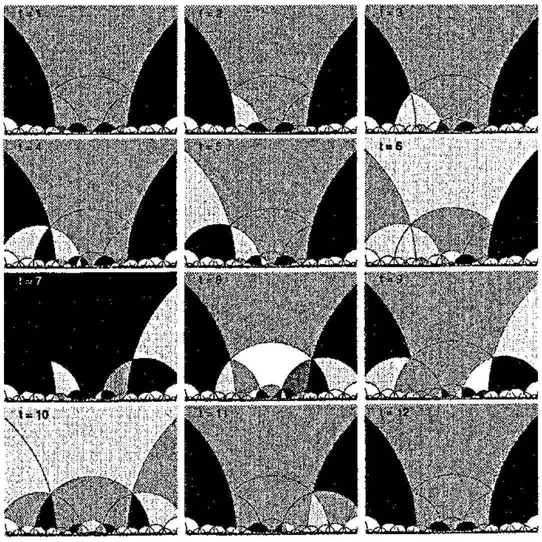

図 14: A crossing process of H_2.

[3] Imai, K., Ogawa, H: A simulation tool for hyperbolic cellular automata and its application to construct cellular automata which can simulate logical circuits *Proc. International Workshop on Cellular Automata (Automata 2000)* Osaka (2000) 11.

[4] Keller. R.M.: Towards a theory of universal speed-independent modules, *IEEE Trans. Computers* **23** 1 (1974) 21-33.

[5] Lee, J., Adachi, S, Peper, F, Morita. K.: Embedding universal delay-insensitive circuits in asynchronous cellular space, *Fundamenta Informaticae* **58**, 3-4 (2003) 295-320.

[6] Lee, J., Peper, F, Adachi, S, Morita. K.: Universal delay-insensitive circuits with bidirectional and buffering lines, *IEEE Trans. Computers* **53** 8 (2004) 1034-1046.

[7] Margenstern, M., Morita. K.: NP Problems are tractable in the space of cellular automata in the hyperbolic plane, *Theoretical Computer Science* **259** (2001) 99-128.

[8] von Neumann, J.: *Theory of self-reproducing automata* (ed. A.W.Burks), The University of Illinois Press, Urbana (1966).

[9] Serizawa, T.: 3-state Neumann Neighbor cellular automata capable of constructing self-reproducing machine, *Trans. IECE Japan* **J-69-D**, 5 (1986) 653-660 (in Japanese).

[10] Worsch, T.: Simulations Between Cellular Automata on Trees Extended by Horizontal Edges, *Fundamenta Informaticae* **58**, 3-4 (2003) 241-260.

A Rules of H_1, E, and H_2

表 2: Rules of the 5-state hyperbolic CA H_1

(0,0,0,0,0) → 0	(1,0,0,0,0) → 0	(0,1,0,0,0) → 3	(2,0,0,0,0) → 0
(0,2,0,0,0) → 0	(0,1,2,0,0) → 3	(0,2,1,0,0) → 3	(0,3,0,0,0) → 2
(3,0,0,0,0) → 0	(0,2,1,2,0) → 0	(0,3,3,3,0) → 0	(0,2,2,0,0) → 2
(0,2,2,2,0) → 1	(0,2,3,0,0) → 0	(0,3,2,0,0) → 0	(0,2,0,2,0) → 0
(0,3,3,3,3) → 0	(0,3,3,0,0) → 0	(2,2,0,0,0) → 2	(1,2,0,0,0) → 0
(2,2,1,2,0) → 0	(0,1,1,1,0) → 0	(4,0,0,0,0) → 4	(0,4,0,0,0) → 0
(4,4,0,0,0) → 4	(4,4,0,4,0) → 4	(0,4,2,4,0) → 0	(0,4,4,4,2) → 0
(0,4,4,4,3) → 3	(0,3,2,2,0) → 0	(3,4,4,4,0) → 0	(0,2,3,2,0) → 0
(0,4,2,4,2) → 0	(0,4,3,4,2) → 1	(4,1,0,0,0) → 4	(2,1,0,2,0) → 3
(1,4,2,4,0) → 2	(0,4,3,4,0) → 2	(2,4,0,4,0) → 0	(3,2,0,0,0) → 2
(2,3,0,0,0) → 1	(4,2,0,0,0) → 4	(3,2,0,2,0) → 2	(2,4,3,4,0) → 2
(0,4,0,4,0) → 0	(2,2,2,2,1) → 2	(2,4,2,4,0) → 0	(0,3,3,3,2) → 4
(2,0,2,0,2) → 4	(4,2,2,2,0) → 4	(2,4,0,0,0) → 0	(0,2,2,2,2) → 1
(0,1,1,1,4) → 3	(0,3,0,4,0) → 0	(0,2,4,0,0) → 0	(0,4,2,0,0) → 0
(3,4,0,0,0) → 2	(4,3,0,0,0) → 2	(0,4,4,4,0) → 0	(0,2,2,2,4) → 1
(4,2,4,2,0) → 4	(4,1,1,1,4) → 3	(1,4,0,0,0) → 0	(0,2,2,4,0) → 0
(0,4,2,2,0) → 0	(0,2,1,2,2) → 0	(0,4,0,2,0) → 0	(0,1,0,2,0) → 0
(0,3,0,3,0) → 0			

表 3: Rules of the 5-state Euclidean CA E

(0,0,0,0,0) → 0	(1,1,0,0,0) → 1	(0,1,0,0,0) → 0	(1,1,0,1,0) → 1
(1,0,0,0,0) → 1	(0,0,2,0,1) → 1	(2,0,1,0,0) → 0	(1,0,1,0,2) → 2
(0,0,0,2,0) → 0	(0,0,3,1,0) → 0	(0,1,3,0,0) → 0	(3,0,1,1,0) → 3
(1,1,1,1,1) → 1	(1,1,3,1,3) → 1	(0,0,3,2,0) → 0	(0,2,3,0,0) → 0
(1,3,1,3,2) → 4	(3,0,1,4,0) → 4	(3,4,1,0,0) → 4	(1,1,1,1,4) → 1
(4,3,1,3,0) → 4	(0,0,3,0,0) → 0	(0,0,4,0,1) → 1	(1,0,4,0,1) → 1
(4,0,1,4,0) → 3	(4,4,1,0,0) → 3	(0,0,4,0,0) → 0	(0,1,4,0,0) → 0
(0,4,1,0,0) → 0	(4,4,1,4,1) → 4	(1,1,3,1,4) → 4	(3,0,4,4,0) → 3
(4,3,1,3,1) → 4	(1,4,1,4,4) → 3	(1,4,1,4,2) → 2	(2,4,1,4,4) → 0
(4,1,4,2,3) → 1	(4,2,4,1,3) → 1	(4,3,2,3,1) → 1	(3,0,0,2,1) → 3
(3,2,0,0,1) → 3	(1,1,3,0,3) → 1	(2,3,1,3,0) → 0	(0,1,2,1,1) → 1
(3,0,0,0,1) → 3	(1,1,0,1,1) → 1	(0,3,2,3,1) → 1	(1,1,1,0,2) → 3
(0,0,3,0,1) → 3	(1,1,0,3,0) → 1	(3,1,1,0,3) → 3	(3,0,3,0,1) → 3
(1,0,2,0,3) → 2	(3,1,2,0,3) → 2	(2,0,0,0,3) → 0	(2,1,0,0,3) → 0
(3,0,2,0,1) → 1	(0,2,1,0,1) → 1	(1,1,2,0,1) → 3	(3,1,3,0,1) → 3
(3,1,3,0,2) → 2	(2,1,3,0,0) → 0	(0,0,0,1,1) → 0	(1,2,1,0,1) → 3
(0,0,0,1,2) → 0	(0,2,1,0,0) → 0	(3,0,1,0,1) → 3	(3,3,1,0,1) → 3
(3,3,2,0,1) → 2	(0,1,1,0,2) → 1	(1,1,1,0,0) → 1	(1,3,1,0,1) → 1
(1,3,1,0,2) → 4	(1,1,1,0,4) → 4	(4,3,1,0,0) → 1	(1,1,3,4,4) → 2
(4,0,1,1,0) → 3	(1,3,1,0,4) → 1	(4,1,1,0,1) → 0	(1,4,4,0,1) → 1
(1,3,0,0,1) → 1	(1,3,1,0,0) → 1	(1,3,2,0,1) → 4	(1,1,4,0,1) → 4
(4,3,0,0,1) → 1	(1,3,4,0,1) → 1	(1,4,1,0,4) → 1	(1,1,4,4,3) → 2
(1,1,1,1,3) → 1	(1,1,4,3,1) → 2	(0,4,0,0,3) → 0	(1,1,4,2,0) → 1
(2,1,1,3,1) → 0	(1,4,1,0,2) → 1	(3,2,0,0,0) → 3	(0,1,1,3,2) → 1
(3,0,0,0,0) → 3	(1,1,1,3,0) → 1	(4,1,1,3,1) → 3	(3,4,0,0,0) → 3
(1,1,3,3,0) → 1	(1,3,1,0,3) → 2	(3,3,0,0,0) → 3	(3,1,1,3,1) → 0
(0,1,2,3,1) → 1	(1,1,0,3,1) → 1	(0,3,2,0,1) → 1	(1,1,3,4,3) → 2
(1,2,1,3,1) → 2	(2,0,1,3,1) → 0	(0,1,2,3,2) → 1	(1,3,1,2,0) → 2
(0,3,2,1,0) → 1	(1,3,0,2,1) → 2	(0,3,0,1,2) → 1	

表 4: Additional rules for the 5-state hyperbolic CA H_2

(3,1,3,0,0) → 3	(3,3,3,0,0) → 3	(3,3,1,0,0) → 3	(3,3,4,0,0) → 4
(3,4,3,0,0) → 4	(4,4,3,0,0) → 3	(4,3,4,0,0) → 3	(4,3,3,0,0) → 3
(1,4,4,0,0) → 3	(4,4,4,0,0) → 3	(3,2,3,1,4) → 1	(3,2,4,1,3) → 1
(3,1,3,4,3) → 0	(3,3,3,1,4) → 1	(3,3,4,1,3) → 1	(1,1,3,3,3) → 2
(4,3,3,1,3) → 1	(1,0,4,1,4) → 1	(1,1,0,0,4) → 3	(1,1,4,0,0) → 3
(1,4,3,0,0) → 3	(1,4,0,0,3) → 3	(4,1,4,1,1) → 1	(4,1,1,1,4) → 1
(1,1,4,1,4) → 1	(3,2,0,0,4) → 3	(3,2,4,0,0) → 3	(3,2,3,0,0) → 3
(1,3,3,0,0) → 3	(3,2,0,0,3) → 3	(2,4,1,0,0) → 0	(4,2,1,0,0) → 3
(0,3,2,4,1) → 1			