

## ある von Neumann 環に対する $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間について

新潟大学大学院 自然科学研究科 長谷川 敦史 (Atsushi Hasegawa)  
 Graduate School of Science and Technology, Niigata University

### 1. 序論

$\mathbb{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| = 1\}$  とし,  $L^2(\mathbb{T}^2)$  を  $\mathbb{T}^2$  上のルベグ空間,  $H^2(\mathbb{T}^2)$  を  $\mathbb{T}^2$  上のハーディ空間とする.

$L^2(\mathbb{T}^2)$  の閉部分空間  $\mathfrak{M}$  が不変とは

$$z\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M},$$

$$w\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

を満たすときいう.

$L^2(\mathbb{T}^2)$  の不変部分空間の研究においてはこれまでに多くの結果が知られている (cf. [2],[3],[5],[6], [7],[8], etc.). 例えば 1988 年に Mandrekar[6] は  $H^2(\mathbb{T}^2)$  の不変部分空間の特徴づけ, いわゆる Beurling 型不変部分空間になるための必要十分条件を与え, 同年 Ghatage と Mandrekar[3] は  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の不変部分空間の構造定理を与えた. 1993 年には Gasper と Suciu[2] が  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の不変部分空間を 3つの形に分類した. この論文では設定を変えて, ある von Neumann 環を考え, それに対する  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の不変部分空間の構造について, 今まで知られている結果を対比しながら述べていく.

次の節ではこの論文の主役となる左 von Neumann 環と右 von Neumann 環について定義し, その基本的な性質を述べる. 第 3 節では左不変という概念を導入し,  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の Beurling 型左不変部分空間の特徴づけを与える. 第 4 節では両側不変, 両側 pure, 両側 full という概念を導入し,  $L^2(\mathbb{T}^2)$  両側不変な部分空間は両側 pure でかつ両側 full であることを示す. 第 5 節では非自明な両側不変な部分空間と, ある可換な isometry の pair に関する Popovici 分解を考え, その pair が弱 bi-shift であることを証明する.

### 2. 導入

$\theta$  を  $(0, 1)$  内の無理数とし, 以下を満たすような  $L^2(\mathbb{T}^2)$  上のユニタリー作用素を考える.

$$L_z(z^m w^n) = z^{m+1} w^n,$$

$$L_w(z^m w^n) = e^{-2\pi i m \theta} z^m w^{n+1},$$

$$R_z(z^m w^n) = e^{-2\pi i n \theta} z^{m+1} w^n,$$

$$R_w(z^m w^n) = z^m w^{n+1}.$$

このとき

$$\begin{aligned}
 L_z L_w(z^m w^n) &= L_z(e^{-2\pi i m \theta} z^m w^{n+1}) \\
 &= e^{-2\pi i m \theta} z^{m+1} w^{n+1} \\
 &= e^{2\pi i \theta} e^{-2\pi i(m+1)\theta} z^{m+1} w^{n+1} \\
 &= e^{2\pi i \theta} L_w(z^{m+1} w^n) \\
 &= e^{2\pi i \theta} L_w L_z(z^m w^n)
 \end{aligned}$$

より

$$L_z L_w = e^{2\pi i \theta} L_w L_z$$

同様に

$$R_w R_z = e^{2\pi i \theta} R_z R_w.$$

$\mathfrak{L}$  を  $L_z$  と  $L_w$  により生成された von Neumann 環,  $\mathfrak{R}$  を  $R_z$  と  $R_w$  により生成された von Neumann 環とする.

$\forall A \in \mathfrak{L}$  に対して  $JA1 = A^*1$  とすると,  $J$  は  $L^2(\mathbb{T}^2)$  から  $L^2(\mathbb{T}^2)$  への conjugate linear isometry で

$$J(z^m w^n) = e^{-2\pi i m n \theta} z^{-m} w^{-n}$$

を満たす.

従って  $JL_w J = R_w^*$  が成り立ち, 同様に  $JL_z J = R_z^*$ . 更に,  $J\mathfrak{L}J = \mathfrak{R}$ ,  $J\mathfrak{R}'J = \mathfrak{L}$  などが成り立つ. 但し,  $\mathfrak{L}'$  は  $\mathfrak{L}$  の commutant を表す.

$\forall A \in \mathfrak{L}$  に対して  $\tau(A) = \langle A1, 1 \rangle$  とすると  $\tau$  は  $\mathfrak{L}$  上の唯一つの normal finite tracial state になる. 以上のことにより次の命題が成り立つ.

**命題 1**  $\mathfrak{L}$  は  $\text{II}_1$ -factor であり,  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}'$ ,  $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}'$  が成り立つ.

従って  $\mathfrak{L}$  と  $\mathfrak{R}$  をそれぞれ左 von Neumann 環, 右 von Neumann 環と呼ぶことにする.

一般にヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上のユニタリー作用素  $U$  と  $V$  が

$$UV = e^{2\pi i \theta} VU$$

を満たしているとする,  $U$  と  $V$  によって生成された  $C^*$ -環  $C^*(U, V)$  は irrational rotation  $C^*$ -環と呼ばれる.  $\mathfrak{A}_\theta = C^*(U, V)$  とすると次が成り立つ.

定理2 (Han [4])  $\mathfrak{A}_\theta$  は  $\pi(U) = L_z, \pi(V) = L_w$  を満たす  $*$ -isomorphism  $\pi$  によって  $L^2(\mathbb{T}^2)$  上の von Neumann 環  $\mathfrak{L}$  に表現できる.

3.  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の Beurling 型不変部分空間  $\mathfrak{L}_+$  (resp.  $\mathfrak{R}_+$ ) を  $L_z$  と  $L_w$  (resp.  $R_z$  と  $R_w$ ) で生成された  $\mathfrak{L}$  (resp.  $\mathfrak{R}$ ) の  $\sigma$ -弱閉部分環とする.

$L^2(\mathbb{T}^2)$  の閉部分空間  $\mathfrak{M}$  に対して

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}: \text{左不変} &\Leftrightarrow \mathfrak{L}_+ \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \\ &(\Leftrightarrow L_z \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, L_w \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

と定義する. 更に  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の左不変部分空間  $\mathfrak{M}$  に対して, それぞれ

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}: \text{left-reducing} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{L} \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \\ &(\Leftrightarrow \text{ある射影作用素 } P \in \mathfrak{R} \text{ が存在して } \mathfrak{M} = P L^2(\mathbb{T}^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}: \text{left-pure} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{m,n \geq 0} L_z^m L_w^n \mathfrak{M} = \{0\} \\ &(\Leftrightarrow \mathfrak{M} \text{ が } \{0\} \text{ 以外の left-reducing 部分空間を含まない}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}: \text{left-full} \\ &\Leftrightarrow \overline{\bigcup_{m,n < 0} L_z^m L_w^n \mathfrak{M}} = L^2(\mathbb{T}^2) \\ &(\Leftrightarrow \mathfrak{M} \text{ を含む最小の left-reducing 部分空間が } L^2(\mathbb{T}^2) \text{ である}) \end{aligned}$$

と定義する. 右不変などについても同様に定義される.

ここでも  $\theta = 0$  だとすると, 左または右不変部分空間は普通の意味の不変部分空間に, つまり

$$z \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \quad w \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

となる.

$L^2(\mathbb{T}^2)$  の閉部分空間  $\mathfrak{F}$  が wandering 部分空間であるとは, 異なる任意の非負な整数の組  $(m, n)$  と  $(m', n')$  に対して

$$L_z^m L_w^n \mathfrak{F} \perp L_z^{m'} L_w^{n'} \mathfrak{F}$$

であるとき言う.

**補助定理 3**  $\mathfrak{M}$  を  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の左不変部分空間とし,

$$\begin{aligned} V_z &= L_z|_{\mathfrak{M}}, V_w = L_w|_{\mathfrak{M}}, \\ \mathfrak{F}_z &= \mathfrak{M} \ominus V_z \mathfrak{M}, \mathfrak{F}_w = \mathfrak{M} \ominus V_w \mathfrak{M} \end{aligned}$$

としたとき, 次は同値である.

(1) ある wandering 部分空間  $\mathfrak{F}$  が存在して

$$\mathfrak{M} = \sum_{m,n \geq 0} \oplus V_z^m V_w^n \mathfrak{F}.$$

(2)  $V_z$  と  $V_w$  が  $\mathfrak{M}$  上シフト作用素で

$$V_w V_z^* = e^{2\pi i \theta} V_z^* V_w.$$

(3)  $\mathfrak{F}_z \cap \mathfrak{F}_w$  が wandering 部分空間かつ

$$\mathfrak{M} = \sum_{m,n \geq 0} \oplus V_z^m V_w^n (\mathfrak{F}_z \cap \mathfrak{F}_w).$$

実際は  $\dim(\mathfrak{F}_z \cap \mathfrak{F}_w) = 1$ .

**定理 4**  $\mathfrak{M}$  を  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の左不変部分空間とする. このとき

$$\mathfrak{M} = V H^2(\mathbb{T}^2)$$

( $V$  は  $\mathfrak{M}$  のユニタリー作用素) の形になるための必要かつ十分条件は

$$V_w V_z^* = e^{2\pi i \theta} V_z^* V_w$$

を満たし,  $V_z, V_w$  が  $\mathfrak{M}$  上シフト作用素になることである. 但し  $V_z = L_z|_{\mathfrak{M}}, V_w = L_w|_{\mathfrak{M}}$ .

(略証) 必要性については  $[V1]$  が wandering 部分空間であることと,

$$V H^2(\mathbb{T}^2) = \sum_{m,n \geq 0} \oplus V_z^m V_w^n [V1]$$

と表せること, 補助定理 3 の (1)  $\Rightarrow$  (2) より  $V_w V_z^* = e^{2\pi i \theta} V_z^* V_w$  が示される.

十分性については, 補助定理 3 の (2)  $\Rightarrow$  (3) より

$$\mathfrak{M} = \sum_{m,n \geq 0} \oplus V_z^m V_w^n (\mathfrak{F}_z \cap \mathfrak{F}_w)$$

と表せ, そこで  $\dim(\mathfrak{F}_z \cap \mathfrak{F}_w) = 1$  より, 十分性が証明される (略証終).

注5 (Mandrekar [6])  $\mathfrak{M}$  を  $L^2(\mathbb{T}^2)$  上の不変部分空間とする. このとき

$$\mathfrak{M} = qH^2(\mathbb{T}^2)$$

( $q$  は unimodular function) の形になるための必要かつ十分条件は

$$V_w V_z^* = V_z^* V_w$$

を満たし,  $V_z, V_w$  が  $\mathfrak{M}$  上シフト作用素になることである. 但し  $V_z = L_z|_{\mathfrak{M}}, V_w = L_w|_{\mathfrak{M}}$ .

#### 4. $L^2(\mathbb{T}^2)$ の両側不変部分空間

次に  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の閉部分空間  $\mathfrak{M}$  が左不変でかつ右不変であるとき両側不変であるという. 同様に両側 reducing, 両側 pure, 両側 full も定義される. このとき次の補助定理が成り立つ.

**補助定理6**  $\mathfrak{M}$  が  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の right-reducing な左不変部分空間であるか, または left-reducing な右不変部分空間であるとする. このとき  $\mathfrak{M}$  は  $\{0\}$  か又は  $L^2(\mathbb{T}^2)$  全体である.

(証明)  $\mathfrak{M}$  を  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の right-reducing な左不変部分空間とし,  $P$  を  $\mathfrak{M}$  上への射影作用素とする.

そのとき  $\mathfrak{M}$  は right-reducing なので,

$$\begin{aligned} R_z P L^2(\mathbb{T}^2) &= R_z \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{M} \\ &= P L^2(\mathbb{T}^2) \\ &= P R_z L^2(\mathbb{T}^2) \end{aligned}$$

より

$$R_z P = P R_z$$

が成り立ち, 同様に

$$R_w P = P R_w$$

が成り立つので,  $P \in \mathfrak{M}' = \mathcal{L}$  である.

$\mathfrak{M}$  は左不変なので,

$$\begin{aligned} L_z P L_z^* L^2(\mathbb{T}^2) &= L_z P L^2(\mathbb{T}^2) \\ &= L_z \mathfrak{M} \\ &\subset \mathfrak{M} \\ &= P L^2(\mathbb{T}^2), \end{aligned}$$

が成り立ち, また

$$\begin{aligned}(L_z P)(L_z P)^* &= L_z P L_z^* \\ (L_z P)^*(L_z P) &= P\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$P \sim L_z P L_z^* \leq P$$

がわかる. そこで  $\mathcal{L}$  は  $\text{II}_1$ -factor なので,

$$L_z P L_z^* = P$$

つまり

$$L_z P = P L_z$$

が成り立つ. 同様に

$$L_w P = P L_w$$

が成り立つので  $P \in \mathcal{L}'$  である.

よって  $P$  は  $\mathcal{L}$  の center に含まれ,  $\mathcal{L}$  は factor であるから  $P$  は 0 または 1 である. 即ち  $\mathfrak{M}$  は  $\{0\}$  か又は  $L^2(\mathbb{T}^2)$  全体である (証明終).

注 7  $\theta = 0$  の場合は, 補助定理の仮定は「 $\mathfrak{M}$  が reducing」となり, このときは  $\mathfrak{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^2)$  という形になる.

補助定理 6 より次の定理が成り立つ.

**定理 8** 非自明な  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の両側不変部分空間は両側 pure であり両側 full である.

(証明)  $\mathfrak{M}$  を非自明な  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の両側不変部分空間とする.

$$\mathfrak{M}_\infty = \bigcap_{m,n \geq 0} L_z^m L_w^n \mathfrak{M}$$

と置き,  $P_\infty$  を  $L^2(\mathbb{T}^2)$  から  $\mathfrak{M}_\infty$  上への射影作用素とする. そのとき  $P_\infty \neq I$  であり  $\mathfrak{M}_\infty$  が left-redecing な右不変であることが示される. 補助定理 6 により

$$\mathfrak{M}_\infty = \{0\}$$

がわかり, 即ち  $\mathfrak{M}$  は left-pure となる. right-pure についても同様に,  $L^2(\mathbb{T}^2)$  から

$$\bigcap_{m,n \geq 0} R_z^m R_w^n \mathfrak{M}$$

への射影作用素を考えることにより示される.

更に left-full と right-full についてもそれぞれ

$$\frac{\bigcup_{m,n < 0} L_z^m L_w^n \mathfrak{M}}{\bigcup_{m,n < 0} R_z^m R_w^n \mathfrak{M}}$$

への射影作用素を考えることにより示される (証明終).

注 9  $\theta = 0$  の場合は,  $\mathfrak{M}$  が非自明な reducing 部分空間のときは仮定を満たすが,  $\mathfrak{M}$  は pure でもなく full でもない.

### 5. Popovici 分解

最後に  $\mathfrak{M}$  を非自明な  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の両側不変部分空間とする.

$$U = (L_z L_w)|_{\mathfrak{M}},$$

$$V = (R_z R_w)|_{\mathfrak{M}}$$

と定義すると, これらは

$$UV = VU$$

を満たす. また,  $\mathfrak{M}$  が両側不変なので  $U, V$ -不変でもあることに注意する. そこで isometry の組  $W = (U, V)$  に関する  $\mathfrak{M}$  の Popovici 分解

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{uu} \oplus \mathfrak{M}_{us} \oplus \mathfrak{M}_{su} \oplus \mathfrak{M}_{ws}$$

を考える. 但し,

$\mathfrak{M}_{uu}$  上では  $U$  と  $V$  はユニタリー作用素,

$\mathfrak{M}_{us}$  上では  $U$  はユニタリー作用素で  $V$  はシフト作用素,

$\mathfrak{M}_{su}$  上では  $U$  はシフト作用素で  $V$  はユニタリー作用素,

$W|_{\mathfrak{M}_{ws}}$  は弱 bi-shift ( $U|_{\cap_{i \geq 0} \text{Ker } V^* U^i}$ ,  $V|_{\cap_{j \geq 0} \text{Ker } U^* V^j}$ ,  $(UV)|_{\mathfrak{M}_{ws}}$  がすべてシフト作用素).

定理 10  $\mathfrak{M}$  を非自明な  $L^2(\mathbb{T}^2)$  の両側不変部分空間としたとき,  $W = (U, V)$  は  $\mathfrak{M}$  上で弱 bi-shift になる. 即ち  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{ws}$ .

(証明)  $\mathfrak{M}_{uu}$  は両側不変なので補助定理 6 より  $\mathfrak{M}_{uu} = \{0\}$  であることがわかる.  $\mathfrak{M}$  は左不変であるので,  $\mathfrak{M}$  の  $U$  に関する Wold 分解

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U^n \mathfrak{M} \oplus \sum_{n \geq 0} \oplus U^n (\mathfrak{M} \ominus U \mathfrak{M}),$$

を得る. そこで

$$\mathfrak{M}_u^U = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U^n \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_s^U = \sum_{n \geq 0} \oplus U^n (\mathfrak{M} \ominus U \mathfrak{M})$$

とおく. そのとき  $\mathfrak{M}_u^U$  が右不変であることがわかる.

次に, 任意の整数  $n$  に対し,

$$\begin{aligned} L_z(L_z L_w)^n &= L_z(e^{2\pi i \theta} L_w L_z)^n \\ &= e^{2\pi i n \theta} (L_z L_w)^n L_z \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\mathfrak{M}$  は両側不変であるので

$$\begin{aligned} L_z \mathfrak{M}_u^U &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L_z(L_z L_w)^n \mathfrak{M} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (L_z L_w)^n L_z \mathfrak{M} \\ &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (L_z L_w)^n \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{M}_u^U \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に

$$L_w \mathfrak{M}_u^U \subset \mathfrak{M}_u^U$$

が成り立つ. 一方, 任意の整数  $n$  に対し,

$$\begin{aligned} L_z^*(L_z L_w)^n &= L_z^*(L_z L_w)(L_z L_w)^{n-1} \\ &= L_w(L_z L_w)^{n-1}. \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} L_z^* \mathfrak{M}_u^U &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L_z^*(L_z L_w)^n \\ &= L_w \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (L_z L_w)^{n-1} \mathfrak{M} \\ &= L_w \mathfrak{M}_u^U \\ &\subset \mathfrak{M}_u^U \end{aligned}$$

が成り立つ. 更に任意の整数  $n$  に対し,

$$\begin{aligned} L_w^*(L_z L_w)^n &= L_w^*(L_z L_w)(L_z L_w)^{n-1} \\ &= L_w^*(\lambda^{-1} L_w L_z)(L_z L_w)^{n-1} \\ &= e^{-2\pi i \theta} L_z(L_z L_w)^{n-1} \end{aligned}$$



が成り立つので同様に

$$L_w^* \mathfrak{M}_u^U \subset \mathfrak{M}_u^U$$

がわかる. 以上より  $\mathfrak{M}_u^U$  は left-reducing な右不変部分空間であることが示された. よって補助定理 6 により,

$$\mathfrak{M}_u^U = \{0\}$$

となる. 同様に  $\mathfrak{M}$  の  $V$  に関する Wold 分解  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_u^V \oplus \mathfrak{M}_s^V$  を考えることにより,

$$\mathfrak{M}_u^V = \{0\}$$

が示される. また,

$$\mathfrak{M}_{us} \subset \mathfrak{M}_u^U \cap \mathfrak{M}_s^V, \quad \mathfrak{M}_{su} \subset \mathfrak{M}_s^U \cap \mathfrak{M}_u^V.$$

であるから, 従って

$$\mathfrak{M}_{uu} \oplus \mathfrak{M}_{us} \oplus \mathfrak{M}_{su} = \{0\}$$

となり, 以上より

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{ws}$$

が示された (証明終).

## 参考文献

- [1] K. R. Davidson, *C\*-Algebras by example*. The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences 6, Amer. Math. Soc. (1996).
- [2] D. Gaspar and N. Suciu, *On invariant subspaces in the bitorus*. J. Operator Theory, **30** (1993), 227-241.
- [3] P. Ghatage and V. Manderkar, *On Beurling type invariant subspaces of  $L^2(\mathbb{T}^2)$  and their equivalence*. J. Operator Theory, **20** (1988), 31-38.
- [4] D. Han, *Wandering vectors for irrational rotation unitary systems*. Trans. Amer. Math. Soc, **350** (1998), 309-320.
- [5] G. Ji, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Certain invariant subspace structure of  $L^2(\mathbb{T}^2)$* . Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2361-2368.

- [6] R. Mandrekar, *The validity of Beurling theorems in polidisc*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 145-148.
- [7] T. Nakazi, *Certain invariant subspaces of  $H^2$  and  $L^2$  on a bidisc*. Canadian J. Math. **40** (1988), 1722-1280.
- [8] T. Nakazi, *Invariant subspaces in the bidisc and commutators*. J. Austral. Math. Soc. **56** (1994), 232-242.
- [9] D. Popovici, *A Wold-type decomposition for commuting isometric pairs*. Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2303-2314.