

The link among classical, quantum and combinatorial integrable dynamical systems

京都大学数理解析研究所 井上 玲 (Rei Inoue)
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University

1 はじめに

1.1 可積分系と R 行列

可積分性とは、もともと古典力学系に対して考えられた概念で、系が十分な数の独立な保存量を持ち初期値問題が解けるという性質である。非線形方程式の中にはこの性質がソリトン解を持つなどの強い性質として現れるものがあり、それらはソリトン方程式と呼ばれている。可積分系の持つ高い対称性はその背後にある数理解析構造によって説明できることが知られている(日本語の解説は [1,2] など)。その際に重要な役割を果たすのが Lax 行列を用いた系の記述で、Lax 行列がよい代数構造を持つことと可積分性には密接な関係がある。20 世紀の半ば、この考え方は量子力学や統計力学の世界に広げられた [3]。頂点模型や基本的な電子系のモデルを Lax 行列を使って記述し、その代数構造を調べてモデルを解く方法は現在もさかんに研究されている。

古典、量子系に対して構成された Lax 行列のよい代数構造を特徴付け、Lie 環に結びつけるものが R 行列で、それぞれ古典 R 行列、量子 R 行列と呼ばれている。Lie 環 \mathfrak{g} に付随する量子群を $U'_q(\mathfrak{g})$ とすると、量子 R 行列は、Yang-Baxter 方程式と呼ばれる代数関係式の解で $U'_q(\mathfrak{g})$ の作用と可換なものとして定義される [4]。古典 R 行列は、この構造の古典極限 ($q \rightarrow 1$) に対応する。

あるセルオートマトンが可積分系に仲間入りしたのは 1990 年代である。それは箱玉系と呼ばれ、一次元格子に並んだ箱の中に配置した n 種類の玉を単純な規則に従って時間発展させるもので、玉の連なりがソリトンのように振舞うという性質を持つ [5]。その後の研究によって箱玉系が可積分である理由が明らかになってきた。まず、箱玉系の発展方程式が、差分ソリトン方程式の一つである差分 KP 方程式の超離散極限 ($\epsilon \rightarrow 0$) で得られることが分かり [6]、続いて時間発展の規則が組み合わせ R 行列で記述できることが示された [7,8]。この R 行列は、量子群 $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶極限 ($q \rightarrow 0$) の表現論である $A_n^{(1)}$ 型クリスタルの理論で現れる。以上のような特徴からこの箱玉系を $A_n^{(1)}$ 型箱玉系と呼ぶ。箱玉系は、その後すぐにクリスタルの理論に基づいて拡張され、非例外型の Lie 環に対して構成された [9]。また最近では、差分ソリトン方程式の対称性を記述するものとして幾何ク

リスタルに作用するトロピカル R 行列が議論されている。本稿ではこの話題には立ち入らないが、詳しくは文献を参照されたい [10, 11]。

これまでに登場した 4 種類の R 行列と模型たちの関係は下図のようにまとめられ、特に R 行列はパラメーターの極限操作で互いに関連している。我々はモデルどうしの間にも同様な結びつきがあることを期待する。そして、差分ソリトン方程式と箱玉系が発展方程式の超離散極限によって結ばれていたように、モデルに固有なレベルで g 型箱玉系と結ばれるものたちは何か、という問題を考える。

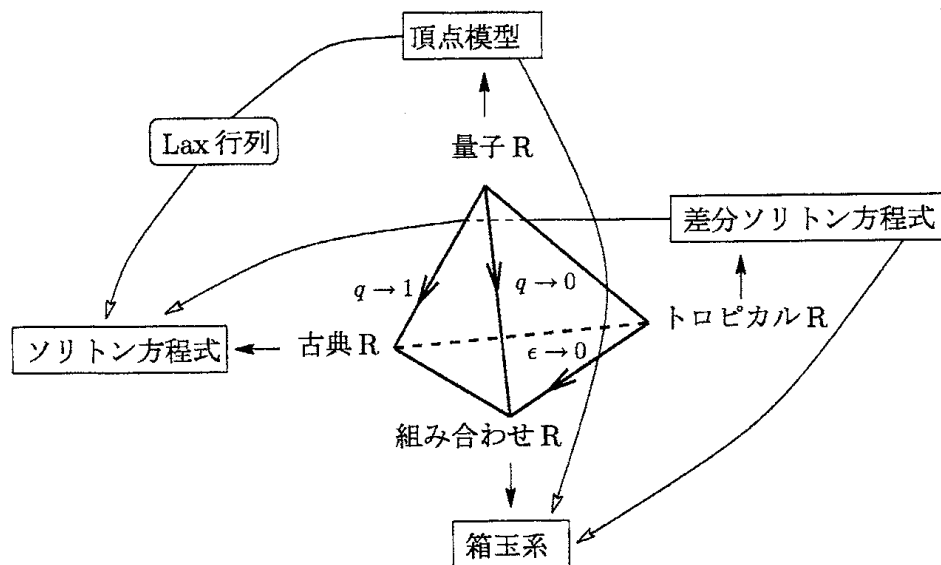


図1 4つの R 行列と模型の関係

1.2 これから議論すること

現在のところ、先の問題に対する答えが図1全体として見えてきているのは $g = A_{n-1}^{(1)}$ の場合だけで、その他の場合については部分的にしか分かっていない。本稿では図の四面体左側面、箱玉系 - 頂点模型 - ソリトン方程式の関係に注目し、この関係を Lax 行列の視点から解説する。まず $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合の量子 Lax 行列を 2 章で構成し、この量子模型と箱玉系との関係を 3 章で、ソリトン方程式との関係を 4 章で紹介する。5 章では、 $D_n^{(1)}$ 型の場合に関して現時点で分かっていることを紹介する。2、3 章と 5 章は [12]、4 章は [13] に基づいた内容である。

謝辞

本稿の主要部分は筆者が関わった論文 [12, 13] に基づいています。多くの助言を頂いた国場敦夫先生をはじめ共同研究者の方々に深く感謝致します。また、研究集会“Combinatorial Aspect of Integrable Systems”で講演の場を与えて下さった尾角正人先生にお礼申し上げます。

2 量子 Lax 行列

まず記号の準備をする。 $A_{n-1}^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環に対し、量子群 $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ を考える。 $|q| < 1$ とし、スペクトルパラメータを $z \in \mathbb{C}$ とする。 $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ のベクトル表現を $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}v_i$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。量子 R 行列 $R(z) \in \text{End}(V \otimes V)$ は Yang-Baxter 方程式の三角関数解で、行列 $E_{ij} \in \text{End}(V)$, $E_{ij}v_k = \delta_{j,k}v_i$ を使って

$$R(z) = a(z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + b(z) \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj} + c(z) \left(z \sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) E_{ji} \otimes E_{ij}, \quad (2.1)$$

$$a(z) = 1 - q^2 z, \quad b(z) = q(1 - z), \quad c(z) = 1 - q^2$$

と表される。Weyl 代数 \mathcal{W} を演算子 $P_i, P_i^{-1}, Q_i, Q_i^{-1}$, $i \in I \setminus \{n\}$ と関係式

$$\begin{aligned} Q_i Q_j &= Q_j Q_i, & P_i P_j &= P_j P_i, & P_i Q_j &= q^{\delta_{ij}} Q_j P_i, \\ Q_i Q_i^{-1} &= Q_i^{-1} Q_i = 1, & P_i P_i^{-1} &= P_i^{-1} P_i = 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

で生成される代数とする。パラメーター $a_i \in \mathbb{C}$ を導入し、

$$P_i, Q_i, R_i = Q_i^{-1}(1 - a_i P_i^2), P_i' = -a_i q P_i, \quad i \in I \setminus \{n\}$$

で生成される \mathcal{W} の部分代数を \mathcal{A} とする。

Definition 2.1 量子 Lax 行列 $L(z) = (L(z)_{ij})_{i,j \in I} \in \mathcal{A} \otimes \text{End}(V)$ を次のように定義する;

$$L(z)_{ii} = \begin{cases} z P_i' & i < n \\ P_{1,n-1} & i = n \end{cases}, \quad L(z)_{ij} = \begin{cases} z R_i P_{i+1,j-1} Q_j & i < j < n \\ z R_i P_{i+1,n-1} & i < j = n \\ P_{1,j-1} Q_j & j < i = n \\ 0 & j < i < n, \end{cases} \quad (2.3)$$

ただし $i < j$ に対し $P_{i,j} = P_i P_{i+1} \cdots P_j$ とする。

この Lax 行列は次の二つの性質を持つ;

Proposition 2.2 Lax 行列(2.3) と量子 R 行列(2.1) は次の代数関係式を満たす;

$$R(z_2/z_1) \overset{2}{L}(z_2) \overset{1}{L}(z_1) = \overset{1}{L}(z_1) \overset{2}{L}(z_2) R(z_2/z_1) \in \mathcal{A} \otimes \text{End}(V \otimes V). \quad (2.4)$$

ここで $\overset{1}{L}(z) = L(z) \otimes \mathbb{1}_V$, $\overset{2}{L}(z) = \mathbb{1}_V \otimes L(z)$.

Proposition 2.3 Lax 行列は次のように因子化する;

$$L(z) = D(z) K_1 K_2 \cdots K_{n-1},$$

$$D(z) = \text{diag}(z, \dots, z, 1), \quad K_i \in \mathcal{A}_i \otimes \text{End}(V), \quad \mathcal{A}_i = \langle P_i, Q_i, R_i, P_i' \rangle.$$

Lax 行列の様子を小さい n の場合に見てみよう。

Example 2.4 $n = 2, 3$ の場合;

$$L(z) = \begin{pmatrix} zP_1' & zR_1 \\ Q_1 & P_1 \end{pmatrix} = \text{diag}(z, 1) \begin{pmatrix} P_1' & R_1 \\ Q_1 & P_1 \end{pmatrix},$$

$$L(z) = \begin{pmatrix} zP_1' & zR_1Q_2 & zR_1P_2 \\ 0 & zP_2' & zR_2 \\ Q_1 & P_1Q_2 & P_1P_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(z, z, 1) \begin{pmatrix} P_1' & 0 & R_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ Q_1 & 0 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2' & R_2 \\ 0 & Q_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

ここまで天下一的に Lax 行列を定義してその性質を見てきたが、Proposition 2.2 からこの Lax 行列がよい代数構造を持つことが分かり、何か可積分な模型の登場を期待させる。次の二つの章では、パラメーター a_i の値を特殊化したときにこの Lax 行列が興味深い模型を記述することを見る。まず $a_i = 1$ のとき、この Lax 行列から定義される頂点模型は R 行列(2.1) を無限回フュージョンして得られるものに一致する。この頂点模型の結晶極限が箱玉系である。また $a_i = 0$ のとき、この Lax 行列はあるソリトン方程式の Lax 行列になっている。

3 量子箱玉系

3.1 Lax 行列による頂点模型の記述

いったん 2 章の定義を忘れ、一般の \mathfrak{g} の場合に量子 Lax 行列から可積分な頂点模型を構成する方法を述べる。

$V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}v_i$ を $U_q(\mathfrak{g})$ のベクトル表現、 \mathcal{A} をある演算子代数 (operator algebra) とする。量子 Lax 行列 $L(z)$ は $\mathcal{A} \otimes \text{End}(V)$ の元で、量子 R 行列とともに代数関係式(2.4) を満たす

ものとする。あるベクトル空間 \mathcal{M} があり、 A の \mathcal{M} への作用が *well-defined* なとき、 $i, j \in I$ と \mathcal{M} の基底 x, y で指定される準位を辺に持つ頂点の Boltzmann ウェイト $W_{ij}[x|y](z)$

$$W_{ij}[x|y](z) = \begin{array}{c} i \\ | \\ x \text{---} \text{---} y \\ | \\ j \end{array}$$

を次のように定める;

$$L(z)(x \otimes v_i) = \sum_{j \in I} (L(z)_{ji}x) \otimes v_j = \sum_{j \in I} W_{ij}[x|y](z)y \otimes v_j. \quad (3.1)$$

Lax 行列が(2.4)を満たすことから、このような Boltzmann ウェイトを持つ頂点を縦に並べて構成した転送行列は、可換な保存量を生成することが分かる。

ここで2章の定義を思い出して $\mathfrak{g} = A_{n-1}^{(1)}$ の場合に戻ろう。

Definition 3.1 ベクトル空間 \mathcal{M} を次のように定義する;

$$\mathcal{M} = \bigoplus_x \mathbb{C}x, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}. \quad (3.2)$$

全ての $i \in I \setminus \{n\}$ に対して $a_i = 1$ のとき、 A の \mathcal{M} への作用を

$$\begin{aligned} P_i x &= q^{x_i} x, \\ Q_i x &= [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}], \\ R_i x &= (1 - q^{2x_i}) [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

と定義する ($a_i \neq 1$ のときには R_i の作用が *well-defined* にならないことに注意)。

こうして $a_i = 1$ のとき \mathcal{M} は A 加群になる。

以下、この3章では $a_i = 1$ の Lax 行列(2.3)で定義される頂点模型を考察する。この模型では、Boltzmann ウェイト $W_{ij}[x|y](z)$ がゼロでない辺の状態はウェイト保存条件; $x_k + \delta_{i,k} = y_k + \delta_{j,k}$, $k \in I \setminus \{n\}$ を満たしている。

3.2 フュージョン R 行列による構成

前小節で構成された頂点模型は $R(z)$ (2.1) を無限回フュージョンしたものに一致している。それを見てみよう。

ベクトル表現 V の m 次対称テンソルが与える既約 $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ 加群を $V_m (= V^{\otimes m} / \sim)$ とする。 $x = (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \text{ mod } \sim)$, $n \geq i_1 \geq \dots \geq i_m \geq 1$ は V_m の基底を成す。ここで

mod \sim によつて、テンソル積で隣り合う成分に対して関係式 $v_i \otimes v_j = qv_j \otimes v_i$, $i < j$ による同一視を入れる。 i_1, \dots, i_m に含まれる i の数を x_i と表し、 $x = [x_1, \dots, x_n]$ と書く。

フュージョン R 行列 $R^{(m,1)}(z) \in \text{End}(V^{\otimes m} \otimes V)$ は $R(z) = R_{1,2}(z)$ (2.1) から次のように構成する;

$$R^{(m,1)}(z) = \frac{R_{1,m+1}(zq^{m-1})R_{2,m+1}(zq^{m-3}) \cdots R_{m,m+1}(zq^{-m+1})}{a(zq^{m-3})a(zq^{m-5}) \cdots a(zq^{-m+1})}$$

ここで $R_{i,j}(z)$ は m 個のテンソル積のうち i 番目と j 番目の空間に作用する。この R 行列の作用は $\text{End}(V_m \otimes V)$ 上に制限できて

$$R^{(m,1)}(z)(x \otimes v_i) = \sum_{j \in I} w_{ij}[x|y](z)(y \otimes v_j),$$

$$w_{ij}[x|y](z) = \begin{cases} q^{m-x_j} - q^{x_j+1}z & i = j \\ (1 - q^{2x_j})q^{x_{j+1}+x_{j+2}+\cdots+x_{i-1}}z & i > j \\ (1 - q^{2x_j})q^{m-(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_j)} & i < j \end{cases} \quad (3.4)$$

となる。この $w_{ij}[x|y](z)$ が $V_m \otimes V$ 上に定義された頂点模型の Boltzmann ウェイトを与え、 $y = [y_1, \dots, y_n]$ は条件 $y_k = x_k + \delta_{i,k} - \delta_{j,k}$ から決まる。

ここで $m \rightarrow \infty$ の極限を「 x_1, \dots, x_{n-1} を有限に保ちながら $x_n \rightarrow \infty$ を取る」と定義すると、前小節で構成した模型に一致する;

$$W_{ij}[x|y] = \lim_{m \rightarrow \infty} w_{ij}[x|y].$$

実際、 $|q| < 1$ に注意して(3.4)の $m \rightarrow \infty$ 極限を計算すると

$$W_{ij}[x|y](z) = \begin{cases} -q^{x_j+1}z & i = j \neq n \\ q^{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}} & i = j = n \\ (1 - q^{2x_j})q^{x_{j+1}+x_{j+2}+\cdots+x_{i-1}}z & i > j \\ q^{x_1+\cdots+x_{i-1}} & i < j = n \end{cases} \quad (3.5)$$

となる。(3.3)の作用を参照しながら Lax 行列(2.3)と見比べるとこの一致がよく分かる。 x_n を落として $x = [x_1, \dots, x_{n-1}]$ と書けば、 $\lim_{m \rightarrow \infty} V_m$ の基底は $\mathcal{M}(3.2)$ の基底に一致する。

3.3 量子箱玉系

頂点模型(3.5)に次のような条件を課すと箱玉系の量子化に相当するセルオートマトンが得られる。頂点を横に並べ、十分遠方の境界近くの状態は $x = [0, \dots, 0]$ と $v_{j \pm \infty} = v_n$ しかないという境界条件を考える(下図参照)。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & n & \cdots & j_{k-1} & & j_k & & j_{k+1} & & j_{k+2} & \cdots & n \\
 [0, \dots, 0] & \downarrow & \cdots & \downarrow & \xrightarrow{k} & \downarrow & \xrightarrow{k+1} & \downarrow & \xrightarrow{k+2} & \downarrow & \cdots & \downarrow & [0, \dots, 0] \\
 & n & \cdots & j'_{k-1} & & j'_k & & j'_{k+1} & & j'_{k+2} & \cdots & n
 \end{array}$$

頂点縦方向の入力状態をまとめて形式的に

$$p = \cdots \otimes v_{j_k} \otimes v_{j_{k+1}} \otimes v_{j_{k+2}} \otimes \cdots = [[w_1, w_2, \dots, w_{n-1}]] \tag{3.6}$$

と書く。ただし $i \in I \setminus \{n\}$ に対しては $w_i = \#(p \text{ に含まれる } v_i) < \infty$ とする。このような p の線型結合が成す集合を

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_p c_p p \mid \exists N < \infty \text{ s.t. } \lim_{q \rightarrow 0} q^N \sum_p c_p = 0 \right\}$$

と表す。

Definition 3.2 この境界条件のもとで Lax 行列によって引き起こされる \mathcal{P} から \mathcal{P} への写像 $\mathcal{T}(z)$ を次のように書く;

$$\mathcal{T}(z) = (\cdots L(z)^k L(z)^{k+1} L(z)^{k+2} \cdots)_{0,0} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}. \tag{3.7}$$

すると、Proposition 2.3 と $L(z)$ のウエイト保存の性質から次のことが分かる;

Theorem 3.3 (i) $\mathcal{T}(z)$ は因子化する;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(z) &= \mathcal{D}(z) \mathcal{K}_1 \cdots \mathcal{K}_{n-1}, \\
 \mathcal{D}(z) &= (\cdots D(z)^k D(z)^{k+1} D(z)^{k+2} \cdots)_{0,0}, \quad \mathcal{K}(z) = (\cdots K_i^k K_i^{k+1} K_i^{k+2} \cdots)_{0,0}.
 \end{aligned}$$

(ii) 任意の状態 p (3.6) は $\mathcal{D}(z)$ の固有状態である、つまり $\mathcal{D}(z)p = z^{\sum_i w_i} p$ が成り立つ。さらに $\mathcal{T}(z)$ の作用は $\mathcal{T}(z)p = z^{\sum_i w_i} \mathcal{K}_1 \cdots \mathcal{K}_{n-1} p$ と書ける。

いよいよこの模型に箱と玉の解釈をつけるが、その際に Proposition 2.3 で現れた Lax 行列の因子 K_i ($i \in I \setminus \{n\}$) の役割が重要である。 $K_i \in \mathcal{A}_i \otimes \text{End}(V)$ の頂点への作用は次のようになる。上から順に、頂点に作用する \mathcal{A}_i の元、作用後の頂点、対応する Boltzmann ウエイト、を示す;

$$\begin{array}{ccccc}
 P_i & R_i & Q_i & P'_i & 1 \\
 n & n & i & i & j \\
 x_i \downarrow x_i & x_i \downarrow x_i - 1 & x_i \downarrow x_i + 1 & x_i \downarrow x_i & x_i \downarrow x_i \\
 n & i & n & i & j \\
 q^{x_i} & 1 - q^{2x_i} & 1 & -q^{x_i+1} & 1
 \end{array}$$

縦辺の $i \in I$ で決まる順位のうち、 n が「容量 1 の空箱」を、 $1, 2, \dots, n-1$ が $n-1$ 種類の「玉」を表し、横辺の $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が「運搬車」に積まれている i -玉の数とする。すると p (3.6) は十分多くの箱が並んでいる 1 次元格子に有限の玉が配置された状態、 $\mathcal{T}(x)$ (3.7) はその状態を時間発展させる運搬車とみなせる。この解釈によって K_i の作用は「運搬車に i -玉を積み下ろしする規則」に読み替えられ、Boltzmann ウェイトはその事象の遷移係数 (ウェイトが負の値になり得るので確率とは言えない) を表すことになる。こうして P_i 、 P_i' と 1 は「玉の積み下ろしを一切しない」、 Q_i は「箱の中の i -玉を運搬車に積む」、 R_i は「運搬車に i -玉があればその一つを空箱に下ろす」作業を実行する。 $\mathcal{T}(z)$ の中の K_i^k は k 番目の頂点に作用し、その結果 \mathcal{K}_i が全ての頂点の i 玉を動かすと解釈される。 $\mathcal{D}(z)$ は状態 p にある玉の数の合計を数え、ウェイト保存の性質は状態 p にある i -玉の数 w_i が $\mathcal{T}(z)$ の作用で不変であることを保証する。

こうして作った系は、次の性質を持つ。

Theorem 3.4 $\mathcal{T}(z)$ の作用は結晶極限 $q \rightarrow 0$ で $A_{n-1}^{(1)}$ 型箱玉系の時間発展のルールと一致する。

この定理が、我々がこの頂点模型を箱玉系の量子化と呼ぶ理由である。この意味を知るために結晶極限で何が起こるのか見てみよう。 K_i の作用後結晶極限を取ったときに生き残る頂点の寄与は

$$(x_i =) 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \downarrow n \end{array} 0 \quad (1 \leq) x_i \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \downarrow i \end{array} x_i - 1 \quad x_i \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \downarrow n \end{array} x_i + 1 \quad x_i \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \downarrow j \end{array} x_i$$

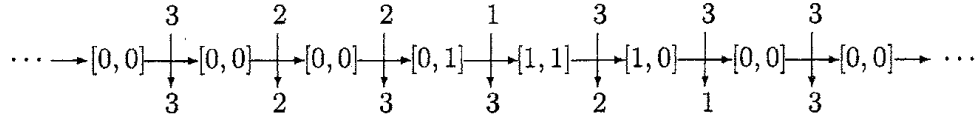
となり、Boltzmann ウェイトは全て 1 である。これらの頂点を調べると入力 $x \otimes v_i$ に対する出力はもはや重ね合わせの状態 $\sum_j W_{ij}[x|y]y \otimes v_j$ ではなく、ただ一つの寄与 $x' \otimes v_i$ になることがすぐに分かる。こうして、結晶極限における時間発展の規則は次のようになる；

- (i) まず $i = n-1$ から始める。
- (ii) i -玉を動かすとき、左からやってきた空の運搬車は箱に i -玉があれば積み、箱に i -玉が無くしかも運搬車に i -玉があるときには一つ下ろしながら右へ進む。
- (iii) 運搬車は、右端に到達したら (このとき運搬車が空になっているように条件 $w_i < \infty$ がある) そのまま左端に戻る。 $i > 1$ なら $i \mapsto i-1$ として (ii) に戻り、 $i = 1$ なら (iv) へ進む。
- (iv) 1-玉まで動かし終えた時点で 1 単位時間の発展が終了する。

この規則は $A_{n-1}^{(1)}$ 型箱玉系と一致する。

Example 3.5 $A_2^{(1)}$ 型量子箱玉系の例。 $\mathcal{T}(z)$ の作用によって、状態 $p = \dots \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes$

$v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes \dots$ が $p' = \dots \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 \otimes \dots$ へ遷移する様子は以下ようになる;



これは量子化されて初めて起こりうる遷移の一つで、遷移係数 $-z^3q(1-q^2)^2$ は結晶極限でゼロとなる (結晶極限では左から二つ目の遷移は起こらない)。同じ状態 p からの遷移のうち結晶極限で生き残るのは $\dots \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes v_2 \otimes v_1 \otimes \dots$ への遷移のみで、遷移係数は $z^3(1-q^4)(1-q^2)^2$ である。

Example 3.6 $A_2^{(1)}$ 型箱玉系の例 (空き箱に相当する 3 を \cdot で表すかまたは省略する);

$$\begin{array}{l} t=0: \cdot \cdot 2 \ 2 \ 1 \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \\ t=1: \cdot \cdot \cdot 2 \ 2 \ 1 \cdot 1 \cdot \\ t=2: \cdot \cdot \cdot 2 \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot \\ t=3: \cdot \cdot \cdot 2 \cdot \cdot \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot \cdot \\ t=4: \cdot \cdot \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot \end{array}$$

$A_{n-1}^{(1)}$ 型箱玉系では、一つのソリトンは $1, 2, \dots, n-1$ から成る非増加列で表され、ソリトンの速度はその列の長さに等しい。一般に、十分長い一次元格子上の量子箱玉系の時間発展は無数個の状態の重ね合わせになり、ソリトンの姿はその中に埋もれてしまう。

4 ソリトン方程式へ

4.1 Lax 行列の古典極限

Proposition 2.3 によると Lax 行列 $L(z)$ は因子化するが、Example 2.4 でも分かるように各々の因子 K_i は i によって形が違う。実は、 $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合には全ての因子が同じ形をしているような”一様な”因子化も出来る。この因子が次の小節でソリトン方程式に結び付く。

Lemma 4.1 Lax 行列(2.3) は次のように因子化する;

$$L(z) = l_1(z)l_2(z)\cdots l_{n-1}(z), \quad l_i(z) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & zP'_i & zR_i \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_i & P_i \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_i \otimes \text{End}(V). \quad (4.1)$$

そして代数関係式(2.4)はこの行列 $l_i(z)$ に対しても成り立つ;

$$R(z_2/z_1)l_i^2(z_2)l_i^1(z_1) = l_i^1(z_1)l_i^2(z_2)R(z_2/z_1) \in \mathcal{A}_i \otimes \text{End}(V \otimes V). \quad (4.2)$$

(行列 K_i に対して(2.4)は成立しないことに注意。)

量子 Lax 行列の古典極限 ($q \rightarrow 1$) を調べよう。Weyl 代数 \mathcal{W} の古典極限に相当する正準 Poisson 括弧代数 \mathcal{C} は可換な元 $P_i, P_i^{-1}, Q_i, Q_i^{-1}$, $i \in I \setminus \{n\}$ と関係式

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, Q_j\} = \delta_{i,j} P_i Q_i, \quad Q_i Q_i^{-1} = P_i P_i^{-1} = 1$$

で生成される。 $\mathcal{C}_i = \langle P_i^\pm, Q_i^\pm \rangle \subset \mathcal{C}$ とする。これらの関係式は(2.2)の古典極限に相当し、Poisson 括弧式を

$$\{a, b\} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\log |q|} [a, b]$$

と定義することによって得られる。量子 R 行列 $R(z)$ は古典 R 行列 $r(z)$ と関係

$$\frac{R(z)}{1-z} \sim 1 + \log |q| r(z)$$

で結び付いている。古典 Lax 行列 $L^d(z) \in \mathcal{C} \otimes \text{End}(V)$ と $l_i^d(z) \in \mathcal{C}_i \otimes \text{End}(V)$ をそれぞれ(2.3), (4.1)と同じ式で定義すると、(2.4)と(4.2)の古典極限として次が得られる;

Corollary 4.2 次の Poisson 括弧関係式が成立する;

$$\begin{aligned} \{L^d(z_1) \otimes L^d(z_2)\} &= [r(z_2/z_1), L^d(z_1) \otimes L^d(z_2)] \\ \{l_i^d(z_1) \otimes l_j^d(z_2)\} &= \delta_{i,j} [r(z_2/z_1), l_i^d(z_1) \otimes l_j^d(z_2)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし $\{A \otimes B\} = \{A \otimes \mathbb{1}_V, \mathbb{1}_V \otimes B\}$ とする。

以下、簡単のため行列 $l_i^d(z)$ を $l_i(z)$ と書く。

4.2 拡張された Lotka-Volterra 格子

Lax 行列 $L^d(z)$ が記述する古典力学系は何か? この問いに対する一つの答えが「拡張された Lotka-Volterra 格子 (Bogoyavlensky 格子とも呼ばれる)」である。このモデルは一次元格子上に置かれた力学変数 $V_k \equiv V_k(t) \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{Z}$) が満たす発展方程式で定義される;

$$\frac{dV_k}{dt} = 2V_k \sum_{i=1}^{n-1} (V_{k+i} - V_{k-i}). \quad (4.4)$$

周期的境界条件 $V_{n+L} = V_n$ を持つとき、このモデルを $LV(n, L)$ と表すことにする。格子が無限の長さを持つとき ($L \rightarrow \infty$) このモデルは N ソリトン解を持ち、さらに無限個の可換な保存量を持つという意味で可積分系であることが知られている。

この小節では、 $LV(n, L)$ の可積分性を証明する過程で $l_i(z)$ が $LV(n, L)$ に結び付くことを説明する (Lemma 4.4)。まず必要な準備をする。

(i) Hamiltonian 構造; 力学変数 V_k , $k \in \mathbb{Z}$ と関係式

$$\{V_k, V_j\} = 2V_k V_j \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_{j, k+i} - \delta_{j, k-i})$$

で生成される Poisson 括弧代数を \mathcal{V} とすると、 $LV(n, L)$ の Hamiltonian 構造は

$$\frac{d*}{dt} = \{*, H_1\}, \quad H_1 = \sum_{k=1}^L V_k, \quad * \in \mathcal{V}$$

と定義される。 H_1 は保存量の一つで Hamiltonian と呼ばれる。

(ii) Lax 形式; (4.4) は行列 $l_k^{LV}(z)$, $B_k(z) \in \mathcal{V} \otimes \text{End}(V)$ の満たす方程式

$$\frac{dl_k^{LV}(z)}{dt} = B_{k+1}(z)l_k^{LV}(z) - l_k^{LV}(z)B_k(z)$$

に書き直せる。この方程式を Lax 形式、 $l_k^{LV}(z)$ を Lax 行列という。 $B_k(z)$ の具体的な形は省略するが、 $l_k^{LV}(z)$ は次のようになる;

$$l_k^{LV}(z) = \begin{pmatrix} z^{\frac{1}{n}} & 0 & \cdots & 0 & V_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$LV(n, L)$ の保存量は Lax 行列から次のように構成される;

$$T^{LV}(z) = \prod_{k=1}^{\widehat{L}} \frac{1}{V_k^n} l_k^{LV}(z), \quad t(z) = \text{Tr}_V T^{LV}(z) \quad (4.5)$$

$t(z)$ を転送行列といい、これを z について展開すると保存量が得られる。参考までに初めの方の保存量を書き下すと

$$\log H_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^L \log V_k, \quad \frac{1}{2}(H_1)^2 - H_2 = \sum_{k=1}^L \left(\frac{1}{2}(V_k)^2 + V_k \sum_{j=1}^{n-1} V_{k+j} \right)$$

と書ける。こうして構成された保存量は次の性質を持つ;

Proposition 4.3 [14] 全ての保存量は互いに Poisson 可換、つまり $\{H_i, H_j\} = 0$ である。

(証明の概略) この証明では次の Lemma が鍵となる;

Lemma 4.4 Poisson 括弧代数 \mathcal{C} を拡張して $\mathcal{C}' = \langle P_i^{\pm \frac{1}{n}}, Q_i^{\pm \frac{1}{n}}; i \in \mathbb{Z} \rangle$ とする。埋め込み $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{C}'$; $V_k \mapsto V_k = (P_{k,k+n-1})^{-1} Q_k^{-1} Q_{k+n-1}$ によって $l_k^{LV}(z)$ は $a_k = 0$ の場合の $l_k(z)$ とゲージ同値になる。つまり $a_k = 0$ のとき

$$z^{\frac{1}{n}} l_k\left(\frac{1}{z}\right) = \Omega_{k+1}(z) \frac{1}{V_k^{\frac{1}{n}}} l_k^{LV}(z) \Omega_k(z)^{-1}$$

となる $\Omega_k(z) \in \mathcal{C}' \otimes \text{End}(V)$ が構成できる。

行列 $l_k(z)$ の Poisson 括弧関係式(4.3) から、 $T(z) = \Omega_1(z) T^{LV}(z) \Omega_1(z)^{-1}$ は代数関係式

$$\{T(z_1) \otimes T(z_2)\} = [r(z_1/z_2), T(z_1) \otimes T(z_2)]$$

を満たすことが分かる。 $t(z)$ (4.5) はこのゲージ変換に関して不変なので $\{t(z_1), t(z_2)\} = 0$ が成立し、よって Proposition 4.3 が示される。□

$L \rightarrow \infty$ のとき $t(z)$ は無限個の Poisson 可換な保存量を生成し、モデルの可積分性を支持する [14]。 L が有限のときの可積分性は $T^{LV}(z)$ の固有方程式が定める代数曲線を考察することによって論じられる [15, 16]。

5 D 型の場合

$A_{n-1}^{(1)}$ 型以外の Lie 環の場合、2~4 章がどうなるかは興味深い問題である。この章では、 $D_n^{(1)}$ 型箱玉系に付随した描像で現時点で明らかになっている内容 (2, 3 章に相当する) を紹介する。

5.1 量子 Lax 行列と頂点模型

量子群 $U_q(D_n^{(1)})$ のベクトル表現を $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}v_i$, $I = \{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -1\}$ とし、 I の元に順序 $1 \prec 2 \prec \dots \prec n \prec -n \prec \dots \prec -1$ を定義する。さらに $\xi = q^{2n-2}$, $\bar{i} = i$ ($i > 0$), $i + 2n$ ($i < 0$) とする。量子 R 行列 $R(z) \in \text{End}(V \otimes V)$ は Yang-Baxter 方程式の三角

関数解で、次のように書かれる;

$$\begin{aligned}
 R(z) &= a(z) \sum_k E_{kk} \otimes E_{kk} + b(z) \sum_{j \neq k} E_{jj} \otimes E_{kk} + c(z) \left(z \sum_{j < k} + \sum_{j > k} \right) E_{kj} \otimes E_{jk} \\
 &\quad + (z-1)(1-q) \sum_{j,k} f_{jk}(z) E_{jk} \otimes E_{-j-k}, \\
 a(z) &= (1-q^2z)(1-\xi z), \quad b(z) = q(1-z)(1-\xi z), \quad c(z) = (1-q^2)(1-\xi z), \\
 f_{jk}(z) &= \begin{cases} q + \xi z & j = k \\ (1+q)(-1)^{j+k} q^{k-j} & j < k \\ (1+q)(-1)^{j+k} q^{k-j} \xi z & j > k \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Weyl 代数 \mathcal{W} とその部分代数 \mathcal{A} は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合と同様に定義するが、演算子の添え字 i は $I \setminus \{n, -n\}$ の元とする。

量子 Lax 行列 $L(z) \in \mathcal{A} \otimes \text{End}(V)$ は $2n$ 次正方行列として定義される。定義が複雑なのでここでは後に $n=3$ の場合を紹介するに留める。この Lax 行列は上の R 行列とともに代数関係式(2.4)を満たし、また次のように因子化する;

$$\begin{aligned}
 L(z) &= K_{-n+1} \cdots K_{-1} D(z) K_1 \cdots K_{n-1}, \\
 D(z) &= \text{diag}(z, \dots, z, z^2, 1, z, \dots, z).
 \end{aligned}$$

Example 5.1 $n=3$ の場合の Lax 行列 (省略されている成分は全て 0);

$$\begin{aligned}
 L(z) &= K_{-2} K_{-1} D(z) K_1 K_2, \\
 K_1 &= \begin{pmatrix} P'_1 & & R_1 & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ & & P'_1 & & R_1 & \\ Q_1 & & & P_1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & Q_1 & & & P_1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & P'_2 & & R_2 & & \\ & & P'_2 & & R_2 & \\ Q_2 & & & P_2 & & \\ & & Q_2 & & & P_2 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \\
 K_{-1} &= \begin{pmatrix} P'_{-1} & & Q_1 & & & \\ & 1 & & & & \\ R_{-1} & & & R_{-1} & & \\ & & & & P_{-1} & Q_{-1} \\ & & & & & 1 & Q_{-1} \\ & & & R_{-1} & & & P'_{-1} \end{pmatrix}, \quad K_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & P_{-2} & & Q_{-2} & & \\ R_{-2} & & P'_{-2} & & & \\ & & & & P_{-2} & Q_{-2} \\ & & & & R_{-2} & P'_{-2} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \\
 D(z) &= \text{diag}(z, z, z^2, 1, z, z).
 \end{aligned}$$

このような Lax 行列で全ての $i \in I \setminus \{n, -n\}$ に対して $a_i = 1$ の場合を考える。このとき、ベクトル空間 \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = \bigoplus_x \mathbb{C}x, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n-2}$$

は、(3.3) と同様な A の作用のもとで A 加群になる。このときに構成される頂点模型における K_i の作用は、 $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合と同じ寄与に加えて以下のものを与える;

$$\begin{array}{ccc} Q_i & & R_i \\ n & & -i \\ x_i \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} x_{i+1} & & x_i \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} x_{i-1} \\ -i & & n \\ 1 & & 1 - q^{2x_i} \end{array}$$

Theorem 5.2 この頂点模型は $R(z)$ の m 回フュージョンで $m \rightarrow \infty$ の極限を取ったものに一致する。ただし $m = \sum_{i \in I} x_i$ において $m - x_{-n} < \infty$ を保ちながら $m, x_{-n} \rightarrow \infty$ の極限を取る。

$D_n^{(1)}$ 型の場合、 V_m の基底は $x_{-n}x_n = 0$ の下で $x = [x_1, \dots, x_n, x_{-n}, \dots, x_{-1}] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$ と表されるが、 $m \rightarrow \infty$ の極限で \mathcal{M} の基底に一致する。

5.2 箱玉系へ

$D_n^{(1)}$ の場合には、縦辺の $i \in I$ で決まる準位のうち $-n$ が「空箱」を、 n と $-n$ 以外は $2n-2$ 種類の「玉」を表し、中でも i -玉と $-i$ -玉は「粒子と半粒子」の関係にあると解釈される。 n は粒子と半粒子の「束縛状態」と解釈でき、その理由は結晶極限でも生き残る上の二つの寄与から理解できる。つまり、 K_i が頂点に作用するとき箱の中に n があればそれは i -玉と $-i$ -玉の束縛状態であり、 Q_i は「箱の中の i -玉だけを運搬車に積む ($-i$ -玉は無視する)」。また箱の中に $-i$ -玉があれば R_i は「運搬車に i -玉があればその一つをその箱に下ろし」、その結果束縛状態 n が出来る。こうして次の定理が得られる。

Theorem 5.3 この頂点模型から得られる量子箱玉系は、結晶極限で $D_n^{(1)}$ 型箱玉系に一致する。

最後に $D_n^{(1)}$ 型箱玉系の例を見てみよう。

Example 5.4 $D_3^{(1)}$ 型箱玉系の例 (空き箱に対応する 3 を \cdot と表すかまたは省略し、 $i > 0$

のときの順位 $-i$ を \bar{i} と書く);

$$\begin{array}{l}
 t=0: \cdot \cdot 2 \ 1 \ \bar{2} \cdot \cdot 1 \cdot \\
 t=1: \cdot \cdot \cdot 2 \ 1 \ \bar{2} \ 1 \cdot \cdot \\
 (a) \ t=2: \cdot \cdot \cdot \bar{1} \ 1 \ 1 \ 1 \cdot \\
 t=3: \cdot \cdot \cdot \bar{1} \cdot \cdot 1 \ 1 \ 1 \cdot \\
 t=4: \cdot \cdot \cdot \bar{1} \cdot \cdot \cdot 1 \ 1 \ 1 \cdot \\
 \\
 t=0: \cdot \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot 3 \cdot \cdot \\
 t=1: \cdot \cdot \cdot 2 \ 1 \cdot 3 \ 1 \cdot \cdot \cdot \\
 (b) \ t=2: \cdot \cdot 2 \cdot \bar{2} \ 2 \ 1 \ 1 \cdot \cdot \\
 t=3: \cdot \cdot 2 \cdot \bar{2} \cdot \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot \cdot \\
 t=4: \cdot \cdot 2 \cdot \bar{2} \cdot \cdot \cdot 2 \ 1 \ 1 \cdot
 \end{array}$$

(a) では $(2, \bar{2})$ から $(1, \bar{1})$ へ対消滅対生成が起こり、(b) では束縛状態 3 の分解が起こっていることが観察できる。

References

- [1] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦郎, ソリトンの数理 (岩波書店, 1993).
- [2] 高崎金久, 可積分系の世界 - 戸田格子とその仲間 (共立出版, 2001).
- [3] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic, London, 1982).
- [4] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990).
- [5] D. Takahashi and J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514 (1990),
高橋大輔, 薩摩順吉, 日本応用数理学会論文誌 **1**, 41 (1991).
- [6] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247 (1996).
- [7] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi, and T. Tokihiro, *J. Math. Phys.* **42**, 274 (2001).
- [8] K. Fukuda, M. Okado, and T. Yamada, *Internat. J. Modern Phys. A* **15**, 1379 (2000),
math.QA/9908116.
- [9] G. Hatayama, A. Kuniba, and T. Takagi, *Nucl. Phys. B* **577**, 619 (2000).
- [10] 野海正俊, 数理解析研究所講究録 **1302**, 155 (2003).
- [11] A. Kuniba, T. Takagi, M. Okado, and Y. Yamada, *Comm. Math. Phys* **245**, 491 (2004).

- [12] R. Inoue, A. Kuniba, and M. Okado (2004), [sI/0404047](#).
- [13] K. Hikami, R. Inoue, and Y. Komori, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 2234 (1999).
- [14] R. Inoue and K. Hikami, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 87 (1998).
- [15] R. L. Fernandes and P. Vanhaecke, *Comm. Math. Phys.* **221**, 169 (2001).
- [16] R. Inoue, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 1277 (2004).