数理解析研究所講究録 1431 巻 2005 年 123-136

Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム

新潟大学工学部情報工学科　田島慎一 (Shinichi TAJIMA)
Department of Information Engineering,
Niigata University

1 序

19 世紀から 20 世紀中頃にかけ, 多くの研究者により, Cauchy の一変数留数理論 (1814, 1826–1857) を多変数の場合に拡張・応用することが試みられた. 19 世紀になされた代表的研究として, C.G. Jacobi の先駆的仕事 (1834, 35) や M.F. Didon (1873), P. Appell (1882), É. Picard (1883, 1886), H. Poincaré (1886, 87) らの研究が上げられる. 20 世紀前半の研究として, S. Lefschetz (1916), G. de Rham (1936), B. Segre (1938), R. Caccioppoli (1949) がある. 1930 年代からの E. Martinelli による一連の仕事 (1938, 45, 53, 55) 等により, 多変数留数が本質的にホモロジー代数的特性を持つことが明らかにされ, 1960 年頃には J. Leray (1958, 59) による留数理論と Grothendieck 留数理論 (1957, 66, 68) が創り上げられた.

この Grothendieck による理論は, 導來圏の枠組を構築・駆使して多変数の留数理論と双対性理論を展開していくものであり, 高度に抽象的である. しかし, 解析学の観点からみても, Grothendieck 留数は Cauchy の一変数留数理論も最も自然な拡張のひとつであると言える. 1970 年代に, R. Harvey (1970), Y.L. Tong (1973), P. Griffiths (1976) らは Grothendieck residue symbol と古典的な多変数留数積分表示との関係を示した. J.P. Ramis - G. Ruget (1974) は複素解析的な立場から duality の研究を行い, N.R. Coleff - M. Herrera (1978) は留数カレントの理論を展開した.

Grothendieck 留数は代数幾何はもとより, 特異点論や特性類の理論とも密接な関係がある. 複素多様体に対する Lefschetz の不動点定理や正則ベクトル場の特異点における解析等では, 必須の概念と言える. また, 多変数補間問題や計算機代数の諸問題への応用等, 広範囲に亘り様々な応用がある.

本稿では, この Grothendieck local residues の計算法について代数解析の観点から考察する. ホロノミック D 加群の理論に基づいて代数的局所コホモロジー類に付随するネター作用素を解析し, その結果を用いて Grothendieck local residues を計算する新たなアルゴリズムを導出する.

2 代数的局所コホモロジー

有理数全体 $\mathbb{Q}$ のなす体を K で表す. 変数 $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ を不定元とする有理数係数の n 変数多項式全体のなす環 $K[x_1,\ldots,x_n]$ を $K[x]$ とおく. n 個の多項式の組 $f_1,\ldots,f_n\in K[x]$ であり, 正規列 $F=\{f_1,\ldots,f_n\}$ をなすものが与えられたとする. これらの多項式が $K[x]$ において生成するイデアル $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ を I とおき, イデアル $I\subset K[x]$ の $X=\mathbb{C}^n$ における零点集合 $V(I)=\{x\in X\mid f(x)=0,^\forall f\in I\}$ を Z とおく. イデアル I の準素イデアル分解を $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_\lambda\cap\cdots\cap I_\ell$ とする. 準素イデアル I_λ に付随する素イデアル $\sqrt{I_\lambda}\subset K[x]$ を $\mathfrak{p}_\lambda$ で表し, $X=\mathbb{C}^n$ における $\mathfrak{p}_\lambda$ の零点集合 $V(\mathfrak{p}_\lambda)$ を Z_λ で表す.

次の自然な写像

$$i: Ext^n_{K[x]}(K[x]/I,K[x])\to H^n_{[Z]}(K[x])$$

による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{array}{c}1\\ f_1\ldots f_n\end{array}\right]\in Ext^n_{K[x]}(K[x]/I,K[x])$$

の像を $\tau_F\in H^n_{[Z]}(K[x])$ で表すことにする.

零次元多様体 Z はイデアルの準素イデアル分解に応じ, $Z=Z_1\cup Z_2\cup\cdots\cup Z_\lambda\cup\cdots\cup Z_\ell$ と既約分解される. 従って, 代数的局所コホモロジー類 τ_F は Z_λ に台を持つ代数的局所コホモロジー類による直和分解

$$\tau_F=\tau_{F,1}+\cdots+\tau_{F,\lambda}+\cdots+\tau_{F,\ell}$$

を持つ. 但し, $\tau_{F,\lambda}\in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ は Z_λ に台を持つ直和因子である.

米田 pairing

$$\mathrm{Res}\langle\cdot,\cdot\rangle: K[x]/I_\lambda\times\mathrm{Hom}_{K[x]}(K[x]/I_\lambda,H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])dx)\longrightarrow K$$

は非退化である。従って, 代数的局所コホモロジー類 τ_{F_λ} はベクトル空間 $K[x]/I_\lambda$ に作用する線形汎関数と見なせる. さらに $\tau_{F,\lambda}$ は複素領域上の佐藤超函数 ([29]) と考えることができる. 実際, ホロノミック D-加群の理論を適用すると $\tau_{F,\lambda}$ は Z_λ に台を持つデルタ函数の高階偏微分の一次結合として表現出来ることが分かる ([30]). これらのことを正確に述べるため, まず, デルタ函数の定義を与える.

いま, n 個の多項式 $\{p_{\lambda,1},p_{\lambda,2},...,p_{\lambda,n}\}$ であり素イデアル $\mathfrak{p}_\lambda$ を生成するものを取る. 自然な写像

$$Ext^n_{K[x]}(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda,\ K[x])\longrightarrow H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$$

による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{array}{c}\det\left(\frac{\partial(p_{\lambda,1},p_{\lambda,2},\ldots,p_{\lambda,n})}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\right)\\ p_{\lambda,1}\ p_{\lambda,2}\ \cdots\ p_{\lambda,n}\end{array}\right]\in Ext^n_{K[x]}(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda,\ K[x])$$

の像を

$$\delta_{Z_\lambda} = [\frac{\det(\frac{\partial(p_{\lambda,1}, p_{\lambda,2}, \ldots, p_{\lambda,n})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)})}{p_{\lambda,1}\ p_{\lambda,2}\ \cdots\ p_{\lambda,n}}]$$

で表すことにする. 代数的局所コホモロジー類 δ_{Z_λ} は Z_λ に台をもつデルタ函数に他ならない.

注意 デルタ函数を定義する際, 係数として $(\frac{1}{2\pi i})^n$ を付けておくのが普通であるが, ここではこの係数を掛けずにデルタ函数を定義している.

いま, $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なる微分作用素 $T_{F,\lambda}$ が与えられたとする. $T_{F,\lambda}$ の形式随伴作用素を $T^*_{F,\lambda}$ と置くと, 点 $\beta \in Z_\lambda$ における留数値 $\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)})$ に関し次を得る.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}) &= \mathrm{Res}_\beta(\left[\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}\right]) \\
&= \mathrm{Res}_\beta(\varphi(x)\tau_{F,\lambda}dx) \\
&= \mathrm{Res}_\beta(\varphi(x)(T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda})dx) \\
&= \mathrm{Res}_\beta((T^*_{F,\lambda}\varphi)(x)\delta_{Z_\lambda}dx) \\
&= (T^*_{F,\lambda}\varphi)(\beta)
\end{aligned}$$

即ち, 偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ を用いると, 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ の線形汎関数としての作用が表現でき, その結果, 留数値を具体的に求めることが出来るようになる.

補足 ここで [38] に従って多少, 説明を加えておこう. まず, 点 $\beta \in Z_\lambda$ における留数値 $\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\ldots f_n(x)})$ を求める事を, $\varphi(x)$ に対し $\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\ldots f_n(x)})$ を対応させる写像

$$\varphi(x) \longrightarrow \mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\ldots f_n(x)})$$

の evaluation として捉える. この線形写像は, 代数的局所コホモロジー τ_F を積分核とする積分として与えられているが, 実際には $\varphi(x)$ に微分作用素として作用する. この作用を求めるには「τ_F の点 $\beta \in Z_\lambda$ におけるローラン展開」を計算すれば良いことになる. ここで, 「τ_F の点 $\beta \in Z_\lambda$ におけるローラン展開 」とは, 代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ の点 β に台を持つ直和因子を $\tau_{F,\lambda,\beta}$ で表すとき, $\tau_{F,\lambda,\beta}$ の X および $\{x \in X \mid x_i \neq 0\}, i = 1, 2, ..., n$ なる標準的開集合による被覆に関する相対 Čech cohomology での表現を意味する.

代数的局所コホモロジー τ_F 自体は, X および $\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}, i = 1, 2, ..., n$ なる開集合をもちいた相対 Čech cohomology を用いて, 言わば大域的に与えられている. それに対し, 局所留数の計算では, 前者とは異なる被覆による表現が必要

とされることになる．しかし，代数的局所コホモロジー τ_F の点 $\beta \in Z$ におけるローラン展開を直接的に求めることは，Čech cohomology として扱う限り，一般に極めて困難であると思われる．

さてここで，先程導入した偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ に注目しよう．代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ に対し $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なる微分作用素を与える事は，代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ の各点 $\beta \in Z_\lambda$ におけるローラン展開を与えることと同値である．従って，この節で述べたことは，「偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ を用いると，相対 Čech cohomology での直接的計算をおこなわないで代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ の線形汎関数としての作用が表現でき，その結果，留数値を具体的に求めることが出来るようになる」とまとめることが出来る．

偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ を用いた表現 $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ を代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ のネター作用素表示と呼ぶことにする ([38]).

3 準素イデアルと Noether 作用素

有理数係数多項式を係数とする Weyl 代数 $K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X で表す．与えられた零次元準素イデアル $I_\lambda \subset K[x]$ に対し，D_X 上 I_λ で生成される左 D_X イデアルを $D_X I_\lambda$ で表し，対応する左 D_X 加群 $D_X/D_X I_\lambda$ を M_{I_λ} で表す．準素イデアル I_λ に付随する素イデアル $\mathfrak{p}_\lambda$ に対しても同様に，左 D_X イデアル $D_X\mathfrak{p}_\lambda \subset D_X$ による剰余をとることで D_X 加群 $M_{\mathfrak{p}_\lambda} = D_X/D_X\mathfrak{p}_\lambda$ を定める．

D_X 加群 M_{I_λ} から $M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ への D_X 準同型写像全体のなす K ベクトル空間を $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ と置く．この K-ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ を零次元準素イデアル I_λ の Max Noether space と呼ぶことにする．D_X-加群 $M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ は共にホロノミック系であるので，$Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は有限次元 K ベクトル空間となる．次元は $\dim_K(K[x]/I_\lambda)$ に等しい．

補題 3.1 $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ 加群の構造を持つ．

更に，次を得る．

定理 3.1 ([42], [45]) $d_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$ とおく．このとき，$Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の d_λ 個の要素からなる集合 $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{d_\lambda-1}\}$ であり次の条件 (N) を満たすものが存在する．

(N) $\forall \rho \in Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}),\ \exists!\ c_0, c_1, \ldots, c_{d_\lambda-1} \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda \quad s.t.$

$$\rho = \rho_0 c_0 + \rho_1 c_1 + \cdots + \rho_{d_\lambda-1} c_{d_\lambda-1}.$$

以下，条件 (N) を満たすような集合 $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{d_\lambda-1}\}$ のことを，ホロノミック系 M_{I_λ} に付随する Noether 作用素基底と呼ぶことにする．

注意　左 D_X 準同型写像 $\rho \in Hom_{D_X}(D_X, D_X)$ に対し $R=\rho(1)$ とおく.

$$\begin{array}{ccccccc} D_X I_\lambda & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & M_{I_\lambda} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \rho & & & & \\ D_X \mathfrak{p}_\lambda & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & M_{\mathfrak{p}_\lambda} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

このとき, ρ が $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の要素を定める必要十分条件は,

$$fR \in D_X\mathfrak{p}_\lambda,\ \forall f \in I_\lambda$$

で与えられる.

いま, 多項式の組 $B=\{b_0(x), b_1(x), ..., b_{l_\lambda-1}(x)\}$ であり, 剰余空間 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ の K ベクトル空間としての基底となるものを取る. この時, 微分方程式系 $M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ の代数的局所コホモロジー解のなす空間

$$Hom_{D_X}(M_{\mathfrak{p}_\lambda},\ H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \{\eta \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x]) \mid p\eta = 0, \forall p \in \mathfrak{p}_\lambda\}$$

は $\mathrm{Span}_K\{b_j(x)\delta_{Z_\lambda} \mid j=0,1,...,l_\lambda-1\}$ と一致することは明らかである. このことを重複度をもつ一般の場合に拡張したのが次の定理である.

定理 3.2 ([38])　集合 $\{\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{d_\lambda-1}\} \subset Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は条件 (N) を満たす *Noether* 作用素基底とする. $\rho_0(1), \rho_1(1), ..., \rho_{d_\lambda-1}(1)$ の D_X における代表元 $R_0, R_1, ..., R_{d_\lambda-1}$ をとる (ここで, 1 は, $1 \mod I_\lambda \in M_{I_\lambda}$ を意味している).
この時,

$$Hom_{D_X}(D_X/D_XI_\lambda, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \{\eta \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x]) \mid f\eta = 0,\ \forall f \in I_\lambda\}$$

は

$$\mathrm{Span}_K\{R_ib_j\delta_{Z_\lambda} \mid 0 \le i \le d_\lambda - 1, 0 \le j \le l_\lambda - 1\}$$

で与えられる.

代表元の組 $\{R_0, R_1, ..., R_{d_\lambda-1}\}$ はホロノミック系の分解の仕方, 即ちイデアル I_λ に依存しているので, $\{R_0, R_1, ..., R_{d_\lambda-1}\}$ のことを 準素イデアル I_λ に付随した Noether 微分作用素基底と呼ぶことにする ([42]). Noether 微分作用素基底の構成アルゴリズムに関しては [45] を参照されたい.

4　ネター作用素とホロノミック D-加群

この節では, ホロノミック系を用いることで代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ を統制できることを述べる ([33, 35]). さらにそのホロノミック系を用いることで, 代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ のネター作用素表示が計算可能となることを示す ([43]).

$\tau_{F,\lambda}$ の Weyl 代数 D_X 上の annihilator イデアルを $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ と置く, i.e.,

$$Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}) = \{P \in D_X \mid P\tau_{F,\lambda} = 0\}.$$

さらに, 左 D_X 加群 $M_{F,\lambda}$ を $M_{F,\lambda} = D_X/Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ で定める. この D_X 加群 M_{τ_λ} は Z_λ に台を持つホロノミック系であり, 各点 $\beta \in Z_\lambda$ において単純となる. 従って, ホロノミック系 $M_{F,\lambda}$ の代数的局所コホモロジー解の次元は,

$$\dim_K Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) = \dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

となり, その台 Z_λ の相異なる点の個数と等しい.

さて, 正規列 $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ のヤコビ行列式 $\det(\dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)})$ を J_F で表し,

$$d_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

とおく. Z_λ に台を持つ delta 関数を $\delta_{Z_\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ で表す. 次が成立する.

定理 4.1 ([33, 35, 39]) ホロノミックな偏微分方程式系 $P\eta = 0, {}^\forall P \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ を満たす代数的局所コホモロジー類 $\eta \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ であり, $J_F\eta = d_\lambda\delta_{Z_\lambda}$ を満たすものは, $\tau_{F,\lambda}$ に限る.

即ち, ホロノミック系 $M_{F,\lambda}$ を用いると代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ を特徴つけられることになる.

さて, 次に代数的局所コホモロジー $\tau_{F,\lambda}$ のネター作用素表示について考える. そのためにまず D_X 加群 $M_{F,\lambda}$ から D_X 加群 $M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ への D_X 準同型写像すべてがなす空間を考える.

定義 4.1 ([43]) K ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda},\ M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ をホロノミック系 $M_{F,\lambda}$ に付随する *Max Noether* 空間と呼ぶ.

D_X 加群 $M_{F,\lambda}$ はホロノミックであるので $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は, 有限次元 K ベクトル空間となる.

さて, 準同型写像 $\sigma \in Hom_{D_X}(D_X,\ D_X)$ が与えられたとする. $S = \sigma(1) \in D_X$ とおく.

$$\begin{array}{ccccccc}
Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}) & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & M_{\tau_\lambda} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \sigma & & & & \\
D_X\mathfrak{p}_\lambda & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & M_{\mathfrak{p}_\lambda} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

このとき, σ が $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda},\ M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の元とみなせる条件は明らかに

$$PS \in D_X\mathfrak{p}_\lambda, \quad {}^\forall P \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$$

である. このように, $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の要素を表現するような偏微分作用素 S のことをイデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ に付随するネター微分作用素とよぶことにする.

$M_{F,\lambda}$ が Z_λ の各点で単純であることから, 次の結果を得る.

命題 4.1 $\sigma_{F,\lambda}$ を K ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の要素で, 零でないものとする. 対応するネター微分作用素を $S_{F,\lambda}$ とおく. このとき, 次が成立する.

$$Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{S_{F,\lambda}u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}.$$

証明. $Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ が右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ 加群の構造をもつことから,

$$Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \cong \mathrm{Span}_K\{S_{F,\lambda}u \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

を得る. 他方,

$$Hom_{D_X}(M_{\mathfrak{p}_\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

であるので,

$$Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{S_{F,\lambda}u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

を得る. □

特に, $\tau_{F,\lambda}$ 自体がホロノミック系 $M_{F,\lambda}$ を満たす代数的局所コホモロジーであることから, $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なる微分作用素 $T_{F,\lambda}$ も $u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ を用いて $T_{F,\lambda} = S_{F,\lambda}u$ と表されることになる. このような u は, 次の補題を用いることで求めることが出来る.

補題 4.1 $u \in K[x]$ とする. この時, 次は同値である.

(i) $\tau_{F,\lambda} = S_{F,\lambda}u\delta_{Z_\lambda}$.

(ii) $J_F S_{F,\lambda}u - d_\lambda \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$.

証明. $J_F\tau_{F,\lambda} = d_\lambda\delta_{Z_\lambda}$ より, $(J_F S_{F,\lambda}u - d_\lambda)\delta_{Z_\lambda} = 0$ を得る. $Ann_{D_X}(\delta_{F,\lambda}) = D_X\mathfrak{p}_\lambda$ が成り立つので, $J_F S_{F,\lambda}u - d_\lambda \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$ を得る. 逆もあきらか. □

5 留数計算アルゴリズム

第2節で述べたように, Grothendieck local residues を求めるには, $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なるネター作用素表示を求めれば良い. 従って, 基本的には [44] と同様に

- $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の構成
- $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ に対するネター微分作用素 $S_{F,\lambda}$ の構成
- $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なる作用素 $T_{F,\lambda} = S_{F,\lambda}u_\lambda$ の構成

を行えばよいことになる．

さて，いま非負の整数 k をとる．これに対し，高々 k 階の偏微分作用素 $P \in D_X$ であり $P\tau_{F,\lambda} = 0$ を満たすものすべてを考える．この集合が D_X 上生成する左イデアルを $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ で表す．対応する左 D_X 加群 $D_X/Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ を $M_{F,\lambda}^{(k)}$ で表す．特に，$k=0$ の時は $Ann_{D_X}^{(0)}(\tau_{F,\lambda}) = D_X I_\lambda$ となることから，$M_{F,\lambda}^{(0)} = M_{I_\lambda}$ を得る．

イデアル $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda}) \subset Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}), k = 0, 1, \ldots$ は

$$Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda}) \subset Ann_{D_X}^{(k+1)}(\tau_{F,\lambda})$$

を満たす増加列をなすことから

$$0 \to Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}^{(k+1)}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \to Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}^{(k)}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$$

なる単射を得る．特に

$$0 \to Hom_{D_X}(M_{F,\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \to Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$$

なる単射が存在する．このことから次が導かれる．

補題 5.1 微分作用素の組 $\{R_{\lambda,0}, \ldots, R_{\lambda,d_\lambda-1}\}$ は準素イデアル I_λ のネター作用素基底であり，更に，条件

$$J_F R_{\lambda,d_\lambda-1} \notin D_X\mathfrak{p},\ \ J_F R_{\lambda,j} \in D_X\mathfrak{p},\ \ j = 0, 1, \ldots, d_\lambda - 2$$

を満たすとする．この時，$s_0, s_1, \ldots, s_{d_\lambda-2} \in K[x]$ であり微分作用素

$$R_{\lambda,0}s_0 + R_{\lambda,1}s_1 + \cdots + R_{\lambda,d_\lambda-2}s_{d_\lambda-2} + R_{\lambda,d_\lambda-1}$$

がイデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ のネター微分作用素となる様なものが存在する．

従って，予め準素イデアル I_λ のネター作用素基底 $\{R_{\lambda,1}, \ldots, R_{\lambda,d_\lambda}\}$ を求めておくと，それらを利用してイデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ のネター微分作用素 $S_{F,\lambda}$ を効率よく求める事が出来る．

準備が整ったので，以下に Grothendieck local residues

$$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}\right), \quad \beta \in Z_\lambda$$

の計算アルゴリズムの概略を与える．ただし，多項式環 $K[x]$ には項順序 $\succ$ をいれてあり，Gröbner 基底の計算や多項式の Normal form $\mathrm{NF}(*, \succ)$ の計算等が利用できるものとする．また，イデアル $I = \langle f_1, \ldots f_n\rangle$ の準素イデアル分解 $I_1 \cap \cdots \cap I_\lambda \cap \cdots \cap I_\ell$ や各 I_λ に付随する素イデアル $\mathfrak{p}_\lambda$ は既に求めてあるとする．

留数計算アルゴリズムの概略

(i) 準素イデアル I_λ の Noether 微分作用素基底 $R_{\lambda,1},\ldots,R_{\lambda,d_\lambda}$ を求める ([45]). ただし,

$$J_F R_{\lambda,d_\lambda-1} \notin D_X\mathfrak{p},\ J_F R_{\lambda,j} \in D_X\mathfrak{p},\ j=0,1,...,d_\lambda-2$$

を満たすとする.

(ii) $s_0,s_1,...,s_{d_\lambda-2} \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ を未知の係数とし,

$$S_{F,\lambda} = R_{\lambda,0}s_0 + R_{\lambda,1}s_1 + \cdots + R_{\lambda,d_\lambda-2}s_{d_\lambda-2} + R_{\lambda,d_\lambda-1}$$

とおく.

(iii) $k=1$ とおく. 微分作用素 $S_{F,\lambda}$ が求まるまで, 以下を行う,

(a) $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ を求める ([46]).

(b) 方程式 $PS_{F,\lambda} \in D_X\mathfrak{p}_\lambda,\ {}^\forall P \in Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ を解く.

(c) k:=k+1

(iv) 条件 $J_F R_{\lambda,d_\lambda-1}u - d_\lambda \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$ をみたす $u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ を求める.

(v) $r(x) = \mathrm{NF}(u(x)((S^*_{F,\lambda}\varphi)(x)),\succ)$ を計算する.

このとき,

$$r(\beta) = \mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}),\quad \beta \in Z_\lambda$$

が成り立つ (cf. [44]).

これで本稿の目的は遂げられたことになる. 最後に, 形式随伴作用素 $T^*_{F,\lambda}$ の持つ基本的性質を述べ, 上記の留数計算法と論文 [33, 35, 39, 40, 47] 等で与えた留数計算法との相違等を示しておく.

まず, 論文 [39, 40, 47] 等で与えた留数計算法の概略を復習しよう.

$K[x]/I_\lambda$ をベクトル空間とみなし E_λ とおき, さらに

$$E_{J,\lambda} = \{J_F(x)g(x) \mod I_\lambda \mid g \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\},$$

$$E_{K,\lambda} = \{h(x) \in E_\lambda \mid \mathrm{Res}_\beta(\frac{h(x)dx}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}) = 0, \beta \in Z_\lambda\}$$

とおく. この時 E_λ は $E_\lambda = E_{J,\lambda} \oplus E_{K,\lambda}$ と直和分解される. 与えられた $\varphi(x) \in K[x]$ に対しまず $\varphi_\lambda = \varphi(x) \mod I_\lambda$ を考え, 連立方程式を解くことで $\varphi_{J,\lambda} \in E_{J,\lambda}, \varphi_{K,\lambda} \in E_{K,\lambda}$ による直和分解

$$\varphi_\lambda = \varphi_{J,\lambda} + \varphi_{K,\lambda}$$

を求める. 次に

$$\mathrm{Res}_{\beta}(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}) = \mathrm{Res}_{\beta}(\frac{\varphi_{J,\lambda}(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)})$$

に注目し, $\varphi_{J,\lambda}(x) = J_F(x)g(x) \mod I_\lambda$ なる $g \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ を使い

$$\mathrm{Res}_{\beta}(\frac{\varphi_{J,\lambda}(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}) = \mathrm{Res}_{\beta}(\frac{J_F(x)g(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}) = d_\lambda g(\beta)$$

により留数値を求めるという手順を踏む.

さて, ここで $T_{F,\lambda}$ は次のふたつの性質を持つことを思い出そう.

(i) $PT_{F,\lambda} \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$, $^\forall P \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$,

(ii) $J_F T_{F,\lambda} - d_\lambda \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$.

特に, $fT_{F,\lambda} \in D_X\mathfrak{p}_\lambda$, $^\forall f \in I_\lambda$ が成り立つので $T^*_{F,\lambda}$ は

$$T^*_{F,\lambda} : K[x]/I_\lambda \longrightarrow K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$$

を自然に誘導する. 上記の $T_{F,\lambda}$ の性質 (i) と柏原・河合の双対定理 ([19]) より

$$T^*_{F,\lambda}(E_{K,\lambda}) = \{0\}$$

を得る. 同様に, (ii) より

$$T^*_{F,\lambda}(J_F(x)g(x)) = d_\lambda g(x) \mod \mathfrak{p}_\lambda$$

を得る. 従って, 形式随伴作用素 $T^*_{F,\lambda}$ を φ に施すと, $\varphi_\lambda = \varphi_{J,\lambda} + \varphi_{K,\lambda}$ と $\varphi_{J,\lambda}(x) = J_F(x)g(x) \mod I_\lambda$ より

$$(T^*_{F,\lambda}\varphi)(x) = d_\lambda g(x) \mod \mathfrak{p}_\lambda$$

を得る. 形式随伴作用素 $T^*_{F,\lambda}$ を用いることで, 連立方程式を解くことなく $g(x)$ が直接計算できる事が著しい.

6 あとがき

Grothendieck local residues は Cauchy の一変数留数を高次元の場合に一般化したものである. Grothendieck の留数理論の中で最も基本的概念であり, 様々な応用を持つ. Grothendieck 留数の計算においては, なんらかの形で transformation law を利用することが従来, 頻繁に行われていたと思われる. しかし transformation law を用いるということは, もともとのイデアルと異なるイデアルを導入しそのイデアルを計算に利用することを意味する. 従って, 留数値そのものだけでなく何ら

かの数学的構造を調べたりする必要がある場合は, 従来の計算法は様々な支障を伴う恐れが生じる.

本稿で与えた留数計算アルゴリズムでは, 此れにたいし, 準素イデアルに付随したネター微分作用素基底を用いる. これらのネター微分作用素は準素イデアルの重複の仕方を記述するものであり, しかも, ネター微分作用素と素イデアルを組み合わせることで準素イデアルを完全に特徴付けることが可能である. つまり, 我々が与えたアルゴリズムは, 計算のためにイデアルの取り替え等をおこなったりせずに, 寧ろ「準素イデアルの構造を明らかにする事で留数値の計算を可能にしたもの」と言える.

本研究では D_X 加群の理論を用いて留数を扱っている. 一般に Grothendieck local residues は微分作用素として働くことが知られている. 従って, 多変数留数を扱う際に, 可換環の枠ではなく微分作用素環の枠組み, 即ち D_X 加群の枠組みを用いることは極めて自然であると思われる.

導出したアルゴリズムでは, ホロノミック D_X 加群を用いて代数的局所コホモロジーのネター作用素表示を求めることがその中核をなしている. このような考え方, 即ち, 「ホロノミック D_X 加群を用いて, 関数や超関数等を統制し, 様々な具体的計算に役立たせる」という考えは佐藤幹夫先生によるものであり, 代数解析学の根本的な哲学とも言えるものであろう. このように考えると, 本研究は代数解析学の基本原理に従うことで多変数留数計算アルゴリズムを導出したものと言える.

参考文献

[1] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger: Residue Currents and Bezout Identities, Progress in Math. **114**, Birkhäuser 1993.

[2] J.-E. Björk: Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979.

[3] R. Bott: A residue formula for holomorphic vector fields, J. Diff. Geom. **1** (1967), 311–330.

[4] N.R. O'Brian: Zeros of holomorphic vector fields and Grothendieck duality theory, Trans. AMS. **229** (1977), 289–306.

[5] C. Camacho and P. Sad: Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Annals of Math. **115** (1982), 579–595.

[6] J.P. Cardinal and B. Mourrain: Algebraic appriach of residues and applications, in The Mathematics of Numerical Analysis, Lectures in Applied Math., **32** Dekker (1996), 189–210.

[7] B. Conrad: Grothendieck duality and base change, Lecture Notes in Math. **1750** , 2000.

[8] L. Ehrenpreis: A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, (1961), 161–174.

[9] L. Ehrenpreis: Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience, 1970.

[10] P. Griffiths: Variations on a theorem of Abel, Invent. math. **35** (1976), 321–390.

[11] P. Griffiths and J. Harris: Principles of Algebraic Geometry. Wiley Interscience , 1978.

[12] A. Grothendieck: Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki **149** (1957)

[13] A. Grothendieck: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux., Adv. Stud. Pure Math. **2** 1968.

[14] R. Hartshorne: Residues and Duality. Lecture Notes in Math. **20**, Springer, 1966.

[15] L. Hörmander: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Third revised edition, North Holland, 1990.

[16] I-Chiau Huang: An explicit construction of residual complexes, J. of Algebra **225** (2000), 698–739.

[17] M. Kashiwara: On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I. Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), 563–579.

[18] M. Kashiwara: On the holonomic systems of linear differential equations, II, Inventions Math., **49** (1978), 121–135.

[19] M. Kashiwara and T. Kawai: On holonomic systems of microdifferential equations. III. Publ. RIMS, Kyoto Univ., **17** (1981), 813–979.

[20] J. Lipman and B. Teissier: Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michigan Math. J. **28** (1981), 97–116.

[21] J. Lipman: Lectures on local cohomology and duality, in Local Cohomology and its Applications, eds by G. Lyubeznik, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **226** Dekker (2002), 39–89.

[22] 中村弥生, 田島慎一: 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199**「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 70–89

[23] Y. Nakamura and S. Tajima: A method for constructing holonomic systems for algebraic local cohomology classes with support on a zero dimensional variety, Mathematical Software, World Scientific, (2002), 158–168.

[24] T. Oaku: Algorithms for the b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, Adv. in Appl. Math., **19** (1997), 61–105.

[25] V.P. Palamodov: A remarks on the exponential representation of solutions of differential equations with constant coefficients (Russian), Mat. Sbornik **76** (118) (1968), 417–434.

[26] M. Passare: Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions, Math. Scand. **62** (1988), 75–152.

[27] J.P. Ramis and G. Ruget: Résidus et dualité, Invent. Math. **26** (1974), 89–131.

[28] P. Sastry and A. Yekutieli: On residue complexs, dualizing sheaves and local cohomology modules, Israel J. Math. **90** (1995), 325–348.

[29] M. Sato: Theory of hyperfunction II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** (1960), 387–437.

[30] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. **287**, Springer (1973), 265–529.

[31] T. Suwa: Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces, Proc. AMS. **123** (1995), 2989–2997.

[32] T. Suwa: Residues of Chern classes on singular varieties, Singularités Franco-Japonaises, Marseille 2002, Séminaires et Congrès, Soc. Math. France, to apear.

[33] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura: Multidimensional local residues and holonomic D-modules, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** 「特異点と複素解析幾何」 (1998), 59–70.

[34] 田島慎一: Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録「積分核の代数解析的研究」掲載予定.

[35] 田島慎一, 中村弥生: 多変数有理関数の留数計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085**,「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 71–81.

[36] 田島慎一: Grothendieck duality の計算と多変数 Hermite 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 1085 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[37] S. Tajima: Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formula, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **214**, Dekker (2000), 503–509.

[38] 田島慎一：代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1138**「数式処理における理論と応用の研究」(2000), 87–95.

[39] 田島慎一: 偏微分作用素を用いた多変数留数計算アルゴリズムと中国剰余定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199**,「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 51–69.

[40] 田島慎一: Algorithms for computing Grothendieck local residues —improvement with a rescue step—, 京都大学数理解析研究所講究録 **1233**,「特異点と Newton 図形」(2001), 67–81.

[41] 田島慎一, 中村弥生: 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1295**,「Computer Algebra – Algorithms, Implementations and Applications」(2002), 1–8.

[42] 田島慎一: 零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.

[43] 田島慎一: 確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録 **1336**「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121–132.

[44] 田島慎一, 中村弥生: Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録 **1352**「再生核の理論の応用」(2003), 1–10.

[45] 田島慎一: 零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1395**「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2004), 57–63.

[46] 田島慎一, 中村弥生: 零次元代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック D_X-加群, 京都大学数理解析研究所講究録 **1412**「超局所解析の展望」(2005), 189–198.

[47] S. Tajima and Y. Nakamura: Computational aspects of Grothendieck local residues, Séminaires et Congrès, Société Mathématique de France, to appear.

[48] D. Toledo and Y.L. Tong, Duality and intersection theory in complex manifolds. I., Math. Ann. **237** (1978), 41–77.

[49] Y.L. Tong: Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol, Amer. J. Math., **95** (1973), 904–917.

[50] A. Yekutieli: Residues and differential operators on schemes, Duke Math. J. **95** (1998), 305–341.