数理解析研究所講究録 1431 巻 2005 年 14-22

WKB SOLUTIONS FOR MICRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL POWER SINGULARITIES

東京大学大学院数理科学研究科 千葉 康生 (CHIBA, Yasuo)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1. 問題と主定理

次のような $x=0$ で m 重の変わり点 (turning point) をもち, 大きいパラメータ τ の付随した $\mathbb{R}$ 上の解析的常微分方程式を考える:

$$(1.1)\qquad P(x,\partial_x,\tau)u(x,\tau)=\left(\sum_{j=0}^{m}a_j(x,\tau)\partial_x^{m-j}\right)u(x,\tau)$$
$$=(\partial_x^m+a_1(x,\tau)\partial_x^{m-1}+a_2(x,\tau)\partial_x^{m-2}+\cdots+a_m(x,\tau))u(x,\tau)=0.$$

ここで ∂_x は d/dx を表し, $a_j(x,\tau)=\sum_{k=0}^{j}a_{jk}(x)\tau^k$, $a_{00}(x)=1$ であり, 各 $a_{jk}(x)$ $(k=0,1,\cdots,j;\ j=1,\cdots,m)$ は $x=0$ の近傍で解析的であるとする. また, P の主シンボルは $x=0$ で

$$(1.2)\qquad \sigma(P)(x,\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{m}(\xi-\sqrt{-1}x^{\lambda}\alpha_j(x)\tau)$$

のように分解されている. ここで λ は自然数であり, 各 $\alpha_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ は $x=0$ の近傍で解析的である.

このような方程式に対して, 完全 WKB 解析によって解をつくる方法が盛んに行われているが, ここでは, 超局所解析の方法を用いて解を構成する. すなわち, τ を 微分作用素 ∂_t と捉えて,

$$(1.3)\qquad P(x,\partial_x,\partial_t)u(x,t)=\left(\sum_{j=0}^{m}a_j(x,\partial_t)\partial_x^{m-j}\right)u(x,t)$$
$$=\left\{\partial_x^m+a_1(x,\partial_t)\partial_x^{m-1}+a_2(x,\partial_t)\partial_x^{m-2}+\cdots+a_m(x,\partial_t)\right\}u(x,t)=0$$

のような偏微分方程式を考える ($\partial_x=\partial/\partial x$, $\partial_t=\partial/\partial t$ である).

この方程式にいくつかの仮定を課す.

仮定 1 (双曲性). 各 $\alpha_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ は x の純虚数値関数であり, $\alpha_j(0)$ は互いに異なる.

仮定 2 (Levi 条件). 各 $k=0,1,\cdots,j;\ j=1,2,\cdots,m$ に対し,

$$(1.4)\qquad \partial_x^s a_{jk}(0)=0,\ \ 0\le s<k(\lambda+1)-j.$$

方程式 (1.3) に対して, $\{x\ge 0\}$ における境界値問題の超局所解とは, $\partial_x^k u(+0,t)$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ がマイクロ函数となるような $x>0$ でのマイクロ函数解であり, 我々の目的は, 次の境界値問題のマイクロ函数解 u を構成することである:

$$(1.5)\qquad \begin{cases}P(x,\partial_x,\partial_t)u(x,t)=0, & 0<x<\varepsilon, |t|<\varepsilon,\\ \mathrm{SS}(u)\cap\{x>0\}\subset H_j(x,\xi,\tau). & (*)\end{cases}$$

ここで, $H_j(x,\xi,\tau)$ は各 $\{\xi-\sqrt{-1}x^\lambda\alpha_j(x)\tau=0\}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ の陪特性帯である. $(*)$ を満たす解 $u(x,t)$ を各 j に対する (Yamane [Y] による) j-pure 解ということにする. 我々の真の目的は, j-pure 解をなるべく具体的な形で構成し, 特に境界値 $\partial_x^k u(+0,t)$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ を求めることにある.

このような双曲型微分方程式については (変数の数は一般の場合も込めて) , Alinhac, Takasaki, Amano-Nakamura 等の研究がある. 中でも, Amano-Nakamura [AN] の方法は我々の研究に近い. この中では $x=0$ 付近での Cauchy 問題に対して複素常微分方程式の Stokes 現象の深い解析をし, 漸近解を構成している. $m=2$ の場合には, 本質的には不確定特異点をもつ 2 階の常微分方程式を用いて成功している. しかし, $m\geq 3$ の場合には彼らの方法で具体的に解析することは難しい.

これに対し Yamane [Y] の中では $m=3$, $\lambda=1$ のときの具体例 $((\partial_x-x\partial_t)\partial_x(\partial_x+x\partial_t)+(\text{低階}))$ について分数ベキ変換と量子化 Legendre 変換を用いて解を構成した. さらに, Uchikoshi [U] では, λ が異なるものを含み, かつ $\mathrm{Im}\alpha_j(0)\neq 0$ となり得る場合で Levi 条件も課さないときに, 無限階擬微分作用素を用いて境界値問題の可解性条件を求めた. しかし, 上の j-pure 解の構成は扱っていない.

これらに対し我々は, 一般の m 階の場合に複素微分方程式の Stokes 解析を経由せず, Kataoka [Kt] のプログラムに沿って, 分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換を用いて解を構成する.

具体的には次のような操作を行い変形する.

まず u を $\mathrm{supp}(u)\subset\{x\geq 0\}$ となる自然な超函数 $\tilde{u}(x,t)$ で代表すると, $x=0$ の近傍で

$$x^m P\tilde{u}(x,t)=0$$

の解と同一視できる.

ここで分数ベキ座標変換

$$y=\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

を考えることができて, $\tilde{u}(x,t)$ は

$$Q(y,\partial_y,\partial_t)v(y,t)=0$$

の解に対応する. ただし, Q は係数が y について正の分数ベキの特異性をもつ偏微分作用素である. また, v は $\{y\geq 0\}$ を台にもつ超函数で代表できるマイクロ函数である.

最後に, $\{\tau>0\}$ において, (y,t) のマイクロ函数を (w,t) のマイクロ函数に変える量子化 Legendre 変換

$$\beta\circ *\circ\beta^{-1}:\begin{cases}\partial_y\mapsto -\sqrt{-1}w\partial_t, & \partial_t\mapsto\partial_t,\\ y\mapsto -\sqrt{-1}\partial_w(\partial_t)^{-1}, & t\mapsto t+\partial_w w(\partial_t)^{-1}\end{cases}\tag{1.6}$$

を行う. このとき, $\beta[v](w,t)$ は w を正則パラメータとし, $\{w\in\mathbb{CP}^1;\mathrm{Im}\,w<0\}$ 全体へ解析接続できるマイクロ函数となる. ここで ∂_w の分数ベキが現れるが, $\beta[v](w,t)$ はさらに $w=\infty$ の近傍で

$$\beta[v](w,t)=w^{-1}V(w^{-1/(\lambda+1)},t)$$

と書けることがわかる. ただし $V(z,t)$ は $z=0$ で正則な (z,t) のマイクロ函数である. したがって, 無限遠点において, このような表現をもつ, 正則パラメータつきマイクロ函数の大域的切断には, $\partial_w^{1/(\lambda+1)}$ が自然に作用する.

例えば, $w=\infty$ の近傍で, $q=2,3,4,\cdots$, $l,m=0,1,2,\cdots$ として,

$$D_w^{m/q}(w^{-1-l/q}f(t))=e^{m\pi\sqrt{-1}/q}\frac{\Gamma(1+(l+m)/q)}{\Gamma(1+l/q)}w^{-1-(l+m)/q}f(t)$$

となる.

具体的には, 分数べキ座標変換と量子化 Legendre 変換によって作用素 Q は

$$\beta\circ Q\circ\beta^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\frac{a_{jk}^{(s)}(0)}{s!}\{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\partial_w\partial_t^{-1}\}^{\frac{s+j}{\lambda+1}}\partial_t^k E_k$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\substack{0\le j\le m\\ 0\le k\le (s+j)/(\lambda+1)}}\frac{a_{jk}^{(s)}(0)}{s!}\{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\}^{\frac{s+j}{\lambda+1}}\partial_w^{\frac{s+j}{\lambda+1}}\partial_t^{k-\frac{s+j}{\lambda+1}}E_k$$

と変換される. ここで, $E_k=\prod_{l=0}^{m-k-1}\{(\lambda+1)\partial_w w-l\}$ であり, 2 番目の式は Levi 条件から導かれるものである. 特に, $\beta\circ Q\circ\beta^{-1}$ のうち, $k=(s+j)/(\lambda+1)$ にあたる項が主導的であり, 主導的項の和は次のように ∂_t を含まず, w の多項式を係数とする m 階常微分作用素となる:

$$L=\sum_{\substack{0\le j\le m\\ j/(\lambda+1)\le k\le j}}\frac{a_{jk}^{(k(\lambda+1)-j)}(0)}{\{k(\lambda+1)-j\}!}\{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\partial_w\}^k E_k.$$

式を簡易な形にするため,

$$\widetilde{a}_{jk}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_{jk}^{l}\{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\}^{\frac{l+k}{\lambda+1}}x^{k+l-(\lambda+1)j}=\sum_{l'=0}^{\infty}\widetilde{a}_{jk}^{l'}x^{l'}$$

(ここで, $\widetilde{a}_{jk}^{l'}=(-\sqrt{-1}(\lambda+1))^{\frac{(\lambda+1)j+l'}{\lambda+1}}a_{jk}^{l'+(\lambda+1)j-k}$ とおいている) とすると

$$\beta\circ Q\circ\beta^{-1}=\sum_{\substack{l'\ge 0\\ 0\le j\le k\le m}}\widetilde{a}_{jk}^{l'}\partial_w^{\frac{l'}{\lambda+1}+j}\partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}}E_k$$

であり, 主導項 L は

$$L=\sum_{0\le k'\le k\le m}\widetilde{a}_{k'k}^{0}\partial_w^{k'}E_k$$

と書ける. 特に, L の最高階の係数は

$$(\text{定数})\cdot\prod_{j=1}^{m}(w+\alpha_j(0))$$

となるので, $w=-\alpha_1(0),-\alpha_2(0),\cdots,-\alpha_m(0),\infty$ に確定特異点をもつことがわかる.

仮定 3. 各 $w=-\alpha_j(0)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ での L の特性指数は整数にならない. さらに, $-\alpha_1(x)$ での特性指数は恒等的に 0 (すなわち, $a_{mm}(x)=0$ であり, 任意の l,l' に対して $a_{mm}^{l}\equiv 0,\widetilde{a}_{mm}^{l'}\equiv 0$) .

以上の仮定の下で, 以下の定理が得られる.

定理 1.1. (1.5) の *j-pure* 解が構成できる. 境界値問題

$$\begin{cases}P(x,\partial_x,\partial_t)u(x,t)=0,\\ u(+0,t)=u_0(t)\end{cases}\tag{1.7}$$

の *mild* マイクロ函数解 $u(x,t)\in\overset{\circ}{\mathscr{C}}_{\{x=0\}|\{x\ge 0\}}$ を考える. ただし, $u_0(t)$ は点 $(0,0;0,\sqrt{-1}\dot{\tau})$ でのマイクロ函数とする. このとき, 次を満たすような高々 $k/(\lambda+1)$ 階の擬微分作用素 $R_{jk}(\partial_t)$ が存在する:

$$\partial_x^k u(+0,t)=R_{jk}(\partial_t)u_0(t)$$

$(j=1,2,\cdots,m;k=0,1,2,\cdots,m-1)$. さらに,

$$\det(\sigma_{k/(\lambda+1)}(R_{jk}(\tau)))_{\substack{j=1,2,\cdots,m\\k=0,1,\cdots,m-1}} \neq 0$$

が成り立つ.

ここで $\overset{\circ}{\mathscr{C}}$ は mild マイクロ函数のなす層を表す.
定理 1.1 の応用として次の定理も得られる.

定理 1.2. 点 $(0,0;0,\sqrt{-1}\dot{\tau})$ において, 偏微分方程式

$$P(x,\partial_x,\partial_t)u(x,t)=0,\ \ x>0 \tag{1.8}$$

の任意の *mild* マイクロ函数解 $u(x,t)\in\overset{\circ}{\mathscr{C}}_{\{x=0\}|\{x\geq 0\}}$ は, *j-pure* 解の和に分解できる.

2. 逐次近似法による解の構成法

定理の証明をするために, 量子化 Legendre 変換後の方程式 $(\beta\circ Q\circ\beta^{-1})\beta[v]=0$ の解を構成しよう.

このとき, マイクロ函数ではなく, 任意のマイクロ函数 $f(t)$ に作用するような, 次の形の擬微分作用素の形式表象解を構成する:

$$U(w,\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}U_j(w)\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}. \tag{2.1}$$

ここで $U(w,\tau)$ は, $w=\infty$ で

$$U(w,\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j w^{-1-\frac{j}{\lambda+1}}\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$$

のような形をしている. また, $U(w,\partial_t)f(t)$ は, 境界値をもつような正則パラメータつきマイクロ函数の層 $\mathscr{C}\mathscr{O}_+^\infty$ の切断となる.

第 1 節でみたように, 我々の考える方程式は次のものである:

$$(\beta\circ Q\circ\beta^{-1})U(w,\partial_t)=\sum_{\substack{l'>0\\0\leq j\leq k\leq m}}\widetilde{a}_{jk}^{l'}\partial_w^{\frac{l'}{\lambda+1}+j}\partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}}E_kU(w,\partial_t)=0. \tag{2.2}$$

このとき, 主導項 L は分数階微分も ∂_t を含まない次の形であった:

$$L=\sum_{0\leq k'\leq k\leq m}\widetilde{a}_{k'k}^{0}\partial_w^{k'}E_k. \tag{2.3}$$

すると, LU の j 番目の項は,

$$(LU)_j=LU_j=\sum_{\substack{0\leq k'\leq k\leq m\\j\geq 0}}\widetilde{a}_{k'k}^{0}\partial_w^{k'}(E_kU_j). \tag{2.4}$$

であり, 残りの項は,

$$\begin{aligned}R(w,\partial_w,\partial_t)&=(\beta\circ Q\circ\beta^{-1})(w,\partial_w,\partial_t)-L(w,\partial_w)\\&=\sum_{\substack{l'\geq 1\\0\leq k'\leq k\leq m}}\widetilde{a}_{k'k}^{l'}\partial_w^{k'+\frac{l'}{\lambda+1}}\partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}}E_k\end{aligned} \tag{2.5}$$

$(|\tilde{a}^{l'}_{k'k}| \sim C^{l'+1}, C$ は定数) となるから, $(R \circ U)_j$ の j 番目の項は

$$(R \circ U)_j = \sum_{\substack{0 \le k' \le k \le m \\ j=j'+l',\ l' \ge 1}} \tilde{a}^{l'}_{k'k} \partial_w^{k'+\frac{l'}{\lambda+1}} (E_k U_{j'}) \mod \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t} \cdot \partial_w. \tag{2.6}$$

と書ける. ここで注意しなければならないのは, R も L と同様 m 階ということである(これは [KtS] の場合と異なる).

そこで, 形式表象 $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ に対して次のような逐次近似の反復スキームを入れる:

$$\begin{cases} LU_0 = 0, \\ LU_{k+1} = -R \circ U_k \tau^{\frac{1}{\lambda+1}} \mod \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t} \cdot \partial_w \qquad (k = 0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{2.7}$$

これは

$$(L + R\circ)U = 0 \mod \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t} \cdot \partial_w \tag{2.8}$$

に帰着される.

3. 常微分方程式と PURE 解

この節では, 主導的な方程式 $LU = 0$ あるいはある領域で正則な関数 F に対する常微分方程式 $LU = F$ について考察しよう.

$w = -\alpha_j(0)$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ と $w = \infty$ が作用素 L の特異点であった. さらに $Lu = 0$ の解 u は $O(|w|^{-1})$ 程度であるとする.

定義 3.1. 斉次方程式 $Lu = 0$ の解 u が α_j-pure であるとは, 各 $w = -\alpha_l(0)$ $(l \neq j)$ に正則に延長できることをいう (u は一般的には $w = -\alpha_j(0)$ で分岐する).

さて, α_j-pure 解に対して, 線型代数の簡単な理論から次の 2 つの定理を得る.

定理 3.2. *斉次方程式 $Lu = 0$ の解 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ で, 各 u_j $(j = 1,2,\cdots,m)$ が α_j-pure なものが存在する.*

定理 3.3. $w = -\alpha_2(0), -\alpha_3(0), \cdots, -\alpha_m(0)$ で正則である $F(w)$ に対して常微分方程式 $L(w, D_w)U(w) = F(w)$ の解 $U(w)$ で, $w = -\alpha_2(0), -\alpha_3(0), \cdots, -\alpha_m(0)$ で正則なものが存在する (一意的ではない).

次に, 反復スキーム (2.7) の収束を論じるために, 解空間とそこでの評価式を与えよう. 反復スキームには分数階微分が現れるが, これは Riemann-Liouville 積分で表される非局所作用素なので, 考える空間は大域的なものになる.

十分小さい $\delta_0, \varepsilon > 0$ に対し,

$$D_j := \{w \in \mathbb{C}; |w + \alpha_j(0)| \le \delta_0\} \quad (j = 2,3,\cdots,m), \tag{3.1}$$

$$\Omega^1 := \{w \in \mathbb{C}; w \neq 0, |\arg w| \le \pi - \varepsilon\} \tag{3.2}$$

とおく.

無限遠点 $w=\infty$ での方程式の状況を調べるため, $\beta\circ Q\circ\beta^{-1}$ に $z^{-(\lambda+1)}$ と $z^{\lambda+1}$ を施す. すると, $z^{-(\lambda+1)}\circ(\beta\circ Q\circ\beta^{-1})\circ z^{\lambda+1}$ は z^m で括れることがわかる. つまり, w 空間での方程式

$$(\beta\circ Q\circ\beta^{-1})U(w,\partial_t)=(L+R\circ)U(w,\partial_t)=0$$

は z 空間では $w=z^{-(\lambda+1)}$ なる変換によって,

$$z^m(M+N\circ)(z,\partial_z,\partial_t)V(z,\partial_t)=0$$

となることがわかる. ただし $M=z^{-(\lambda+1)}Lz^{\lambda+1}$ であり, N は残りの項である.

そこで十分小さい $\varepsilon_0>0$ に対して, 次のような解空間を考える:

$$X:=\{(F(w),G(z))\in\mathscr{O}_w(\Omega^1)\times\mathscr{O}_z(B(0;\varepsilon_0^{1/(\lambda+1)})) \\ ;wF(w)=G(z)\text{ with }w=z^{-(\lambda+1)},0<|z|<\varepsilon_0^{1/(\lambda+1)},|\arg z|<\frac{\pi}{2(\lambda+1)}\}. \tag{3.3}$$

また, その部分空間として次を定める:

$$\overset{\circ}{X}:=\{(F(w),G(z))\in X;G^{(l)}(0)=0,\ \ l=0,1,2,\cdots,m-1\}\subset X. \tag{3.4}$$

命題 3.4. $\partial_w,w\partial_w,\partial_w^{l/(\lambda+1)}$ $(l=1,2,\cdots)$ は自然に X の元に作用する.

この節の最後に, 反復スキームの収束を論じるために用いるノルムとその評価式を与えよう.

定義 3.5. $F(w)\in\mathscr{O}_w(\Omega^1)$ および $G(z)\in\mathscr{O}_z(B(0;\delta_0))$ に対して, 次のノルムを定義する:

$$\|F\|_k:=\max_{0\le l\le k}\sup_{w\in\Omega^1}|\partial_w^lF(w)|, \tag{3.5}$$

$$\|G\|'_k:=\max_{0\le l\le k}\sup_{z\in B(0;\delta_0)}|[\partial_w^l]G(z)|. \tag{3.6}$$

ここで $[\partial_w^k]G(z)$ は $z=0$ の近傍での (つまり, $w=\infty$ の近傍での) $G(z)$ への ∂_w^k の作用を表わす. つまり, $[*]$ はいつも z^m で割った作用を考えている.

定義 3.6. $(F(w),G(z))\in X$ に対して次のノルムを導入する:

$$\|(F,G)\|_k:=\max_{0\le l\le k}\left(\sup_{w\in\Omega^1}|\partial_w^lF(w)|+\sup_{z\in B(0;\delta_0)}|[\partial_w^l]G(z)|\right), \tag{3.7}$$

$$\|(F,G)\|_{\mu,m}:=\sup_{\substack{0\le k\le m\\ w\in\Omega^1\\ z\in B(0;\delta_0)}}\left(\frac{|w|}{1+|w|}\right)^{\mu+k-(m-1)_+}(|\partial_w^kF(w)|+|[\partial_w^k]G(z)|). \tag{3.8}$$

ただし,

$$(m-1)_+=\begin{cases}m-1, & m\ge 1,\\ 0, & m=0.\end{cases}$$

さらに, 分数階微分に関して次のノルムを入れる:

$$\|(F,G)\|_{l+\frac{\lambda}{\lambda+1}}:=\sum_{k=0}^{\lambda}\|\partial_w^{\frac{k}{\lambda+1}}(F,G)\|_l. \tag{3.9}$$

このノルムは $\sum_{k=0}^{(\lambda+1)l+\lambda}\|\partial_w^{\frac{k}{\lambda+1}}(F,G)\|_0$ と同値である.

注 3.7. G は F によって一意に決まるので, (F,G) の代わりに F のみを使って表わすことがある.

解析接続や Gronwall の補題によって, 以下の補題や命題が得られる.

補題 3.8. 常微分方程式 $LU = F \in \overset{\circ}{X}$ に対して, 次を満たすような定数 $C > 0$ と $(U,V) \in X$ が存在する：

$$\|(U,V)\|_m \leq C\|(F,G)\|_0.$$

命題 3.9. $\|(F,G)\|_{\frac{\lambda}{\lambda+1}} < \infty$ であるような $(F,G) \in \overset{\circ}{X}$ に対して常微分方程式 $LU = F$ を考える. このとき, 次の評価式を満たすような定数 C と $(U,V) \in X$ が存在する：

$$\|(U,V)\|_{m+\frac{\lambda}{\lambda+1}} \leq C\|(F,G)\|_{\frac{\lambda}{\lambda+1}}.$$

方程式 $LU = F$ の α_j-pure 解は定理 3.3 でみたように一意ではないが, 以下では上の評価式を満たすような α_j-pure 解を（上手く）一つに決定する.

補題 3.10. 常微分方程式 $LU = F$ に対し, μ とは無関係な定数 $C > 0$ が存在して次の評価式が満たされる：

$$\|U\|_{\mu,m} \leq C(\|F\|_{\mu,0} + |U(w_0)|).$$

ただし, $w_0 \in \mathbb{R}$ は十分大きい実数であり, α_j-*pure* 解を一つに決定する際に用いた数である.

命題 3.11. 次の評価式を満たすような定数 $C > 0$ が存在する：

$$\max\{\|U\|_{\mu,m}, \|V\|'_{0,m}\} \leq C(\max\{\|F\|_{\mu,0}, \|G\|'_0\} + |U(w_0)|).$$

4. 形式ノルムによる逐次近似解の収束性

この節では, 反復スキームによる擬微分作用素解の収束を [BK] 流の形式ノルムによって論じる.

まず, 正則解と非正則解の形式ノルムとして次のようなものを導入する.

定義 4.1. 形式表象 $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w)\tau^{-j/(\lambda+1)}$ の各項 $U_j(w)$ が Ω^1 で正則のとき, 形式ノルム $N_{m'}(U,V;T)$ $(m' = 0,1,2,\cdots)$ を次で定義する:

$$N_{m'}(U,V;T) := \sum_{j,l} \frac{T^{2j+l}}{(\frac{j+l}{\lambda+1})!} \left\{ \|\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}} U_j(w)\|_{m'} + \|[\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}}] V_j(z)\|'_{m'} \right\}. \tag{4.1}$$

ただし, $U_j(w)$ と $V_j(z)$ の間には $V_j(z) = wU_j(w)$ の関係があり, $(\frac{j+l}{\lambda+1})! = \Gamma(\frac{j+l}{\lambda+1}+1)$ とする. 同様に, 形式ノルム $N^{\mu}_{m'}(U,V;T)$ $(m' = 0,1,2,\cdots)$ を次で定義する:

$$N^{\mu}_{m'}(U,V;T) := \sum_{j,l} \frac{T^{2j+l}}{(\frac{j+l}{\lambda+1})!} \left\{ \|\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}} U_j(w)\|_{\mu+\frac{j+l}{\lambda+1},m'} + \|[\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}}] V_j(z)\|'_{m'} \right\}. \tag{4.2}$$

これらの形式ノルムを入れることで,反復スキームによる逐次近似解が収束することがわかる.

定理 4.2 (正則型). $U_0 \equiv U_{00}$ を Ω^1 での $LU_0 = 0$ の解とする. 各 $U_k = \sum_{j=-\infty}^{0} U_{jk}$ が

$$\partial_w^l U_k|_{w=0} = 0 \ \ (l = 0,1,2,\cdots,m-2; k \geq 1)$$

であるような反復スキームを満たす形式表象 U_k $(k = 1,2,\cdots)$ を構成する. このとき $U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$ は $N_m(U,V;T)$-ノルムに関して一様収束し,擬微分方程式

$$(L + R\circ)U = 0$$

の WKB 解である.

証明の方針のみを示す. 正則解の場合, w についての有界領域と $w = \infty$ の近傍に分けて考え, $w = \infty$ の近傍では $z = w^{-(\lambda+1)}$ なる変換を用いて,反復スキームを評価する. 具体的には,以下の命題によって上の定理が得られる.

命題 4.3. 常微分方程式 $LU = F$ において, $F = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(w)\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ および $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w)\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ の各成分 F_j および U_j は Ω^1 で正則であるとする. このとき,次を満たすような T の収束ベキ級数 $\Phi(T)$ で,その係数は F と U に無関係なものが存在する:

$$N_m(U,V;T) \ll \Phi(T)N_0(F,G;T).$$

命題 4.4. 次の評価を満たすような T の関数 $\phi_1(T)$ が存在する. ただし, $\phi_1(0) = 0$ である.
$U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w)\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ および $V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(w)\tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ の各項 $U_j(w), V_j(w)$ が Ω^1 で正則であるとき,

$$N_0(R\circ U, N\circ V;T) \ll \phi_1(T)N_m(U,V;T).$$

この 2 つの評価式から

$$\begin{aligned} &N_m(U_{k+1},V_{k+1};T) \\ &\ll \Phi(T)N_0(R\circ U_k, N\circ V_k;T) \\ &\ll \Phi(T)\phi_1(T)N_m(U_k,V_k;T) \\ &\ll \cdots \ll \{\Phi(T)\phi_1(T)\}^{k+1}N_m(U_0,V_0;T) \end{aligned}$$

となり,無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} N_m(U_k,V_k;T)$ が

$$(1-\Phi(T)\phi_1(T))^{-1}N_m(U_0,V_0;T)$$

に収束することがわかり,正則型の擬微分作用素解 $U(w,\tau)$ の収束が言える.
非正則解についても証明の方針は同様である.

5. 主定理の証明と F-MILD マイクロ函数

主定理の証明の方針は以下の通りである．まず，量子化 Legendre 変換に関して，

$$\beta(f(t)\delta(y)) = \frac{1}{2\pi}\partial_t f(t),$$
$$\beta \circ \partial_y \circ \beta^{-1} = -\sqrt{-1}w\partial_t,$$

が成り立つから，

$$\mathring{\mathscr{C}}_{\{x=0\}|\{x\geq 0\}} \ni u(x,t) \mapsto u(+0,t) \in \mathscr{C}_{\{x=0\}}$$

は，次の対応で表現される：

$$\begin{aligned}\beta\Big(u(+0,t)\frac{y_+^{\frac{k}{\lambda+1}}}{\Gamma(\frac{k}{\lambda+1}+1)}\Big) &= \beta\big(u(+0,t)\partial_y^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)}\delta(y)\big) \\ &= \beta \circ \partial_y^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \circ \beta^{-1} \circ \beta(u(+0,t)\delta(y)) \\ &= (-\sqrt{-1}w\partial_t)^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \cdot \frac{1}{2\pi}\partial_t u(+0,t).\end{aligned}$$

$y = x^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ であったから，

$$\beta\Big(u(+0,t)\frac{(\lambda+1)^{-\frac{k}{\lambda+1}}}{\Gamma(\frac{k}{\lambda+1}+1)}(x_+)^k\Big) = \frac{1}{2\pi}(-\sqrt{-1})^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)}w^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)}\partial_t^{-\frac{k}{\lambda+1}}u(+0,t)$$

であり，境界値 $\partial_x^k u(+0,t)$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ が $w^{-1-\frac{k}{\lambda+1}}$ の係数によって与えられることがわかる．

また，j-pure 解の分解については，常微分方程式に関する考察からわかる（詳細略）．

最後に，量子化 Legendre 変換前後の mild マイクロ函数解の対応について簡単に述べる．

分数ベキ座標変換をしているので，mild マイクロ函数といっても，分数ベキの特異性をもつような F-mild マイクロ函数を考えなければならない．しかし，x 変数について $1/(\lambda+1)$ F-mild マイクロ函数というものが定義できて，分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換後のマイクロ函数とを対応づけできる．このことについては，本研究集会での片岡清臣氏の講演の通りである．

References

[AN] Amano, K. and Nakamura, G., *Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 20, pp. 225–275 (1984)

[BK] Boutet de Monvel, L. and Krée, P., *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17**, pp. 295–323 (1967).

[Kt] Kataoka, K., *Microlocal analysis of boundary value problems with regular or fractional power singularities*, Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995), pp.215–225, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1996).

[KtS] Kataoka, K. and Sato, Y., *Formal symbol type solutions of Fuchsian microdifferential equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 9, pp.565–626 (2002).

[O] Oaku, T., *Microlocal boundary value problem for Fuchsian operators. I. F-mild microfunctions and uniqueness theorem*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, pp.287–317 (1985).

[U] Uchikoshi, K., *Cauchy problems for mixed-type operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36**, pp.191–230 (2000).

[Y] Yamane, H., *Branching of singularities for some second or third order microhyperbolic operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **2**, pp.671–749 (1995)