数理解析研究所講究録 1432 巻 2005 年 1-4

グラフ上の進化ゲーム

[1] 大槻　久(Hisashi Ohtsuki)、[2,3] Erez Lieberman、[2] Martin Nowak

[1] 九州大学大学院理学府生物科学専攻
(Department of Biology, Faculty of Sciences, Kyushu University)
[2] Program for Evolutionary Dynamics, Department of Organismic and Evolutionary Biology, Department of Mathematics, Harvard University
[3] Department of Applied Mathematics, Harvard University

進化ゲーム理論とは、プレーヤーの合理性を予め仮定することなくゲームの帰結を探る新しい方法論である。A、B の２つの純戦略から成る次の戦略形ゲーム

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える。ここで１行（列）目は戦略 A、２行（列）目は戦略 B に対応し、利得行列の各数値は行プレーヤーの利得である。このゲームの最もよく知られた進化動学はレプリケーター方程式[1]

$$\dot{x}_A = x_A(f_A - \bar{f})$$
$$\dot{x}_B = x_B(f_B - \bar{f})$$

（xは各戦略の頻度、fは各戦略の期待利得、$\bar{f}$は集団の期待利得）であろう。この際、集団は完全混合であり対戦はランダム対戦であると仮定されている。

しかしながら、実際の集団にはしばしば空間的・地理的構造があり、その為にプレーヤーはある特定の相手のみと対戦することがあり得る。このような集団の構造はゲームの帰結にどのような影響を与えるのであろうか？

これを調べるため、集団にグラフ構造を導入した。集団のサイズは N（一定）であるとし、N人のプレーヤー

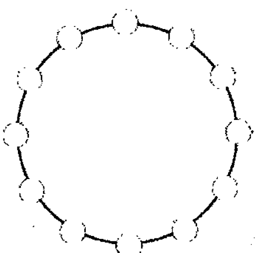

図１：円周構造

それぞれは１次元円周上に配置されているものとする。各プレーヤーは純戦略A、B のいずれか一方の戦略を取る。各プレーヤーの近傍は左右２人のプレーヤーのみであり、この近傍内でのみ相互作用が許されるものとする（図１）。

興味があるのはA戦略家の個体数N_Aの時間変化である。そこで次のような更新規則を考える。

(i) game stage

まず、各プレーヤーは左右二人の近傍とゲームを行う。得られた利得の平均をそのプレーヤーの利得pとする。

(ii) replacement stage

各プレーヤーの適応度fを、利得pの１次関数

$$f = wp + (1 - w)$$

で定める。ここでwは利得が適応度に及ぼす影響の強さを表すパラメータである。次に適応度fに応じて

「死亡する個体、空いたサイトを自分と同戦略の子で置換する個体」…(※)

をそれぞれ１個体ずつ決定する。Bが死亡しそれをAが置換すれば$N_A \to N_A + 1$、逆が起きれば$N_A \to N_A - 1$である。

この動学は集団遺伝学における Moran 過程[2]に対応する。全体を B 戦略家が占める集団の中に突然変異体の A 戦略家１個体が侵入した初期条件($N_A = 1$)から、集団全体が A 戦略家で占められた状態($N_A = N$)が到達される確率を、A 戦略の固定確率と言いρ_Aで表す。$w = 0$（利得は適応度に無関係）の場合明らかに$\rho_A = 1/N$であるので、ρ_Aが$1/N$より大きいか小さいかは、戦略 A が進化的に有利か不利かの指標となる。そこで$\rho_A > 1/N$となる条件を調べた。

解析の結果、(※)における個体の選び方の順番が重要であることが分かった。つまり

(1)「初めに置換をする個体を集団から選び、

次に置換される個体をその近傍から選ぶ」

(2)「初めに置換される個体を集団から選び、

次に置換をする個体をその近傍から選ぶ」

の２つの場合の間で結果に差異が生じることが分かった。これは Moran 過程を

グラフ上に拡張した為に起こる現象である。Birth と Death の順番が重要であることから(1)を BD-Moran 過程、(2)を DB-Moran 過程と呼ぶことにした。

(1) BD-Moran 過程

BD-Moran 過程では、置換をする個体がまず集団中から選ばれる。個体iの適応度をf_iとする時、個体iが出生個体として選ばれる確率は

$$\frac{f_i}{\sum_j f_j}$$

である。個体iが出生をする場合、近傍の 2 個体のどちらかが 1/2 の確率で死亡する。

計算の結果、$w \to 0$の極限(weak selection limit)では次の公式が成立することが分かった。

$$\rho_A > 1/N \Leftrightarrow (N^2 - 3N + 2)a + (N^2 + N - 2)b > (N^2 - N + 2)c + (N^2 - N - 2)d$$

特に$N \to \infty$の極限では、戦略 A が進化的に有利であるための条件は

$$a + b > c + d$$

で与えられる。

(2) DB-Moran 過程

DB-Moran 過程では、置換される個体がまず集団中から確率 $1/N$ でランダムに選ばれる。個体iが死亡個体として選ばれた場合、次に個体$i-1$と個体$i+1$ (mod N)が空いたサイトを巡り競争する。置換に成功する確率はそれぞれ

$$\frac{f_{i-1}}{f_{i-1} + f_{i+1}}, \quad \frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}}$$

で与えられる。

DB-Moran 過程では、$w \to 0$の極限で次の公式が成立する。

$$\rho_A > 1/N \Leftrightarrow (3N^2 - 11N + 8)a + (N^2 + 3N - 8)b > (N^2 - 3N + 8)c + (3N^2 - 5N - 8)d$$

特に$N \to \infty$の極限では、戦略 A が進化的に有利であるための条件は

$$3a + b > c + 3d$$

で与えられる。

これらの結果をよく知られた囚人のジレンマゲーム

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \quad T > R > P > S,\ 2R > T + S$$

に応用してみよう。ここで A=Cooperation（協力）、B=Defection（非協力）である。BD-Moran 過程においては協力行動が有利になるための条件は

$$R + S > T + P$$

で与えられるが、これは制約不等式下では成立し得ない。したがって BD-Moran 過程下で協力行動は進化し得ないことが分かる。反対に DB-Moran 過程では、協力の進化条件は

$$3R + S > T + 3P$$

となり、これは例えば$T = 6, R = 5, P = 2, S = 1$の時満たされる。つまり集団構造があるために協力が進化することが分かる。

BD-Moran 過程では、まず置換をする個体が選ばれ、次に置換される個体が選ばれる。これは排除的競争を意味する。動物で親が他テリトリーにいる敵対個体を排除し、そこに新たに子供を住まわせるような状況に対応するであろう。対して DB-Moran 過程では、まず置換される個体が選ばれ、次に置換をする個体が選ばれる。生物界の現象に例えればこれは植物のギャップを巡る競争などに対応するであろう。植物では成熟個体のいるサイトに種子を飛ばしたところで、光を巡る競争等で到底勝つことはできず、幼年個体が成熟個体を排除することはできない。近接サイトを置換できるのは、成熟個体が死に、そこにギャップができた場合であり、死をきっかけに競争がはじまる。

本研究ではグラフ上の進化ゲームについて、特に BD-Moran 過程と DB-Moran 過程の差異について調べた。上で述べたように、BD と DB の間には大きな違いが存在する。したがって、グラフ上で行われるゲームを分析にするに当たっては我々はこの点に十分に留意する必要があるとともに、焦点となっている現象の性質をより注意深く考察しなければならない。

参考文献

[1] J. Hofbauer & K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1988.

[2] Moran, P.A.P., Random processes in genetics. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **54**, 60-71, 1958