数理解析研究所講究録 1432 巻 2005 年 5-12

遅れを持つ非自励系 Lotka-Volterra 方程式の Permanence について

早稲田大学・理工・数理科学　飯田　一輝 (Kazuki Iida), 室谷　義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Sciences, School of Science and Engineering,
Waseda University

1　イントロダクション

次の形で表される，遅れを持つ複数種の非自励系 Lotka-Volterra 方程式を考える．$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\Big[a_i(t) - b_i(t)x_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}(t,s)x_j(t+s)ds\Big] \\ x_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, \ -\tau \leq t \leq 0 \ \text{かつ} \ \phi_i(0) > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし，$\tau = \sup\left\{\tau_{ij}(t), \sigma_{ij} \mid t \geq t_0, \ i, j = 1, 2, \ldots, n\right\}$.

$x_i(t)$ は i 番目の種の時刻 t での人口密度を表している．$a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_{ij}(t), \tau_{ij}(t)(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ は $R = (-\infty, +\infty)$ 上で定義され，任意の $t \in R$ に対して連続である．$k_{ij}(t, s)(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ は $R \times [-\sigma_{ij}, 0]$ 上で定義され，$t \in R$ に関して連続で，$s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に関して積分可能である．また，$\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ は非負の定数とする．

Definition 1.1. 系 (1.1) の任意の正の解 $x_i(t)$ に対して，

$$0 < \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \leq \limsup_{t\to\infty} x_i(t) < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

が成立するとき，系 (1.1) は ***persistence*** であるという．

Definition 1.2. 系 (1.1) の任意の正の解 $x_i(t)$ に対して，

$$0 < m \leq \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \leq \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \leq M < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

となる初期値によらない正定数 m と M が存在するとき，系 (1.1) は ***permanence*** であるという．

(1.1) のような式は数理生態学において非常に重要なモデルであり，これまで Teng [1,2], Ahmad and Lazer [3], Gopalsamy [4,5], Tineo and Alvarez [6], Zhao, Jiang and Lazer [7] 等の多くの論文で研究されてきた．Teng[1] は系 (1.1) が permanence かつ global attractive であることを証明しているのだが，permanence に関してはその証明に不十分な箇所があるのではないかと思い，条件を簡潔にして証明を完全にすることにした．

$t_0 \in R$ を初期時刻とし，系 (1.1) に対して次の条件を考える．ただし，関数 $f(t)$ に対して，$f(t) = f^-(t) + f^+(t)$, $f^-(t) = \min\left\{0, f(t)\right\}$, $f^+(t) = \max\left\{0, f(t)\right\}$ とする．

(A1) $1 \leq i, j \leq n$ に対し，$a_i(t), b_i(t), c_{ij}(t), \tau_{ij}(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上で有界で，かつ，任意の $t \geq t_0$ において，$a_i(t), b_i(t), \tau_{ij}(t)$ は非負とする．

(A2) $1 \le i, j \le n$ に対し，任意の $t \ge t_0$ において，$k_{ij}(t, s)$ は $s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に関して積分可能，かつ，任意の $t \ge t_0$ と $s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に対して，$|k_{ij}(t, s)| \le h_0(t)$ となる非負で $(-\infty, 0]$ 上積分可能な関数 $h_0(t)$ が存在する．

(A3) 各 $1 \le i \le n$ に対して，

$$\liminf_{t\to\infty} \left\{ b_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t, s)ds \right\} > 0. \tag{1.2}$$

(A4) $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\lambda_i(t)$，$\xi_i(t)$ を次のように定義する．

$$\lambda_i(t) = b_i(t) + c_{ii}^+(t) + \int_{-\sigma_{ii}}^{0} k_{ii}^+(t, s)ds, \quad \xi_i(t) = \sum_{j\neq i}^{n} \left(c_{ij}^+(t) + \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^+(t, s)ds \right) M.$$

ただし，

$$M = \sup \left\{ \frac{a_i(t)}{b_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t, s)ds} \,\middle|\, t \ge t_0,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\} \tag{1.3}$$

とする．このとき，

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[a_i(u) - \eta_0 \lambda_i(u) - \xi_i(u) \right] du = +\infty,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[a_i(u) - \eta_0 \lambda_i(u) - \xi_i(u) \right] du \ge -m',\ \ \forall t_2 > \forall t_1 \ge t_0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

を満たす正定数 η_0，m' が存在する．

次の定理が本報告の主結果である．

Theorem 1.1. (A1)–(A4) を仮定すると，系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して，

$$0 < m \le \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \le \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \le M < +\infty,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

を満たすような，(1.6) で定義した M と $m = \eta_0 \exp(-m')$ が存在する．M, m は初期値によらない正定数である．つまり，系 (1.1) は permanence である．

Remark. Teng [1] は，条件 (A3) と (A4) 代わりに以下の条件 (A5) と (A6) を用いて系 (1.1) が permanece であることを証明している．しかし，その証明は不完全であると思われる．

(A5) 関数

$$\beta_i(t) = b_i(t)p_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t)(1+\alpha)p_j + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t, s)(1+\alpha)p_j ds$$

が，任意の $t \ge t_0$ において $\beta_i(t) \ge a_i(t)$，$\beta(t) = \min_{1\le i\le n} \beta_i(t) > 0$，$\int_{t_0}^{\infty} \beta(t)dt = \infty$，$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_i(t)}{\beta(t)} \le 1$ を満たすような正定数 $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ と α が存在する．

(A6) 任意の $t \ge t_0$ に対して，$i = 1, 2, \ldots, n$ で，

$$\int_{t}^{t+\omega} \left[a_i(u) - \sum_{j\neq i}^{n} c_{ij}^+(u)p_j - \sum_{j\neq i}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^+(u, s)p_j ds \right] du \ge \zeta$$

となるような正の定数 ω, ζ が存在する．

2 Theorem 1.1 の証明

Theorem 1.1 を証明するのに，3つの Lemma を用意する．

Lemma 2.1. (A1)–(A3) を仮定する．そのとき，系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して，

$$\limsup_{t\to\infty} x_i(t) < +\infty,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

が成り立つ．

Proof. $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 P が存在して，$j \in P$ に対して，$\limsup_{t\to\infty} x_j(t) = +\infty$ が成立していると仮定する．すると，$j \in P$ に対して，

$$D^- x_j(\bar{t}_p^j) \geq 0,\ \ x_j(t) \leq x_j(\bar{t}_p^j),\ \ t_0 \leq t \leq \bar{t}_p^j \ \ \text{かつ}\ \ \lim_{p\to\infty} x_j(\bar{t}_p^j) = +\infty$$

となる点列 $\{\bar{t}_p^j\}_{p=1}^{\infty}$ が存在する．ただし，$D^- x_j(t)$ は $x_j(t)$ の Dini の左下微分を表すとする．また，十分大きな正の整数 p に対して，

$$x_j(t) \leq x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}),\ \ t_0 \leq \forall t \leq \bar{t}_p^{i_p},\ \ 1 \leq j \leq n$$

となる $i_p \in P$ が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} 0 &\leq D^- x_j(\bar{t}_p^{i_p}) \\ &\leq x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p})\Big[a_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) - \Big(b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_p j}}^{0} k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s)ds\Big)x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p})\Big] \end{aligned}$$

よって (1.2) より，$b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_p j}}^{0} k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s)ds > 0$ なので，

$$x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) \leq \frac{a_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p})}{b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_p j}}^{0} k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s)ds} < +\infty$$

を得るが，これは矛盾． □

Lemma 2.2. (A1)–(A3) を仮定する．そのとき，系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して，

$$\limsup_{t\to\infty} x_i(t) \leq M,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

が成り立つ．M は (1.6) で定義したものである．

Proof. Lemma 2.1 より，$\limsup\limits_{t\to\infty} x_i(t) < +\infty\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ なので，

$$\bar{x} = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\limsup_{t\to\infty} x_i(t)\right\} \tag{2.1}$$

となる $\bar{x}$ をとることができる．つまり，$\bar{x} = \limsup_{t\to\infty} x_{i_0}(t)$ となる $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在する．このとき，$\bar{x} \leq M$ となることを示す．$\bar{x} > M$ を仮定する．

(i) $x_{i_0}(t)$ がある時刻より先では，単調減少する場合：$\bar{x} > M$ より，

$$\bar{x} > M + \eta \tag{2.2}$$

となる $\eta > 0$ がとれる．この η に対して，十分大きな時刻 $T_0 > 0$ をとると，$t \geq T_0$ において，

$$0 < \varepsilon < \eta \ \inf\left\{ \frac{b_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t,s)ds}{b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t,s)ds} \,\middle|\, i = 1,2,\ldots,n \right\} \tag{2.3}$$

を満たす ε をとり，

$$\overline{x} - \varepsilon < x_{i_0}(t) < \overline{x} + \varepsilon \tag{2.4}$$

とすることができる．また，(2.1) より，一般の $1 \leq i \leq n$ に対しても，$t \geq T_0$ において，

$$x_i(t) < \overline{x} + \varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.5}$$

とすることができる．$T_0' = T_0 + \tau$ とおくと，(2.2)，(2.4)，(2.5) より，$t \geq T_0'$ に対して，

$$\begin{aligned} x_{i_0}'(t) &< x_{i_0}(t)\Big[a_{i_0}(t) - b_{i_0}(t)(\overline{x} - \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t)(\overline{x} + \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)(\overline{x} + \varepsilon)ds\Big] \\ &< x_{i_0}(t)\Big[a_{i_0}(t) - \Big(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)M \\ &\qquad - \Big(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)\eta \\ &\qquad + \Big(b_{i_0}(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)\varepsilon\Big] \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる．すると，(1.3)，(2.3) より，

$$a_{i_0}(t) - \Big(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)M < 0$$

$$-\Big(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)\eta + \Big(b_{i_0}(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^-(t,s)ds\Big)\varepsilon < 0$$

なので，(2.6) において，

$$x_{i_0}'(t) < -\delta x_{i_0}(t) \tag{2.7}$$

を満たす定数 $\delta > 0$ をとることができる．ここで，(2.7) の両辺を T_0' から t まで積分すると，$x_{i_0}(t) < x_{i_0}(T_0')\exp\{-\delta(t - T_0')\}$ となり，$t \to \infty$ とすれば，$x_{i_0}(T_0')\exp\{-\delta(t - T_0')\} \to 0$ となるので矛盾．

(ii) (i) 以外の場合：このとき，$x_{i_0}'(t_p^{i_0}) \geq 0$ かつ $\limsup_{p\to\infty} x_{i_0}(t_p^{i_0}) = \overline{x}$ となる点列 $\{t_p^{i_0}\}_{p=1}^{\infty}$ が存在する．また，(i) と同様にして，(2.2) を満たす $\eta > 0$ がとれる．この η に対して，十分大きな時刻 $T_1 > 0$ と正の整数 p_1 をとると，$t \geq T_1$ かつ $p \geq p_1$ において，

$$0 < \varepsilon < \eta \ \inf\left\{ \frac{b_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t,s)ds}{b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{ij}^-(t,s)ds} \,\middle|\, i = 1,2,\ldots,n \right\} \tag{2.8}$$

を満たす ε をとり，

$$\overline{x} - \varepsilon < x_{i_0}(t_p^{i_0}) \tag{2.9}$$
$$x_i(t) < \overline{x} + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.10}$$

とすることができる．$T_1' = T_1 + \tau$ とおく．$t_{p_1}^{i_0} \geq T_1'$ としても一般性を失わない．よって，(2.2), (2.9), (2.10) より，$p \geq p_1$ のとき，

$$\begin{aligned}
0 &\leq x_{i_0}'(t_p^{i_0}) \\
&< x_{i_0}(t_p^{i_0})\Big[a_{i_0}(t_p^{i_0}) - b_{i_0}(t_p^{i_0})(\overline{x} - \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0})(\overline{x} + \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}, s)(\overline{x} + \varepsilon)ds\Big] \\
&< x_{i_0}(t_p^{i_0})\Big[a_{i_0}(t_p^{i_0}) - \Big(b_{i_0}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}, s)ds\Big)M \\
&\qquad - \Big(b_{i_0}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}, s)ds\Big)\eta \\
&\qquad + \Big(b_{i_0}(t_p^{i_0}) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_0 j}}^{0} k_{i_0 j}^{-}(t_p^{i_0}, s)ds\Big)\varepsilon\Big]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．すると，(1.3), (2.8) より，(2.11) は $0 \leq x_{i_0}'(t_p^{i_0}) < 0$ となり矛盾．□

Lemma 2.3. (A1)–(A4) を仮定する．そのとき，系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して，

$$0 < m \leq \liminf_{t \to \infty} x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

を満たす正定数 $m = \eta_0 \exp(-m')$ が存在する．

Proof. ある番号 $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，任意の $t \geq T_2$ において $x_{i_1}(t) < \eta_0$ が成立するような十分大きな T_2 がとれると仮定する．(1.1) より，

$$\begin{aligned}
x_{i_1}'(t) &\geq x_{i_1}(t)\Big[a_{i_1}(t) - b_{i_1}(t)x_{i_1}(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{i_1 j}^{+}(t)x_j(t - \tau_{i_1 j}(t)) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma_{i_1 j}}^{0} k_{i_1 j}^{+}(t, s)x_j(t + s)ds\Big] \\
&> x_{i_1}(t)\Big[a_{i_1}(t) - \eta_0 \lambda_{i_1}(t) - \xi_{i_1}(t)\Big].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(2.12) を T_2 から t まで積分すると，$x_{i_1}(t) > x_{i_1}(T_2)\exp\Big(\int_{T_2}^{t}\big[a_{i_1}(u) - \eta_0\lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)\big]du\Big)$ を得る．ここで $t \to \infty$ とすれば，(1.4) より，$x_{i_1}(T_2)\exp\Big(\int_{T_2}^{t}\big[a_{i_1}(u) - \eta_0\lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)\big]du\Big) \to \infty$ となり，矛盾．ゆえに，$x_{i_1}(T_2) = \eta_0$ を満たす十分大きな T_2 が存在することがわかる．次に，(2.12) を T_2 から t まで積分すると，(1.5) より，

$$x_{i_1}(t) > x_{i_1}(T_2)\exp\Big(\int_{T_2}^{t}\big[a_{i_1}(u) - \eta_0\lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)\big]du\Big) \geq \eta_0 \exp(-m')$$

を得る．よって，$m = \eta_0 \exp(-m')$ とすればよい．□

Proof of Theorem 1.1. Lemma 2.1–2.3 より，Theorem 1.1 の結論を得る．□

3 条件について

まず，条件 (A4) が条件 (A6) を含むことを示す．

Lemma 3.1. 有界で積分可能な関数 $g(u)$ に対して，

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\omega} g(u)du > 0 \tag{3.1}$$

を満たす正定数 ω が存在すると仮定する．そのとき，$g(u)$ は

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} g(u)du = +\infty \tag{3.2}$$

を満たし，また，

$$\int_{t_1}^{t_2} g(u)du \geq -m', \quad \forall t_2 > \forall t_1 \geq t_0 \tag{3.3}$$

を満たす正定数 m' が存在する．

Proof. (3.1) より，$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\omega} g(u)du = m$ を満たす $m > 0$ を取ることができ，また，任意の $t > T$ に対して，

$$\int_t^{t+\omega} g(u)du \geq m - \varepsilon > 0 \tag{3.4}$$

が成立するような $\varepsilon > 0$ と十分大きな T が存在する．

まず，(3.1) $\Rightarrow$ (3.2) を示す．$g(u)$ を t から $t + n\omega$ まで積分すると，(3.4) より，

$$\int_t^{t+n\omega} g(u)du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\omega+t}^{(i+1)\omega+t} g(u)du \geq n(m - \varepsilon).$$

$n \to \infty$ とすれば，$\int_{t_0}^{\infty} g(u)du = +\infty$ となるので (3.2) が成立．

次に，(3.1) $\Rightarrow$ (3.3) を示す．$g(u)$ を t_1 から t_2 まで積分すると (ただし，$t_2 > t_1 \geq T$)，

$$\int_{t_1}^{t_2} g(u)du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_1+i\omega}^{t_1+(i+1)\omega} g(u)du + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u)du \geq n(m-\varepsilon) + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u)du$$

を得る．$0 \leq t_2 - (t_1 + n\omega) < \omega$ としても一般性を失わない．$g(u)$ は有界であるので，

$$n(m-\varepsilon) + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u)du \geq -m'$$

を満たす $m' > 0$ が存在する．以上より，(3.3) は成立． □

ここで，(3.2) と (3.3) を満たすが，(3.1) は満たさない $g(u)$ の例を紹介する．

Example.

$$g(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{3n+1}} \sin(\frac{\pi}{2^{3n}} u) & (2^{3n} \leqq u \leqq 2^{3n+1}) \\ \frac{\pi}{2^{3n+1}} \sin(\frac{\pi}{2^{3n+1}} u + \pi) & (2^{3n+1} \leqq u \leqq 2^{3n+2}) \\ 0 & (2^{3n+2} \leqq u \leqq 2^{3n+3}) \end{cases}$$

とする．$g(u)$ を 2^{3n} から 2^{3n+1} までと，2^{3n+1} から 2^{3n+2} までそれぞれ変数変換を用いて積分すると，

$$\int_{2^{3n}}^{2^{3n+1}} g(u)du = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin\theta d\theta = -1 \ , \ \int_{2^{3n+1}}^{2^{3n+2}} g(u)du = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin\theta d\theta = 2$$

を得る．今，$t = t_n = 2^{3n}$ に対して，$0 \le \omega_n \le 2^{3n}$ を満たすような ω_n をとると，

$$\int_{t_n}^{t_n+\omega_n} g(u)du \le 0,$$

となり，これは (3.1) を満たさない．しかし，

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t} g(u)du = +\infty \ , \ \int_{t_1}^{t_2} g(u)du \ge -1$$

であり，つまり，(3.2) と (3.3) を満たす．

この例では関数 $g(u)$ を与えているが，(1.1) の係数 $a_i(u)$ 等は与えていない．つまり，(1.1) の具体例は与えていないのだが，この例によって，条件 (A6) が条件 (A4) に含まれることがわかる．

Corollary. Ahmad and Lazer [3] による averaged conditions を用いると，(1.4) と (1.5) の十分条件として，

$$m[a_i - \xi_i] > 0 \ \ and \ \ M[\lambda_i] < +\infty, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

を得ることができる．ただし，$[t_0, +\infty]$ 上で有界で連続な関数 $c(t)$ に対して，

$$\begin{cases} m[c] = \liminf\limits_{t\to\infty}\left\{\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} c(s)ds \,\middle|\, t_0 \le t_1 < t_2 \ \ and \ \ t_2 - t_1 \ge t\right\}, \\ M[c] = \limsup\limits_{t\to\infty}\left\{\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} c(s)ds \,\middle|\, t_0 \le t_1 < t_2 \ \ and \ \ t_2 - t_1 \ge t\right\}. \end{cases}$$

と定義する．

4 まとめと今後の課題

Teng[1] では，上界に関して，各 i ごとに異なる上界をとっていたが，ここでは条件を簡潔にし，共通の上界 M をとることによって証明した．また，Muroya[8] では，係数行列の対角成分以上が正という符号条件をつけて persistence であることを証明しているが，ここではそのような符号条件をなくし permanence まで証明した．下界に関しては，Teng[1] の条件を 2 つの条件にわけて証明した．これが改良点である．今後の課題としては，S.Liu, M.Kouche, and N.Tater [9] に見られるような逐次反復法を使うことによって，各成分 i ごとに上界・下界を改善することが期待される．

参考文献

[1] Z. Teng, Nonautonomous Lotka-Volterra Systems with Delays, *J. Differential Equations* **179**(2002), 538-561.

[2] Z. Teng, The almost periodic Kolmogorov competitive systems, *Nonlinear Analysis* **42**(2000), 1221-1230.

[3] S. Ahmad, A.C. Lazer, Average conditions for global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis* **40**(2000), 37-49.

[4] K. Gopalsamy, Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **27**(1985), 66-72.

[5] K. Gopalsamy, Global asymptotic stability in an almost-periodic Lotka-Volterra system, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **27**(1986), 346-360.

[6] A. Tineo, C. Alvarez, A different consideration about the globally asymptotic stable solution of the periodic n-competing species problem, *J. Math. Anal. Appl.* **159**(1991), 44-50.

[7] J.Zhao, J.Jiang, A.C.Lazer, The Permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis* **5**(2004), 265-276.

[8] Yoshiaki Muroya, Persistence and Global Stability for Nonautonomous Lotka-Volterra Delay Differential Systems, *Nonlinear Analysis* **9**(2002), Number 3, 31-45.

[9] S.Liu, M.Kouche, N.Tater, Permanence extinction and global asymptotic stability in a stage structured system with distributed delays, *J. Math. Anal. Appl.* **301**(2005), 187-207.