数理解析研究所講究録 1433 巻 2005 年 1-8

ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて

近畿大学理工学部　青木 貴史 (Takashi Aoki)

1　はじめに

完全 WKB 解析は線型常微分方程式や高階版を含む Painlevé 方程式の解析に数多くの成果を挙げているが，現在までのところ，1 変数の場合に主眼があり，偏微分方程式系を正面から扱ったものは，ほとんど無い．もちろん Painlevé 方程式の解析はモノドロミー保存変形という観点が重要であり，変形方程式を連立させるという点で偏微分方程式系が大きな役割を果たしているが，主たる対象は非線型常微分方程式である．本稿の目的は，いくつかの例を通じてホロノミー系の完全 WKB 解として何を考えるのが自然かを考察し，一般論への足掛かりを模索したい．

2　Pearcey 積分および，その一般化

次の積分は Pearcey 積分と呼ばれている：

$$w(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t^4-xt^2-yt\right)dt. \tag{1}$$

ここで (x,y) は独立変数であり，積分は実数直線上を取っているが，被積分函数が遠方で急減少する複素平面上の非自明な路を取ることもできる．そのような路で独立なものは実数直線を含め 3 本あり，それぞれの路に応じて線型独立な 3 つの函数が得られ，次の微分方程式系の解空間の基底を成す（岡本-木村 [3]）：

$$\begin{cases}\partial_x^2 w = x\partial_x w+\dfrac{1}{2}y\partial_y w+\dfrac{1}{2}w,\\ \partial_x\partial_y w = x\partial_y w-\dfrac{1}{2}yw,\\ \partial_y^2 w=-\partial_x w.\end{cases} \tag{2}$$

これは Airy 積分

$$v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^3}{3}+xt\right)dt \tag{3}$$

および，この積分が満たす微分方程式（いわゆる Airy の微分方程式）

$$\partial_x^2 v = xv \tag{4}$$

の自然な 2 変数化のひとつと見なすことができる．被積分函数が t についての多項式で，その次数が (3) では 3 次，(1) では 4 次となっており，独立変数 x あるいは x, y は最高次部分 $-\dfrac{t^3}{3}$ あるいは $-\dfrac{t^4}{2}$ の変形パラメータと理解できる．これらの積分を一般化し，さらに完全 WKB 解析を行うため次のような積分で定まる函数を考える：

$$u = \int \exp(\eta f(x,t))dt, \tag{5}$$

ただし，η は大きなパラメータ，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ であり

$$f(x,t) = t^{n+2} + x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_1 t \tag{6}$$

とおいた．積分路は，複素 t 平面の遠方において被積分函数が急減少する 2 つの方向を結ぶように取ることを念頭に置いているが，実際は D-加群としての積分を考える．被積分函数を特徴付けるホロノミー系は簡単に書き下せるので，それを積分すると次が得られる：

命 題 1 上の積分で定義された u は次の微分方程式系を満たす：

$$\left\{ \begin{array}{c} ((n+2)(\eta^{-1}\partial_1)^{n+1} + nx_n(\eta^{-1}\partial_1)^{n-1} + \cdots + 2x_2\eta^{-1}\partial_1 + x_1)u = 0, \\ (\eta^{-1}\partial_2 - (\eta^{-1}\partial_1)^2)u = 0, \\ \vdots \\ (\eta^{-1}\partial_n - (\eta^{-1}\partial_1)^n)u = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

ただし，$\partial_k = \partial/\partial x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ である．

少し正確に述べると u の零化イデアルが (7) の左辺に現れる n 個の微分作用素により生成されることが証明できる (秋山 [1])．なお，これらの微分作用素は互いに可換である．

次に，この方程式系の WKB 解を考えよう．簡単のため $n = 2$, すなわち本質的に Pearcey 積分の場合をのみ議論を行う．方程式は

$$\left\{ \begin{array}{c} (4(\eta^{-1}\partial_1)^3 + 2x_2\eta^{-1}\partial_1 + x_1)u = 0, \\ (\eta^{-1}\partial_2 - (\eta^{-1}\partial_1)^2)u = 0. \end{array} \right. \tag{8}$$

となる．1変数の場合の類推から，

$$S^{(1)} = \eta^{-1}\frac{\partial_1 u}{u}, \quad S^{(2)} = \eta^{-1}\frac{\partial_2 u}{u} \tag{9}$$

を考えるのが自然である．これらを (8) に代入すると第1式から

$$4{S^{(1)}}^3 + 2x_2 S^{(1)} + x_1 + \eta^{-1}12S^{(1)}\partial_1 S^{(1)} + \eta^{-2}4\partial_1^2 S^{(1)} = 0, \tag{10}$$

また，第2式からは

$$S^{(2)} - (\eta^{-1}\partial_1 S^{(1)} + {S^{(1)}}^2) = 0 \tag{11}$$

が得られる．これらは1変数2階の場合の Riccati 方程式にあたる．今の場合，(10) のみから $S^{(1)}$ が決められる．すなわち，

$$S^{(1)} = S_0^{(1)} + \eta^{-1}S_1^{(1)} + \eta^{-2}S_2^{(1)} + \cdots \tag{12}$$

とおいて第1式に代入，η の各冪の係数を比べると，主部 (η^0 の項) より

$$4{S_0^{(1)}}^3 + 2x_2 S_0^{(1)} + x_1 = 0 \tag{13}$$

が得られ，この3次方程式を解くことにより $S_0^{(1)}$ が決まる．$S_0^{(1)}$ （の分枝）を決めると，低次の項は帰納的に決まる．このようにして $S^{(1)}$ が得られる．さらに，(11) から $S^{(2)}$ が定まる．もちろん，これも

$$S^{(2)} = S_0^{(2)} + \eta^{-1}S_1^{(2)} + \eta^{-2}S_2^{(2)} + \cdots \tag{14}$$

という展開を持つ．このとき

命 題 2 上のように構成された $S^{(1)}, S^{(2)}$ は

$$\partial_2 S^{(1)} = \partial_1 S^{(2)} \tag{15}$$

を満たす．すなわち1形式 ω を $\omega = S^{(1)}dx_1 + S^{(2)}dx_2$ で定めると $d\omega = 0$ が成り立つ．

したがって，適当な端点 (a_1, a_2) を固定して積分

$$\int_{(a_1,a_2)}^{(x_1,x_2)} \omega \tag{16}$$

を考えると，これは多価函数を係数とする η^{-1} の形式的冪級数となる．この形式冪級数の指数函数を WKB 解と呼ぶのは自然であろう．

定 義 3 指数函数項つき形式的冪級数

$$\psi = \exp\left(\eta \int_{(a_1,a_2)}^{(x_1,x_2)} \omega\right)$$

を (8) の WKB 解と呼ぶ.

1 変数の完全 WKB 解析における基礎概念として「変わり点」と「ストークス曲線」があるが, 高次元になると底空間において「変わり点」は複素超曲面を成し「ストークス曲線」は実超曲面を成すだろう. 次の「定義」は 1 変数の場合からの類推としては自然なものであると思われる. 上の例に限定した暫定的なものであるが, 一応, 一般的な書き方をしておこう. 3 次方程式 (13) の 3 つの解の取り方に応じて, 上のように得られた 1 形式を $\omega^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ と書く. また, $\omega^{(j)}$ の η に関する主部 (0 次の項) を $\omega_0^{(j)}$ と書く. もちろん, このように番号付けをするためには適当な「カット」を底空間に入れておく必要がある.

定 義 4 $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ が (8) の変わり点であるとは, $j, j' \in \{1, 2, 3\}$ $(j \neq j')$ が存在して

$$\omega_0^{(j)}(a_1, a_2) = \omega_0^{(j')}(a_1, a_2)$$

となるときをいう. このような変わり点 (a_1, a_2) に対して

$$\mathrm{Im} \int_{(a_1,a_2)}^{(x_1,x_2)} (\omega_0^{(j)} - \omega_0^{(j')}) = 0$$

を満たす (x_1, x_2) の集合を考え, この集合の, すべての変わり点に関する和集合をストークス曲面という.

今の場合, 変わり点全体の集合は簡単に求まる. 実際, 3 次方程式 (13) の判別式が消えるところを考えればよい. すなわち,

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, 27x_1^2 + 8x_2^3 = 0\} \tag{17}$$

となる. (8) の第 1 式を見れば明らかなように, これは変数 $x_2 \neq 0$ を固定すると Berk-Nevins-Roberts [2] の例と本質的に同じである. また, $x_2 = 0$ の場合には大山 [4] で考察された方程式となる.

もともと u を与えた積分表示と WKB 解の関係について, 一つ注意を与えておく. 今は $n = 2$ としているので

$$u = \int \exp\left(\eta(t^4 + x_2t^2 + x_1t)\right) dt$$

である．ここで

$$y=-(t^4+x_2t^2+x_1t) \tag{18}$$

と変数変換する．これを逆に解いたものを $t=t(x_1,x_2,y)$ で表す．

$$dt=-\frac{1}{4t^3+2x_2t+x_1}dy \tag{19}$$

であるから

$$g(x_1,x_2,y)=-\frac{1}{4t^3+2x_2t+x_1}\bigg|_{t=t(x_1,x_2,y)}$$

とおくと

$$u=\int\exp(-\eta y)g(x_1,x_2,y)dy \tag{20}$$

となる．これと WKB 解 ψ の Borel 和を与える式

$$\int\exp(-\eta y)\psi_B(x_1,x_2,y)dy \tag{21}$$

を比較してみる．ただし ψ_B は ψ の Borel 変換である．すると積分して消えるような適当な正則函数と定数倍を法として $g\equiv\psi_B$ となるはずである．したがって，ψ_B の特異点集合と g の特異点集合は一致すると期待できる．そして g の特異点集合は，その定義により (18) を t の多項式と見なしたときの判別式が消える点全体の集合に含まれる．この集合は簡単に計算できて

$$256y^3-128x_2^2y^2+(144x_1^2x_2+16x_2^4)y-27x_1^4-4x_1^2x_2^3=0 \tag{22}$$

を満たす点 (x_1,x_2,y) 全体の集合となる．もちろん g は多価関数であり，その特異点は単純に決定できないが，この集合に含まれることは分かる．そして Borel plane (y-平面) での特異点が（多価性を無視して）ぶつかるのは (22) の y に関する判別式が消えるところで与えられる．それは

$$x_1(27x_1^2+8x_2^3)=0 \tag{23}$$

となり，集合としては上で導入した「変わり点」集合 (17) と $\{x_1=0\}$ の和集合となるが，後者は「仮想変わり点」となっている．

3 首藤積分

量子化 Hénon 写像に関連して首藤が考察した積分

$$I(q_0, q_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\eta S(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \, dq_1 dq_2 \tag{24}$$

の満たす微分方程式を考える．ただし $\eta = \frac{i}{\hbar}$,

$$S = q_1 + \frac{{q_1}^3}{3} + \frac{(-q_0 + q_1)^2}{2} + q_2 + \frac{{q_2}^3}{3} + \frac{(-q_1 + q_2)^2}{2} + \frac{(-q_2 + q_3)^2}{2}$$

である．これも多項式の指数函数を積分したものであるから，D-加群の積分計算アルゴリズムによって，$\psi = I(q_0, q_3)$ の零化イデアルの生成元が計算できる (佐藤 [5])．方程式の形に書くと

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\right)^2 - 2\eta(q_0 + 1)\frac{\partial}{\partial q_0} + \eta\frac{\partial}{\partial q_3} + \eta^2(1 - q_3 + q_0 + q_0^2) - \eta\right]\psi = 0, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\right)^2 - 2\eta(q_3 + 1)\frac{\partial}{\partial q_3} + \eta\frac{\partial}{\partial q_0} + \eta^2(1 - q_0 + q_3 + q_3^2) - \eta\right]\psi = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

となる．左辺に現れた２つの作用素は可換である．前節と同様に方程式 (25) の WKB 解が構成できる．すなわち，

$$T^{(0)} = \eta^{-1}\frac{\partial_0 \psi}{\psi}, \quad T^{(3)} = \eta^{-1}\frac{\partial_3 \psi}{\psi}$$

とおくと $T^{(0)}, T^{(3)}$ は「代数的」に決まり，１形式

$$\omega = T^{(0)} dq_0 + T^{(3)} dq_3$$

は $d\omega = 0$ を満たすことが証明できるので，その積分の指数函数を考えて，

$$\psi = \exp\left(\eta \int^{(q_0, q_3)} \omega\right)$$

を (25) の WKB 解と呼ぶのである．「変わり点」や「Stokes 曲面」の定義は形式的には前節と同様である．ただし，今の場合，WKB 解の主部を決定する代数方程式は４次となるので定義４における j, j' を $\{1, 2, 3, 4\}$ から取る，と読み替える必要がある．首藤は (24) の漸近挙動をさまざまな手法で解析

しており，その際,「変わり点」等の概念のみならず「仮想変わり点」も有効に活用されている．これについては [6], [7] を参照.

さて，ここまで η は大きなパラメータとしてきたが，これを変数と見なすと (25) はサブホロノミックであり，(24) を特徴づけるには方程式が不足している．もう一つの方程式を得るために

$$\frac{\partial}{\partial q_0}\exp\eta S=\eta(q_0-q_1)\exp\eta S,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}\exp\eta S=\eta(q_3-q_2)\exp\eta S$$

に注意する．これらより

$$q_1\exp\eta S=\left(q_0-\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial q_0}\right)\exp\eta S,$$

$$q_2\exp\eta S=\left(q_3-\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\exp\eta S$$

が得られるので

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\exp\eta S=S\exp\eta S$$

の右辺の指数函数に掛かる S から q_1, q_2 を消去できる．さらに積分すると (25) を満たしているので q_0, q_3 それぞれについての 2 階微分は 1 階微分に下げられる．以上より次が得られる：

命 題 5 首藤積分 (24) は (25) および次の方程式を満たす：

$$\begin{aligned}\Big[&-3\eta^2\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial q_0\partial q_3}+\eta(4q_0-q_3+1)\frac{\partial}{\partial q_0}+\eta(4q_3-q_0+1)\frac{\partial}{\partial q_3}\\&-\eta^2\left(\frac{11}{2}(q_0^2+q_3^2)-q_0q_3+2(q_0+q_3)-2\right)+2\eta\Big]\psi=0.\end{aligned}\tag{26}$$

References

[1] 秋山哲志, 一般化 Pearcey 積分の代数解析的研究, 近畿大学修士論文, 2005.

[2] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts, New Stokes' line in WKB theory, J. Math. Phys., **23** (1982), 988-1002.

[3] K. Okamoto and H. Kimura, On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables, Quart. J. Math. Oxford (2), **37** (1986), 61-80.

[4] Y. Ohyama, Connection formula for Airy-type equations, 数理解析研究所講究録 **931** (1995), pp. 1-19.

[5] 佐藤亮介, 量子化 Hénon 写像と D-加群の積分, 近畿大学修士論文, 2005.

[6] 首藤　啓, 池田研介, エノン写像の exact WKB 量子化に向けて, 数理解析研究所講究録 **1180** (2000), pp. 48-58

[7] A. Shudo, Stokes geometry for the quantized Hénon map, preprint.