

超流動ヘリウム中での乱流遷移

大阪市立大学理学部物理学科 三谷 陽 (Akira Mitani)

Faculty of Science,
Osaka City University

液体 ^4He が 2.17K 以下で超流動状態に転移し液体の粘性が消失することが Kapitza により発見されて以来、超流動は多くの研究者たちを魅了し続けてきた。超流動状態は、ミクロなスケールの統治則である量子力学が、流体の粘性と言うマクロな輸送現象に劇的な変化をもたらす、典型的な巨視的量子現象として注目された。通常の流体では見られない超流動状態に固有な性質の多くは、Tisza の二流体モデルと呼ばれる現象論の導入により見事に説明された。二流体モデルでは、流体はフォノン・ロトンの素励起からなり粘性を伴う常流体と非粘性の超流体という独立な二つの成分から構成され、それぞれが密度 ρ_n , ρ_s を伴い、速度 v_n , v_s で流れるとする。二流体間では、運動量、エネルギーのやりとりがないため、非粘性である超流体成分の流れは半永久的に減衰しない。しかしながら、この流れがある臨界速度を超えると流れが減衰し、超流体は文字通りの永久流ではなくなる。これは、循環が循環量子 κ の整数倍に量子化された量子渦が発生し、流れにより成長し複雑に絡みあった、超流動乱流状態が実現したためである。従って、量子渦のダイナクスは超流動流の安定性と密接に関係し、また多くの興味深い現象を引き起こすため、現在でも精力的に研究されている。また、超流動中の渦度 ω は渦の存在する位置にのみ集中し、理想的な渦糸が実現していることが分かっている [1]。

近年、このような循環が量子化された量子渦糸からなる量子乱流が古典乱流と同様にそのエネルギースペクトルが Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を示す [2] など、超流動乱流と古典乱流との間の相似性が活発に議論されはじめている [3]。その一方で両者の相違性もまた見出されている。代表的なものとして、超流動 ^3He - B 相の乱流遷移が速度によらず温度に依存するパラメーター q という量により決定され、 $q \geq 1$ では系は層流に向かい、逆に $q \leq 1$ では系は乱流に向かうという超流動乱流特有の現象もヘルシンキ工科大らのグループにより報告がある [4]。しかし、このパラメーター q は古典乱流における Reynolds 数の逆数に相当するものだと解釈することができ、

超流動ヘリウムの系においても古典流体と同様の物理により系の層流乱流遷移が引き起こされる可能性を示唆するもので、大変興味深い。

広く知られているように古典流体での乱流遷移は Reynolds 数が決定する。この量は、系の特徴的な長さ L と速度 U とした時の非圧縮性粘性流体の渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

の、右辺第1項（慣性項）と、第2項（粘性項）の大きさの比

$$\text{Reynolds number} \equiv \frac{\text{inertial term}}{\text{viscosity term}} = \frac{UL}{\nu} \quad (2)$$

と解釈される。この Reynolds 数は系の特徴的な速度に依存する。ここで、 \mathbf{u} 、 $\boldsymbol{\omega}$ と ν はそれぞれ、流体速度、渦度、動粘性率をあらわす。この Reynolds 数は系の特徴的な速度に依存するため、古典流体での乱流遷移は系の特徴的な速度に依存する。

超流動（2流体モデル）の系でも、常流体が渦糸上に及ぼす相互摩擦力を導入することにより、上述と同様の解析ができ、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = (1 - \alpha') \text{rot}(\mathbf{v}_s \times \boldsymbol{\omega}) + \alpha \text{rot}[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s)] \quad (3)$$

が得られる [5]。ここで $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ は渦度 $\boldsymbol{\omega}$ 方向の単位ベクトルであり、 α 、 α' は相互摩擦係数と呼ばれる、温度と圧力に依存し、常流体と渦糸との相互作用の強さを表す無次元量である。古典流体の場合と同様に、右辺第1項（慣性項）と、第2項（相互摩擦項）の大きさの比をとれば

$$\frac{\text{inertial term}}{\text{mutual friction term}} = \frac{(1 - \alpha')}{\alpha} \equiv 1/q \quad (4)$$

となる。古典流体と異なり、この比には系の特徴的な長さ L と速度 U が含まれない。これが、ヘルシンキ工科大らの観測した、「速度に依存しない乱流遷移」の所以である。

しかし残念ながら、この研究がパラメーター q による超流動ヘリウム中の相流乱流遷移を示した唯一の実験であり、さらなる実験が望まれる。また、このヘルシンキ工科大らの研究は $^3\text{He} - \text{B}$ の回転系において議論されたが、パラメーター q が超流動中の乱流遷移に本質的な役割を果たすのならば、系が回転していることは必須では無いと考えられる。言い換えれば、回転が無い系でも先の報告と同様の系の振る舞いの著しい変化が見られることが予想される。そこで我々はパラメーター q による乱流遷移を示す新たな実験を提案する目的で、回転を加えず熱カウンター流のみを印加した系において、 $q \approx 1$ で「速度に依存しない乱流遷移」が系のどのような振る舞いとして現れるかを、考察した。

超流動ヘリウムの流れは、常流体と超流体の逆位相の流れ（カウンターフロー）の相対速度（ $v_{ns} \equiv v_n - v_s$ ）がある臨界速度 v_c を超えると、初期状態に存在した渦糸（remnant vortex）が発展し乱流状態になることが知られている [1]。我々はカウンターフローが印加された超流動 ^4He の系について、様々な q での臨界速度を調べた。以下にシミュレーション方法を簡単に説明する [6]。我々は、実際には連続的である渦をほぼ等間隔の点の配列で記述し、渦糸の運動方程式

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_0(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{r}] \times \mathbf{s}'(\xi', t)}{|\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{r}|^3} d\xi' + \mathbf{v}_{sb}(\xi, t) + \mathbf{v}_{sa}(\xi, t) \quad (6)$$

よりそれぞれの点での $\dot{\mathbf{s}}$ を計算し時間発展させる。ここで、 $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi', t)$ は渦糸上の点の位置ベクトル、 ξ は渦糸に沿って測られる長さであり、各点は時間微分を表す。また、 \mathbf{v}_n は常流体成分速度であり、 α 、 α' は相互摩擦係数である。さらに、固体壁等の境界が存在する場合、6式に補正速度場が加わる。

さらに、量子渦糸は粘性流体中の古典渦と同様に、渦同士がダイナミクスの過程で、渦芯サイズ程度に近づけば再結合を起こすことが知られている [8]。そのため以前より我々は、渦糸同士が空間分解能程度に近づけば、これらの渦は再結合を起こすと判定し、人工的に渦同士を繋ぎ換えることにより再結合を再現していた。しかし、今回は比較的大きい相互摩擦係数大きい温度領域を議論するため、極めて非等方かつ高密度の渦糸タングルを扱うことになることが予想される。このような状況では、従来の繋ぎ変えの方法が破綻するため、我々は再結合の判定方法を渦糸同士がダイナミクスの過程で「横切れば」、繋ぎ替えを起こすよう改良した。この方法は渦糸同士がマイクロなサイズである渦芯サイズ程度に近づけば再結合を起こすという、実際の系での再結合をより再現することになる。

以下の計算は全て、 ^4He のパラメーターを用い、境界条件は一辺が 1 cm の立方体で、 x, y 方向は固定壁としカウンターフローを印加する z 方向には周期境界条件を用いた。また、 ^4He では相互摩擦係数 α' は α に比べ小さく無視できるため $\alpha' = 0$ 、すなわち $q = \alpha$ とした。 ^4He を仮定した理由は、Schwarz が過去に小さい q に限り計算した結果 [7] と比較する為である。

図 1 はカウンターフロー速度 v_{ns} が、臨界速度 v_c よりも小さい場合 (a) と大きい場合 (b) の典型的な渦糸ダイナミクスであり、図 2 はそれらの全渦糸長 L の時間変化を示したものである。 $v_{ns} < v_c$ の場合、最終的に全ての渦が消滅するのに対し、 $v_{ns} > v_c$ の場合、 L は $v_{ns} < v_c$ の場合と同様の時間変化をたどるが、ある時刻から

急激に増大し続け、最終的には、ある定常状態に落ち着く。我々は、この L のある時刻からの急激な振る舞いの変化をもって、これらのカウンターフロー速度の間に臨界速度があると判断した。これを様々な q で繰り返すことにより、臨界速度 v_c の q 依存性が得られる。

得られた臨界速度 v_c の q 依存性を図 3 に示す。まず、我々による結果は Schwarz により得られた q が比較的小さい場合の臨界速度と一致することが分かる。さらに、 q が比較的大きい領域では、臨界速度が急激に増大し、 $q \approx 0.8$ で発散する徴候が見て取れる。すなわちヘルシンキ工科大らの報告と同様に、 q が大きい領域ではカウンターフロー速度の大きさ如何に関わらず、層流のみが実現されることを意味する。これが、回転を加えず熱カウンター流のみを印加した場合の、パラメーター q による乱流遷移の現れだと考えられる。また、破線は関数型を $v_{ns} = A/(B-q)^C$ と仮定した場合の、最小二乗法により得られたフィッティング関数である。ただし $A = 0.025$ 、 $B = 0.81$ 、 $C = 1.33$ である。

最後に、なぜ q が大きい領域では臨界速度が増大するのであろうかを定性的に考察したい。それは、 q が大きい領域で実現される渦糸タングルの内部構造に起因する。図 4 は、 $q = 0.3$ と $q = 0.6$ で形成される渦糸タングルの内部構造を示したものである。 $q = 0.3$ の場合、ほぼ等方的な渦糸タングルが形成されるのに対して、 $q = 0.6$ では非常に非等方的な渦糸タングルが形成されるのが分かる。このような非等方的な渦糸タングルは図 5 の様に、ほぼカウンターフロー速度方向に進みながら膨張する渦環の集団と考えることができる。このような状況では、渦糸同士の再結合の起原は次の 2 つが考えられる。

1. 渦環が傾いたまま、膨張することにより、他の渦環と衝突し再結合を起こす。
2. 個々の渦環の半径が異なるため、自己誘導速度の違いにより、渦環が他の渦環に追い付き衝突し再結合を起こす。

量子流体中での乱流発生には渦糸同士の連続的な再結合が不可欠だと考えられているが、 q が大きくなるにつれ渦糸タングルの非等方性が大きくなると、1. の起原による渦環同士の再結合が抑制され、その結果、臨界速度が増大するのである。

本研究は、 q により支配された層流乱流遷移を示す現象として、熱カウンター流のみを印加した実験について考察し、 $q \approx 1$ で臨界速度が急激に増大し、発散する徴候を見出した。これは、 $q \geq 1$ の温度領域では、渦糸タングル状態が安定な存在ではなく、層流のみが実現されることを示唆するものである。我々は、この系をさら

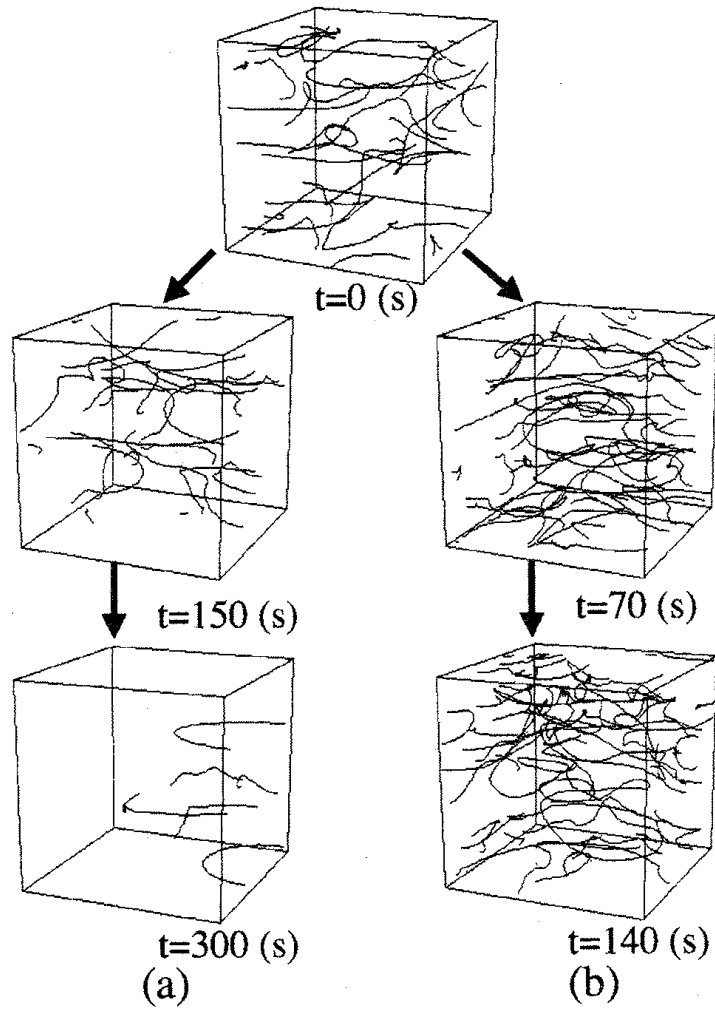


図 1: 臨界速度直下 (a) と臨界速度直上 (b) のカウンターフローを印加した場合の典型的な渦糸ダイナミクス。ただし、これらは $q = 0.3$ として計算した場合の計算結果。

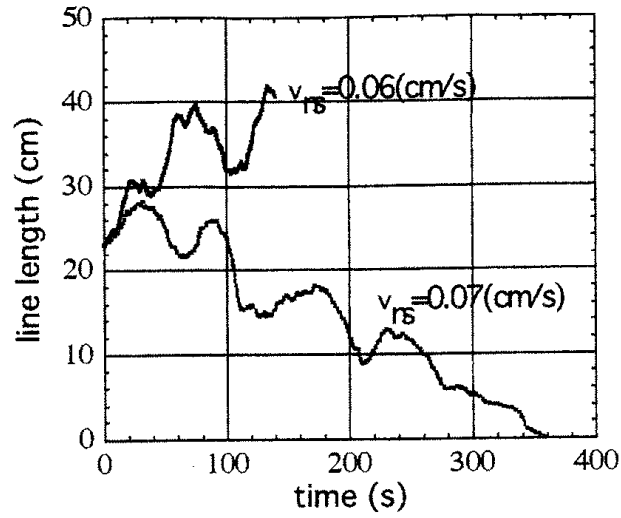


図 2: 臨界速度直下と直上のカウンターフローを印加した場合の典型的な全渦糸長。図 1 と同様に、これらは $q = 0.3$ として計算した場合の計算結果である。

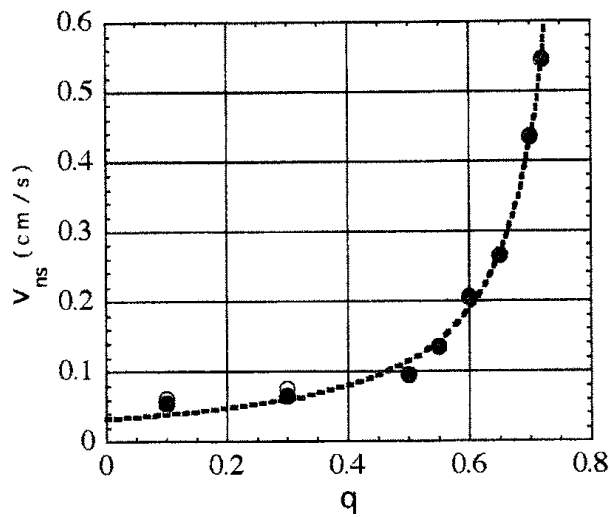


図 3: 臨界速度の q 依存性。黒丸は我々の結果。比較の為に Schwarz により得られた結果を白丸として示した。破線は最小二乗法により得られたフィッティングであり $v_{rs}(q) = 0.025 / (0.81 - q)^{1.33}$ で表される。

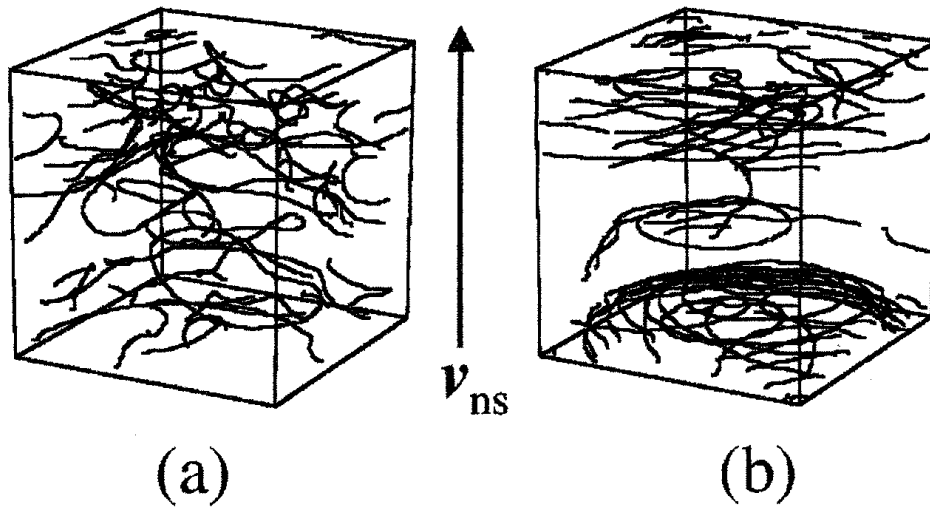


図 4: $q = 0.3$ (a) と $q = 0.6$ (b) で形成される渦糸タングルの内部構造。矢印はカウンターフローの方向を示す。 q が大きい場合、形成される渦糸タングルは非等方的になるのがわかる。

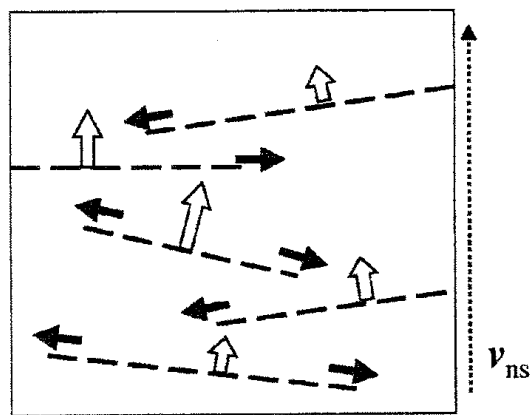


図 5: q が大きい温度領域で形成される渦糸タングルの模式図。破線は渦環。白矢印は渦環の進む方向、黒矢印は渦環が膨張する方向を示す。

に詳細に調べることにより q に支配された層流乱流遷移をより良く理解できると考えている。

参考文献

- [1] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [2] for example, M. Kobayashi, M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. 94 , 065302 (2005).
- [3] W. F. Vinen, Phys. Rev. B 61, 1410 (2000).
- [4] A.P. Finne, T. Araki, R.Blaauwgeers, V.B.Eltsov, N.B.Kopnin, M.Krusius, L.Skrbek, M.Tsubota and G.E. Volovik, Nature 424 1022(2003)
- [5] Sonin, Rev. Mod. Phys., 59 87 (1987).
- [6] K.W.Schwarz, Phys. Rev. B 31, 5782 (1985).
- [7] K. W. Schwarz, Phys. Rev. Lett. 50, 364 (1983).
- [8] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. 71, 1375 (1993); *ibid.* 76, 4745 (1996).