

## 前処理付反復法について

(Gauss-Seidel 反復法とクリロフ部分空間法)

On the preconditioners for Gauss-Seidel iterative method and iterative Krylov method

岡山理科大学・総合情報学部 河野 敏行 (Toshiyuki Kohno)  
 戸村 健作 (Kensaku Tomura)  
 仁木 滉 (Hiroshi Niki)  
 Faculty of Informatics  
 Okayama University of Science

連立方程式を効率良く解くためにさまざまな前処理法が用いられている。使われる解法や係数行列の性質によって最適な前処理法の選択が必要である。我々はこれまでに Gauss-Seidel 法に対する前処理行列として係数行列  $A$  の一部の要素を用いた方法を提案し有効な結果を示してきた。この前処理法をクリロフ部分空間法に適用した結果と Gauss-Seidel 反復法に対する一般化前処理行列の条件について議論する。

### 1 はじめに

線形方程式

$$Ax = b \tag{1}$$

を解くための反復解法の改良として係数行列の要素を用いた前処理法の適用について考える。ここで、 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  は正則行列、 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  はベクトルである。一般性を失わないことから  $A$  の対角要素はすべて 1 とし、左から前処理を適用する。このとき、正則な前処理行列  $P$  を用いて次式の左前処理化線型方程式が得られる、

$$PAx = Pb. \tag{2}$$

1991 年, Gunawardena らは,  $P_s = I + S$  を用いて, Gauss-Seidel 法を適用する修正反復法を提案した [5]. ただし,  $S$  は

$$S = (s_{ij}) = \begin{cases} -a_{ii+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

である。それに対して、我々は  $(I+S)$  型の改良としてパラメータ  $\alpha$  を用いた  $(I+\alpha S)$  型を提案し、 $\alpha$  の推定値を導出した [7]. また、小武守らは  $(I+S)$  型の特徴を生かした  $(I+S_{max})$  型の前処理を提案した。ただし、 $S_{max}$  は  $A$  の狭義上三角要素の各行で絶対値最大の値を用いて構成される。

$$S_{max} = (s_{ij}^m) = \begin{cases} -a_{ik_i}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$k_i = \min\{j \mid \max_{i+1 \leq j \leq n} |a_{ij}|\}$$

さらに、これらの前処理を組み合わせる2段階前処理法  $P_{s,s_{max}}$  を提案している。

$$P_{s,s_{max}} = (I + S_{max})D^{-1}(I + S)$$

ここで、 $D$  は  $(I + S)A$  の対角要素をすべて1にスケーリングするために用いている。また、対角の1つ下の値を利用する  $(I + S')$  型前処理を提案し、先ほどと同様に2段階に用いる手法

$$P_{s',s} = (I + S')D^{-1}(I + S)$$

も提案した。

上述と、それ以外に提案してきた前処理法など [8, 9, 11] は、与えられた係数行列の優対角性を改善する働きがあり、Gauss-Seidel法の反復行列のスペクトル半径を減少させる効果がある。これらの前処理行列は係数行列の一部の要素を用いることによって容易に形成できる。この観点から、我々の前処理は係数行列の近似逆行列の役目を果たしていると考えられる。したがって、これまで提案してきた前処理行列がクリロフ部分空間法に対しても有効であると考え、その適用した結果を示す。また、一般的な前処理行列が有効となるための条件を示す。

## 2 定義, 定理

ここでは、収束定理が明らかとなっている Gauss-Seidel 法に対して我々の前処理法が適用可能であることを証明するために関連する定義と定理を示す。 [1, 2, 4, 6]

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  の全ての要素に対して  $a_{ij} \leq b_{ij}$  のとき、 $A \leq B$  と書く。そして、 $A \geq O$  のとき  $A$  を非負行列と呼ぶ。 $A = (a_{ij})$  が  $i \neq j$  に対して、 $a_{ij} \leq 0$  を満たす行列を  $Z$  行列と呼び、 $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$  と表す。 $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$  が  $A^{-1} \geq O$  を満たすとき、 $M$  行列と呼ぶ。さらに、 $A = (a_{ij})$  が  $i = j$  に対して  $|a_{ij}|$ 、非対角要素に対して  $-|a_{ij}|$  と置いた行列を比較行列と呼び、 $\langle A \rangle$  と表す。 $\langle A \rangle$  が  $M$  行列のとき、 $A$  は  $H$  行列という。係数行列の分解として対角が1の場合、 $A = I - L - U$  と分解する、ここで、 $I$  は単位行列、 $-L$  と  $-U$  はそれぞれ  $A$  の狭義下三角、狭義上三角行列とし、 $A$  を  $M$  行列と仮定することによって、 $L, U$  は非負行列、 $I - L$  は  $M$  行列であるので、その逆行列は非負行列である。

また、行列の分解を必要に応じて、 $A = [A]_d - [A]_l - [A]_u$  と表記し、それぞれ、行列  $A$  の対角、狭義下三角、そして狭義上三角要素を示す。そして反復行列を構成する  $A$  の分離を正則な行列  $M$  を用いて  $A = M - N$  とする。このとき、反復行列は  $T = M^{-1}N$  と定義できる。

一般的な分離に対して以下の定理を与える。

**定義 2.1** [4]  $A$  を実行列とする。 $A = M - N$  を  $A$  の分離とする、ただし、 $M$  は正則行列である。このとき、次の分離を定義する。

(i)  $\rho(M^{-1}N) < 1$  のときは, 収束分離.

(ii)  $M^{-1} \geq O$  かつ  $N \geq O$  のときは, 正則分離.

(iii)  $M^{-1} \geq O$  かつ  $M^{-1}N \geq O$  のとき, 弱正則分離.

この論文では反復法として Gauss-Seidel 法に対する前処理法の適用とその収束条件について議論を行う. 議論を簡単にするために分離と収束に関する次の定義と定理を与える.

**定義 2.2**  $A$  の分離  $A = M - N$  を  $M = [A]_d - [A]_l$ ,  $N = [A]_u$  とおくとき, Gauss-Seidel 分離と定義する. そして,  $([A]_d - [A]_l)^{-1} \geq O$  かつ  $[A]_u \geq O$  ならば, Gauss-Seidel 正則分離と呼ぶ.

この定義から, 与えられた係数行列  $A$  の対角要素が 1 である場合は特に,  $M = I - L$ ,  $N = U$  と分離されることに注意し, この論文では特に断らない限り前処理なしの Gauss-Seidel はこのように表す.

**定理 2.3** [2]  $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$  を既約行列とする. このとき, 以下の条件は  $A$  が正則な  $M$  行列であることと等価である.

(i)  $A^{-1} \geq O$ .

(ii)  $x > 0$  に対して  $Ax \geq 0$ .

**補題 2.4** [4]  $T \geq O$  に対して,  $Tx \leq \alpha x$  を満たす  $x > 0$  と  $\alpha > 0$  が存在するとき,  $\rho(T) \leq \alpha$  を満たす. さらに,  $Tx < \alpha x$  ならば,  $\rho(T) < \alpha$  である.

**定理 2.5** [12]  $A = M - N$  を  $A$  の正則分離とする. このとき  $A$  が  $A^{-1} \geq O$  であるための必要十分条件は  $\rho(M^{-1}N) < 1$  すなわち,

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)} < 1$$

である.

**定理 2.6** [3]  $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$  を弱正則分離とする, ただし,  $A^{-1} \geq O$  である. ここで, 以下のいずれかの条件が満たされるならば,

a)  $N_1 \leq N_2$

b)  $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ ,  $N_1 \geq O$

c)  $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ ,  $N_2 \geq O$

以下の不等式が示される,

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2).$$

### 3 一般化前処理行列

我々は、これまでさまざまな前処理行列を定義してきたが、統一した前処理行列の形として、新たに前処理行列を

$$P_q = I + Q$$

とおく、ただし、 $Q$  は  $-A$  の任意の非対角要素を利用し、 $P_q A$  が  $M$  行列となるように設定する。この前処理を用いることによって得られる前処理化係数行列の Gauss-Seidel 分離を

$$P_q A = (I + Q)A = E_q - F_q \quad (3)$$

とおく。このとき、 $E_q^{-1}, F_q$  は非負行列であり、この反復行列  $T_q = E_q^{-1}F_q$  もまた非負行列となる。このことから、式(3)は Gauss-Seidel 正則分離である。

Gauss-Seidel 法の改良となるための前処理行列  $(I + Q)$  の条件を導出するために、式(3)の両辺に  $I + Q$  の逆行列をかけた等式を用い、再分離を行う、

$$A = M_q - N_q = (I + Q)^{-1}E_q - (I + Q)^{-1}F_q. \quad (4)$$

このとき、式(4)の  $M_q - N_q$  は Gauss-Seidel 分離とはならないが、2式(3)(4)から示される反復行列は

$$M_q^{-1}N_q = ((I + Q)^{-1}E_q)^{-1}(I + Q)^{-1}F_q = E_q^{-1}F_q = T_q$$

となり等しい。さらに、この分離は

$$M_q^{-1} = ((I + Q)^{-1}E_q)^{-1} = E_q^{-1}(I + Q) \geq O$$

であることから、弱正則分離となる。我々はこの分離を利用して比較定理を導出する。まず、比較定理を導くために必要な補題を与える。

**補題 3.1**  $A = M - N$  そして前処理行列  $P_q = (I + Q) \geq O$  を用いた  $P_q A = E_q - F_q$  をともに  $M$  行列の Gauss-Seidel 分離と仮定する。このとき、 $[Q]_u - [QL]_u$  が非負行列であるならば、以下の関係式が満たされる、

$$M_q^{-1} \geq M^{-1}.$$

**証明**  $M_q^{-1} - M^{-1}$  は式変形より

$$\begin{aligned} M_q^{-1} - M^{-1} &= (E_q^{-1}(I + Q) - (I - L)^{-1}) \\ &= E_q^{-1}\{(I + Q)(I - L) - E_q\}(I - L)^{-1} \\ &= E_q^{-1}\{P_q M - E_q\}(I - L)^{-1} \end{aligned}$$

が得られる。ここで  $E_q^{-1} \geq O, (I - L)^{-1} \geq O$  であるから、 $P_q M - E_q$  について調べる、

$$\begin{aligned} P_q M - E_q &= (I + Q - L - QL) - (I - L - [QL]_d - [QL]_l + [Q]_l - [QU]_d - [QU]_l) \\ &= [Q]_u - [Q]_u + [QU]_d + [QU]_l. \end{aligned}$$

ここで,  $Q, U$  はともに非負行列であり, 条件  $[Q]_u - [QL]_u \geq 0$  から  $M_q^{-1} - M^{-1} \geq 0$  が得られ,

$$M_q^{-1} \geq M^{-1}$$

である. ■

**定理 3.2**  $A = M - N$  を  $M$  行列の Gauss-Seidel 分離と仮定する. このとき, 補題 3.1 の条件を満たすように前処理行列  $P_q = (I + Q)$  を与えるとき,

$$\rho(T) \geq \rho(T_q)$$

である.

**証明**  $A$  は  $M$  行列であるので  $A$  の Gauss-Seidel 分離  $A = M - N$  で得られる反復行列  $T = M^{-1}N$  は非負行列である.  $T$  のスペクトル半径  $\rho(T)$  に対応する固有ベクトル  $\mathbf{x}$  を用いて  $T\mathbf{x} = \rho(T)\mathbf{x}$  とあらわすとき,  $T$  は Gauss-Seidel 反復行列の特性から, 1 列目がすべて 0 となる次のようなブロックであらわされ既約ではない,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & T_0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}.$$

したがって,  $\mathbf{x}$  が正のベクトルであるとは限らない. しかしながら,  $T_1$  は  $n-1$  次の非負行列で既約であり, スペクトル半径  $\rho(T_1)$  に対して,  $T_1\mathbf{x}' = \rho(T_1)\mathbf{x}'$  を満たす正の固有ベクトル  $\mathbf{x}'$  は存在する. 論文 [5] の補題 3.9 の結果から  $\rho(T) = \rho(T_1)$  となることは明らかであり, 非零の正のベクトル  $\mathbf{x}$  を用いて,

$$T\mathbf{x} = \rho(T)\mathbf{x}$$

とあらわすことが可能となる. したがって,  $\rho(T) < 1$  であることと定理 2.3, 2.5 から  $\rho(T)$  に対応する正の固有ベクトル  $\mathbf{x}$  を用いて  $A\mathbf{x} \geq 0$  が示される. そして補題 3.1 から  $M_q^{-1} \geq M^{-1}$  が示されているので, 以下の不等式が得られる,

$$(M_q^{-1} - N_q^{-1})A\mathbf{x} \geq 0.$$

この関係式から,

$$\begin{aligned} (M_q^{-1} - M^{-1})A\mathbf{x} &= (I - T_q)\mathbf{x} - (I - T)\mathbf{x} \\ &= \rho(T)\mathbf{x} - T_1\mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

が導出される. したがって, 補題 2.4 から,

$$\rho(T) \geq \rho(T_q)$$

が示される. ■

## 4 前処理付アルゴリズム

前処理行列  $P = I + Q$  とおく、ただし、 $Q$  は  $A$  の各行で1つずつ任意で取り出した要素で構成されるとする、すなわち、 $i$  行目において任意の要素を  $q_{i,k_i} = -a_{i,k_i}$  とし、その他の要素は  $q_{ij} = 0$  とする。これまでは、反復実行前に  $PA$  と  $Pb$  の演算を行い、この前処理にかかる演算量は最初に反復1回分の量で済んでいた。しかしながら、この方法は、疎な行列や帯行列などに対しては、前処理によって fill-in が生じ、実際のアルゴリズムでは格納量と演算量が増えることとなる。そこで、前処理行列  $Q$  を反復過程に組み込んだ反復アルゴリズムを図1に示す。このとき、SOR法の残差をあらわす  $r$  は各行で保存し、各行の前処理要素  $q_{ik_i}$  とスカラーの積を行い加算している。ここで、具体的な前処理行列の要素  $q_{ik_i}$  の決定方法の一つとしては各行で絶対値最大の要素を用いることなどが考えられるが、さらに反復過程に前処理要素を変更させることも可能である。さらに前処理行列  $Q$  の決定法として、 $S$  とは逆に対角の左の要素を用いた場合、すなわち  $q_{ii-1}$  を使うならば、一つ前の更新量  $r$  だけを記録しておけば良いだけであり、メモリを減らすことができる。

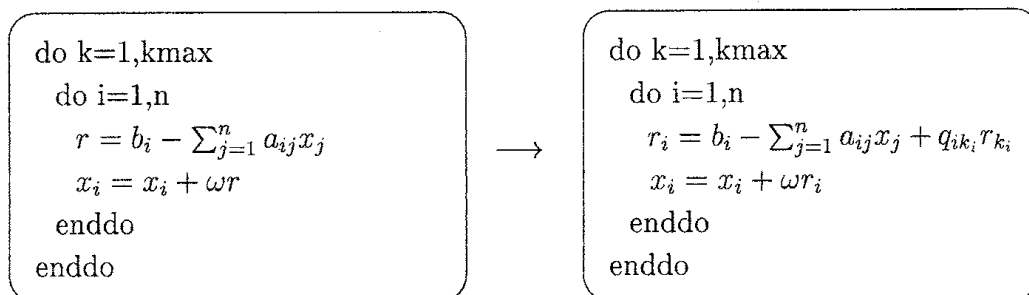


図1: SOR法から前処理を組み込んだSOR法

次に、クリロフ部分空間法のアルゴリズムに前処理行列  $P = I + S$  を組み込む手法を説明する。この場合、 $P$  を乗算した連立方程式  $PAx = Pb$  にクリロフ部分空間法を適用する方法と反復中に前処理行列を係数行列とする線型方程式を解くことによって導入する方法の2つが考えられる。前者は前処理によって fill-in が生じ、計算する要素が増加し、また対称問題に対して我々の前処理は非対称であるために非対称行列を解くこととなる。後者の方法は  $I + S$  という規則的な前処理であれば、前処理行列を係数とする連立方程式を後退代入で解くだけで良いこととなる。後者のアルゴリズムを BiCG-Stab 法 [13] に組み込んだものを図2に示す。

## 5 数値結果

前処理による振る舞いを明らかにするために、対称、非対称の特徴の明らかな問題に対する結果を示す。実際の問題ではないので、解を  $x^* = (1, 2, \dots, n)$  としたときの  $b$  を用いて  $Ax = b$  を解くこととし、収束判定条件を  $k$  回目の反復によって得られた近似値  $x^{(k)}$  に対して  $\frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} \leq 1.0 \times 10^{-12}$  としたときの結果をそれぞれ示す。我々

の前処理行列は非対称要素で構成しているため、クリロフ部分空間法における非対称解法の代表として、BiCG-Stab法を用いる。今回の結果では、先に前処理計算を行い、得られた線型方程式を通常のBiCG-Stab法で解く方法を用いている。計算機環境はPentium4(3.4GHz), メモリ1G, OS: WindowsXPを使用した。

```

 $x_0$  is an initial guess,  $r_0 = b - Ax_0$ 
Put  $\tilde{r} = r_0$ 
for  $k = 1, 2, \dots$ 
   $\rho_{k-1} = \tilde{r}^T r_{k-1}$ 
  if  $\rho_{k-1} = 0$  method fails
  if  $k = 1$     $p_k = r_{k-1}$ 
  else
     $\beta_{k-1} = (\rho_{k-1}/\rho_{k-2})(\alpha_{k-1}/\omega_{k-1})$ 
     $p_k = r_{k-1} + \beta_{k-1}(p_{k-1} - \omega_{k-1}v_{k-1})$ 
  endif
  solve  $\hat{p}$  from  $(I + S)\hat{p} = p_k$ 
   $v_{k-1} = A\hat{p}$ 
   $\alpha_k = \rho_{k-1}/\tilde{r}^T v_k$ 
   $s = r_{k-1} - \alpha_k v_k$ 
  if  $\|s\|$  small enough then
     $x_k = x_{k-1} + \alpha_k \hat{p}$ , quit
  solve  $\hat{s}$  from  $(I + S)\hat{s} = s$ 
   $t = A\hat{s}$ 
   $\omega_k = t^T s / t^T t$ 
   $x_k = x_{k-1} + \alpha_k \hat{p} + \omega_k \hat{s}$ 
  if  $x_k$  is accurate enough then quit
   $r_k = s - \omega_k t$ 
  for continuation it is necessary that  $\omega_k \neq 0$ 
end

```

図2: 反復過程に前処理  $I + S$  を組み込んだ例

## 5.1 対称・非対称5重対角行列

要素が帯状に一定であるような5重対角の対称行列  $A_1 = \text{pentadiag}(q, p, 1, p, q)$  と非対称行列  $A_2 = \text{pentadiag}(p, q, 1, p, q)$  に対して、表1と表2の結果が得られた。特徴としては前処理なし Gauss-Seidel法は優対角度  $t_i = \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ ,  $i = 1(1)n$  の平均値に大きく依存しており、おおよそ同程度の反復回数で収束する。すなわち、 $(p, q) = (-0.2, -0.2) = (-0.3, -0.1) = (-0.1, -0.3)$  の場合は同じ優対角度を持ち、反復回数が等しい結果が得られた。そして、前処理行列として  $I + S$  を用いた場合、 $p$  の値に大きく依存しており、 $p$  の値が大きいほど、前処理の効果が得られている。BiCG-Stab法では対称問題に対しての前処理効果はあまり見られないが、非対称問題に対してははっきりとした傾向が見られる。 $S$  にあたる  $p$  の要素が大きいとき前処理の有効性が示される。逆に  $p$  の要

素が  $q$  よりも小さい場合, 前処理を行っているにもかかわらず, 前処理を利用しないときよりも悪くなっていることが分かる.

表 1: 5 重対角対称問題  $A_1$  の例題 (次数:  $n = 1000$ )

$p$	$q$	Gauss-Seidel		BiCGStab	
		$I$	$I + S$	$I$	$I + S$
-0.1	-0.1	20(0.75)	15(0.70)	9(0.66)	9(0.66)
-0.2	-0.2	69(2.59)	45(2.11)	25(1.78)	21(1.50)
-0.1	-0.3	69(2.59)	56(2.64)	26(1.85)	21(1.50)
-0.3	-0.1	69(2.59)	36(1.69)	24(1.70)	21(1.50)

表 2: 5 重対角非対称問題  $A_2$  の例題 (次数:  $n = 1000$ )

$p$	$q$	Gauss-Seidel		BiCGStab	
		$I$	$I + S$	$I$	$I + S$
-0.1	-0.3	69(2.59)	56(2.64)	28(2.00)	28(2.00)
-0.3	-0.1	69(2.59)	36(1.69)	25(1.78)	18(1.29)
-0.5	-0.4	*	32(1.50)	36(2.56)	15(1.08)
-0.6	-0.4	*	32(1.50)	40(2.85)	20(1.43)
-0.4	-0.6	*	285(13.53)	52(3.69)	71(5.03)

\*... 1000over

## 5.2 Toeplitz 行列に対する結果

非対称のテスト問題として対角が 2.0, 対角の 1 つ上が 1.0, そして対角の 2 つ下にパラメータ  $\gamma$ , その他の要素は零である Toeplitz 行列を係数行列  $A$  に対する Gauss-Seidel 法と BiCG-Stab 法の結果を表 3 に示す. また, BiCG-Stab 法に対して, 前処理行列のパラメータを変化させた結果を表 4 に示す. Toeplitz 行列に対して 2 段階の前処理を用いた Gauss-Seidel 法において, その前処理パラメータが  $\gamma$  に依存せず一定した値が最適であることを数値実験から分かった. BiCG-Stab 法では  $(I + S)$  が安定して改善されており, パラメータの効果は出ていない. 2 段階では前処理パラメータが  $\gamma$  によって変化し不規則な値となったがその原因は不明である.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & 0 & 2 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \gamma & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

表 3: Gauss-Seidel 法と BiCGStab 法 (次数:  $n = 10000$ )

$\gamma$	Gauss-Seidel			BiCGStab	
	$I$	$(I + S)$	$P_{s',s}$	$I$	$(I + S)$
1.0	*	28	14(0.01)	59(0.06)	28(0.03)
1.5	*	*	22(0.01)	231(0.26)	55(0.06)
1.7	*	*	23(0.02)	869(0.97)	70(0.08)
2.0	*	*	323(0.11)	*	105(0.11)
2.5	*	*	*	*	229(0.26)
3.0	*	*	*	*	987(1.09)
3.4	*	*	*	*	*

$$P_{s',s} = (I + 3.0S')D^{-1}(I + 0.6S), \quad * \dots 1000\text{over}$$

表 4: 前処理を利用した BiCGStab 法 (次数:  $n = 10000$ )

$\gamma$	BiCG-Stab 法			
	$\alpha$	$I + \alpha S$	$(\alpha, \beta)$	$(I + \beta S')D^{-1}(I + \alpha S)$
1.0	1.0	28(0.03)	0.8, 1.0	24(0.03)
1.5	0.9	54(0.06)	0.5, 1.5	42(0.05)
1.6	1.0	62(0.06)	0.5, 2.0	52(0.05)
1.7	1.0	70(0.07)	0.4, 2.5	56(0.06)
1.8	1.0	79(0.08)	0.5, 1.5	65(0.08)
1.9	1.0	95(0.11)	0.4, 2.0	81(0.09)
2.0	1.0	105(0.11)	0.4, 2.0	101(0.11)

## 6 まとめと今後の課題

一般的な形として定義される前処理行列  $I + Q$  を示し, Gauss-Seidel 法を行う際に有効となるための条件を示した. ここで,  $Q$  は  $A$  の非対角要素を用いた行列と考えら

れ、理論上では、広い範囲でその収束の有効性が示される。Gauss-Seidel法とクリロフ部分空間法ではその収束の性質が異なっており、我々はクリロフ部分空間法に対する有効性を数値結果でしか示していない。しかしながら、簡単な性質を持った5重対角非対称行列に対して、我々の前処理の顕著な性質が見られた。このことから、与えられた係数行列の要素を利用したさらに新しい前処理法が開発可能であると考えられる。我々は、収束条件として任意の要素 $Q$ を与えたが、実際に反復解法に組み込むことを考えた場合、密行列では演算量が膨大になるために実用的ではない。したがって、各行で1つの要素を用いることが有用であると考えられる。特にクリロフ部分空間法に組み込む場合は、前処理行列を係数行列とする線型方程式を解くことが必要となり、 $I+S$ のような形であれば、容易に解くことが可能であり実用的であると考えられる。しかしながら、今回の数値実験では、内部に組み込んだ結果は示していない。このことは今後の課題である。現在、このアルゴリズムを試行した結果、ある非対称な正負混合行列に対しては、我々の前処理の有効性が示されたが、さらに改良の必要がある。また、数値実験で用いたBiCG-Stab法のプログラムはアルゴリズム[13]をそのままプログラムしたものであり、チューニングをすることによってさらにCPU時間が短縮することが期待される。数値結果では、Gauss-Seidel法とBiCG-Stab法を比較した結果、Gauss-Seidel法の方が反復回数が多いが早く収束している結果となっているが、チューニングしただけで、変わる可能性がある。さらに、Toeplitz行列に対する結果で示したように、クリロフ部分空間法の方が我々の前処理を用いることによって収束範囲が広がっている。このことから、 $(I+Q)$ 型前処理付きクリロフ部分空間法がさらに有効である可能性があると思われるので、さらに研究を進めたいと考えている。また、古典反復法を前処理とするクリロフ部分空間法との比較なども行う。

## 謝辞

今回、京都大学数理解析研究所研究集会「21世紀における数値解析の新展開」において研究発表の機会を与えてくださった張紹良先生（東京大学工学部）と研究代表者三井斌友先生（名古屋大学大学院情報科学研究科）、その他の関連の先生に感謝いたします。また、この研究遂行にあたり有益な助言と指導を賜りました岡山理科大学を平成16年度末に退官される仁木滉先生に深く感謝いたします。本研究は日本学術振興会科学研究費補助金（若手研究(B)、課題番号16740067）の助成を受けております。

## 参考文献

- [1] O. Axelsson, Iterative Solution Methods, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1994.

- [2] A. Berman and R.J.Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM,1994.
- [3] L. Elsner, Comparisons of weak regular splittings and multisplitting methods, *Numer. Math.*,Vol.56, pp.283-289(1989).
- [4] A. Frommer and D.B.Szyldm H-splitting and two-stage iterative methods, *Numer. Math.*,Vol.63, pp.345-356(1992).
- [5] A.D.Gunawardena, S.K.Jain and L.Snyder, Modified Iterative Methods for Consistent Linear Systems, *Linear algebra Appl.*Vol.154-156, pp.123-143(1991).
- [6] K. R. James, Convergence of matrix iteration subject to diagonal dominance, *SIAM J. Numer. Anal.*,Vol.10, pp.478-484(1973).
- [7] T.Kohno, H.Kotakemori, H.Niki and M.Usui, Improving Modified Gauss-Seidel Method for Z-matrices, *Linear algebra Appl*, Vol.267, pp.113-123(1997).
- [8] T.Kohno, H.Niki and M.Usui, Multi-step Preconditioned Iteration method for Nonsymmetric Linear Systems, *Int. J. Compt. Math.*,Vol.56, pp.177-184(1995).
- [9] H. Kotakemori, H. Niki and N. Okamoto, Accelerated iteration method for Z-matrices, *J. Comput. and Appl. Math.*,Vol.75, pp.87-97(1996).
- [10] I. Marek and D.B. Szyld, Comparison theorems for weak splittings of bounded operators, *Numer. Math.*,Vol.58, pp.387-397(1990).
- [11] M.Usui, H.Niki and T.Kohno, Adaptive Gauss-Seidel Method for Linear Systems, *Int. J. Compt. Math.*,Vol.51, pp.119-125(1994).
- [12] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer,2000.
- [13] H.A.van der Vorst, *iterative Krylov Methods for Large Linear Systems.*,Cambridge Univ. press,2003.