Title	竹内の基本予想とは何か、何であるべきか : 50年に (証明論と計算論)
Author(s)	新井, 敏康
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1442: 1-7
Issue Date	2005-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/47570
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1442 巻 2005 年 1-7

竹内の基本予想とは何か、何であるべきか-50年に (What is and what should be the Takeuti's fundamental conjecture?-50 years later)

新井敏康 (Toshiyasu ARAI) *

2005年4月

> *Mathematics is a collection of proofs.*[1] This is true no matter what standpoint one assumes about mathematics - platonism, anti-platonism, intuitionism, nominalism, etc. Therefore, in investigating "mathematics", a fruitful method is to formalize the proofs of mathematics and investigate the structure of these proofs. This is what proof theory is concerned with.
>
> (竹内 [34], INTRODUCTION の冒頭)

竹内外史は論文 [27] において、高階の述語論理計算 GLC を定式化し、以下の予想を述べた：

竹内の基本予想：GLC においてカット除去定理が成り立つ　　(1)

この論説では、この予想の意味・帰結および現在までに得られた部分解について述べる。

1　GLC とそのカット除去定理

初めに、高階の述語論理計算 GLC を定義する。高階の言語は、一階の言語に n-階 $(n = 2, 3, \ldots)$ の変数 $X_i^{(n)}$ $(i \in \omega)$ を付け加えて得られる。ここでは簡単のため、各 $X^{(n)}$ は一変数とする。つまり、論理式の生成規則に次の二つを加える：(1) n-階の変数 X^n と $(n-1)$-階の項 $V^{(n-1)}$ について、$X^{(n)}(V^{(n-1)})$ は論理式。ここで、一階の項とは一階の言語における項 (term) のことであり、$n \geq 2$ について n-階の項は、論理式 $A(X)$ からつくられるク

*神戸大学自然科学研究科 (Graduate School of Science and Technology, Kobe University)

[1] イタリック筆者

ラス $\{X^{(n-1)} : A(X)\}$ のことである。従って、論理式と項は同時に帰納的に生成される。(2) A が論理式なら、$\forall X^{(n)} A$ と $\exists X^{(n)} A$ はともに論理式。

また、論理式の否定 $\neg A$ はド・モルガンの規則と二重否定の除去により定義する。論理式の有限集合を sequent といい、Γ や Δ などで表わす。また $\Gamma, \Delta := \Gamma \cup \Delta, \Gamma, A := \Gamma \cup \{A\}$ とする。

GLC の公理と推論図：$(\forall^{(n)})$ において X は eigenvariable である。

$$\text{(論理的な公理)}\quad \Gamma, \neg A, A \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg A \quad A, \Delta}{\Gamma, \Delta}\ (cut)$$

$$\frac{\Gamma, A_0 \quad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1}\ (\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A_0, A_1}{\Gamma, A_0 \vee A_1}\ (\vee)$$

$$\frac{\Gamma, A(X)}{\Gamma, \forall X^{(n)} A(X)}\ (\forall^{(n)}) \qquad \frac{\Gamma, A(V^{(n)}), \exists X^{(n)} A(X)}{\Gamma, \exists X^{(n)} A(X)}\ (\exists^{(n)})$$

$\mathrm{G^1LC}$ は二階の述語論理計算で、GLC を二階に制限したもの、つまり、上の推論図 $(\forall^{(n)}), (\exists^{(n)})$ を $n = 1, 2$ として得られる。

この時、GLC のカット除去定理とは、GLC で証明できる sequent は推論図 (cut) を用いることなく GLC で証明できる、を意味する。$\mathrm{G^1LC}$ のカット除去定理も同様である。

GLC [$\mathrm{G^1LC}$] のカット除去定理が成り立てば、高階の自然数論 $Z_{<\omega}$ [二階の自然数論 Z_2] の 1-consistency がそれぞれ直ちに有限的に従う [27]。いま、$Z_{<\omega} \vdash A\ (A \in \Sigma^0_1)$ とする。自然数を $N(x) :\Leftrightarrow \forall X^{(2)}[X(0) \wedge \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to X(x)]$ とし、相等関係を $Eq(x,y) :\Leftrightarrow \forall X^{(2)}[X(x) \leftrightarrow X(y)]$ と解釈してやれば、足し算掛算などの定義式を PA^- として、$\mathrm{GLC} \vdash \mathrm{PA}^- \to A$ となり、カットを除去すると、$\mathrm{LK} \vdash \mathrm{PA}^- \to A$ だが、PA^- は LK 上、1-consistent だからである。

2 基本予想の意義

カット除去定理そのものは正しい。

定理 1 GLC 及び $\mathrm{G^1LC}$ においてカット除去定理が成り立つ。例えば、GLC で証明できる sequent は推論図 (cut) を用いることなく GLC で証明できる。

この定理は、Schütte[24] によるカット無し断片の 3 値モデルに対する完全性を経て、二階 $\mathrm{G^1LC}$ については Tait[25] が、そして高階 GLC については高橋 [26] と, Prawitz[20] が独立に証明した。これらの証明は 3 値モデルを 2 値モデルに完備化するというもので、数学的に大層興味深いが、ここでのテクニックがこれ以外に応用されていないのは残念なことである。

これらの証明をもって基本予想が肯定的に解かれたとは断じて言えない。それは、証明が意味論的だからなのではなく、無矛盾性を示そうとしている理論全体を真に含む所でしか形式化できないからである。それでは基本予想

の解とはどうのようなものであるべきか？残念ながら竹内自身 (1) はこのことに殆ど触れていない。唯一見つけることができたのが、その文体から判断して Kreisel の筆による [17] p. 36 の記述だが、筆者らの協議に基づいて書かれたのであろう。

> One of us [27] introduced $\mathcal{CFA}$(=Cut-Free Analysis) to *replace*[2] the essentially **epistemological consistency problem** (for $\mathcal{UA}$=Usual Analysis=Z_2) - which is open only if the metamathematical methods are restricted - *by the* **mathematical normal form problem** (or '**fundamental conjecture**') - which was open whatever (valid) methods were allowed. The strategy behind this step was this.
>
> As we should put it now, since say $\mathcal{CFA} \nvdash 0 = 1$ is derivable in PRA, Con($\mathcal{UA}$) $\cdots$ follows, still in PRA, from $CF(0 = 1)(:\Leftrightarrow \mathcal{UA} \vdash 0 = 1 \rightarrow \mathcal{CFA} \vdash 0 = 1$, namely cut eliminability of proofs of $0 = 1$ in Z_2). So there was a chance that a proof by the 'light of nature' of $CF(A)$ for all A or even of $CF(0 = 1)$ would somehow lead us to the *discovery of metamathematical relavant methods*[3], besides providing the intrinsically interesting fact that $CF(A)$ is *true* for all A. $\cdots$
>
> The *hope*[4] was that the methods used would be *incomparable* with those of $\mathcal{UA}$ in the way in which Gentzen's use of ε_0-induction applied to *quantifier-free* predicates is in incomparable with first order arithmetic.
>
> It is fair to say that *this hope was justified*[5] for certain subsystems of $\mathcal{UA}$ [33]. But all known proofs of $\forall A[CF(A)]$ for the whole of $\mathcal{UA}$ use methods whose (natural) formulation simply *includes* the whole of $\mathcal{UA}$. More precisely, this applies to model theoretic proofs; proofs via so-called normalization [14][6]make *full* use of impredicative comprehension principles In short, the hope mentioned has not been fulfilled for the whole of $\mathcal{UA}$. (Kreisel-Takeuti[17] p. 36)

この部分を短く意訳してみる。

そもそも基本予想は、初めから無矛盾性証明と不即不離であり、次の「希望表明」であると述べている：

---

[2] my italics
[3] my italics
[4] my italics
[5] my italics
[6] [13] の引用ミスと思われる。

> 竹内の基本予想：GLC においてカット除去定理が成り立つであろう。
> しかもそれは Gentzen[12] のように有限の立場の延長線上に構成的に
> 示されるであろう。これにより $Z_{<\omega}$ の無矛盾性を示す問題を、
> カット除去という数学的問題で置き換え、なおかつそれを示す営為を
> 通して、この問題に則した新しい手法を発見できるのではないか？(2)

ひとは訝しく思うかもしれない：ここで言う「構成的」とはいかなる謂か？数学的に正確に定義されているか？例えばある形式的理論 T で形式化できることが「構成的」であるための必要十分条件となる T があるのか？これに答えて曰く：基本予想のような grand program において、その開始以前にこのようなことを問うことは単なる怯懦というべきである。何が構成的か或いは得られた証明が構成的か否かは、証明が得られてから吟味すればよいし、その価値は得られた洞察から判断するほうが生産的である。

基本予想の意義は、その後の無矛盾性証明に関連した証明論の数学的進展を唱導し指針を与えたことにある。このようなプログラムで他に思い付くのは、Hilbert による ϵ-代入法くらいである。

3 進展

最後に、上記の意味 (2) に捉え返された基本予想の部分解の実際についてまとめる。

先ず、竹内自身による [28], [30], [32] について。

初めに、そのカット除去が PA の 1-consistency と同等である G^1LC の部分体系に対する [28] を経て、[30] において、二階の自然数論の部分体系 Π^1_1-CA_0 (或いは同じことだが $ID_{<\omega}$) と上記の意味で対応する G^1LC の部分体系に対するカット除去定理を示した。これは、Gentzen[12] が PA の証明図の中に ε_0 の順序構造を見い出したのと同じように、大きな順序構造 [29] を G^1LC に見い出したものであり、その順序数は、カット除去を通して証明図から抽出された。従って、その順序関係やカット除去のステップは純粋に組合せ論的で直観的に理解しづらい面もあった。

しかしながら、この [30] と [29] こそが seminal papers と称さるべきもので、時代に先んじて非可術的理論の証明論を打ち立てた、竹内の証明論における最良の仕事である。

[32] は GLC の部分体系に対するカット除去定理を示した。この部分体系も $ID_{<\omega}$ に対応する。基本予想は GLC の（部分）体系のカット除去にだけ関わる訳ではない。実際、竹内自身がカット除去により、二階の自然数論 Π^1_1-CA+BI (ID_ω) の無矛盾性証明を与えている [33]。このために [31] で [29]

での順序構造を超限レヴェルに引き上げなければならなかったが、これは [29] の出現に比べたら微々たるものである。

後に Pohlers, Buchholz らにより明らかにされたように、[29] における順序数は有限番目までの recursibly regular ordinals を collapse させたものである。また彼等は、70 年代の [7], [18], [19] において、カット除去のより直観的に理解し易いテクニックを開発して、竹内の結果を証明し直している。これと Jäger[15] の転換なくして 80 年代以降の新井, Rathjen[21], [22],[23] による爆発はあり得なかった。

また最近 Buchholz[9], [10] により判ったことだが、Gentzen[12], 竹内 [30] でのカット除去のステップは、Schütte, Buchholz[7] による無限証明図のカット除去にそのまま対応していた。直観を欠いたままで組合せ論的につくられたものが、後に発見された集合論的直観を先取りしていたのは驚きである。

竹内以後で Gentzen-竹内の延長線上にあるのは、[2] が recursively inaccessible ordinal に対応する G^1LC の部分体系に対するカット除去を示しており、これが現在でも G^1LC の部分体系に対する基本予想の解としては最強である。また無矛盾性証明としては、[3], [4], [5], [6] において、帰納的巨大順序数 (reflecting ordinals) の証明論的解析が与えられた。これらにより、帰納的巨大順序数の理論での証明図の構造が過不足なく順序数に圧縮して表現し得ることが解った。

以上、簡略ではあるが竹内の基本予想の意義とその解のあるべき姿について述べた。詳細については [1], [34] を、また Gentzen の仕事については Kreisel[16] を見られたい。

参考文献

[1] 新井敏康, 竹内の基本予想について, 数学 40 (1988), 322-337.

[2] T. Arai, Cut elimination for SBL, manuscript, 1988.

[3] T. Arai, Ordinal diagrams for recursively Mahlo universes, Arch. Math. Logic 39 (2000), 353-391.

[4] T. Arai, Ordinal diagrams for Π_3-reflection, J. Symb. Logic 65 (2000), 1375-1394.

[5] T. Arai, Proof theory for theories of ordinals I:recursively Mahlo ordinals, Ann. Pure Appl. Logic 122 (2003), 1-85.

[6] T. Arai, Proof theory for theories of ordinals II:Π_3-Reflection, to appear in Ann. Pure Appl. Logic.

[7] W. Buchholz, Eine Erweiterung der Schnitteliminationmethode, Habilitationsschrift München, 1977.

[8] W. Buchholz, An independence result for $(\Pi^1_1 - CA) + BI$. Ann. Pure Appl. Logic 33(1987), 131-155.

[9] W. Buchholz, Explaining Gentzen's consistency proof within infinitary proof theory. In: Computational Logic and Proof Theory, G. Gottlob, A. Leitsch and D. Mundici (eds.). Lecture Notes in Computer Science 1289 (1997), Springer, 4-17.

[10] W. Buchholz, Explaining the Gentzen-Takeuti reduction steps: a second-order system, Arch. Math. Logic, 40 (2001), 255-272.

[11] W. Buchholz and K. Schütte, Ein Ordinalzahlensystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1983, 99-132.

[12] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakter Wissenschaften, Neue Folge 4 (1938), 19-44.

[13] J.-Y. Girard, Une extension de l'interprétation de Gödel à l'anayse, son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types, Proc. second Scand. Logic Symp., Amsterdam 1971, pp. 63-92.

[14] J.-Y. Girard, Three-valued logic and cut elimination: the actual meaning of Takeuti's conjecture, Dissertationes Mathematicae 136, Warsaw (1976).

[15] G. Jäger, Zur Beweistheorie der Kripke-Platek Mengenlehre über natürlichen Zahlen, Archiv math. Logik Grundl. 22(1982), 121-139.

[16] G. Kreisel, Review of the book 'The Collected Papers of Gerhard Gentzen', ed. and transl. by M. E. Szabo, J. Philosophy 68 (1971), 238-265.

[17] G. Kreisel and G. Takeuti, Formally self-referential propositions for cut free classical analysis and related systems, Dissertationes Mathematicae 118, Warsaw (1974).

[18] W. Pohlers, Cut elimination for impredicative infinitary systems, Part I: Ordinal analysis of ID_1, Archiv math. Logik Grundl. 21(1981), 113-129.

[19] W. Pohlers, Cut elimination for impredicative infinitary systems, Part II: Ordinal analysis for iterated inductive definitions, ibid. 22(1982), 69-87.

[20] D. Prawitz, Hauptsatz for higher order logic, J. Symb. Logic 33(1968), 452-457.

[21] M. Rathjen, Ordinal notations based on a weakly Mahlo cardinal, Arch. Math. Logic 29 (1990), 249-263 (1990).

[22] M. Rathjen, Proof-theoretic analysis of KPM, ibid. 30 (1991) 377-403.

[23] M. Rathjen, Proof theory of reflection, Ann. Pure Appl. Logic 68 (1994), 181-224.

[24] K. Schütte, Syntactical and semantical properties of simple type theory, J. Symb. Logic 25(1960), 305-326.

[25] W. Tait, A non constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 980-983.

[26] M. Takahashi, A proof of cut-elimination theorem in simple type theory, J. Math. Soc. Japan 19(1967), 399-410.

[27] G. Takeuti, On a generalized logical calculus, Japan. J. Math. 23 (1953), 39-96.

[28] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC, I, J. Math. Soc. Japan 7(1955), 249-275.

[29] G. Takeuti, Ordinal diagrams, ibid. 9 (1957), 386-394.

[30] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC, V, ibid. 10(1958), 121-134.

[31] G. Takeuti, Ordinal diagrams, II, ibid. 12 (1960), 385-391.

[32] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC, VI, Proc. Japan Acad. 37(1961), 440-443.

[33] G. Takeuti, Consistency proofs of subsystems of classical analysis, Ann. Math. 86 (1967), 299-348.

[34] G. Takeuti, Proof Theory, second edition, North-Holland, Amsterdam, 1987.