数理解析研究所講究録 1444巻 2005年 161-168

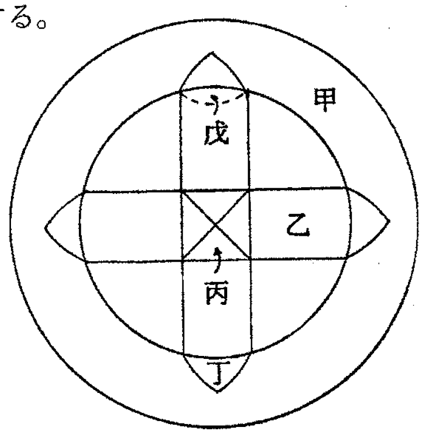
関孝和による十字環などの体積の計算

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

1節 文献

「昨年」とは杉本敏夫『関孝和による球と球欠の表面積と体積の計算』数理解析研究所講究録「数学史の研究」(2003年8月) を指す。今年は〔1〕関孝和『求積』(?)に加え、〔2〕藤原松三郎『明治前日本数学史第一、第二巻』岩波書店(1956)、〔3〕加藤平左エ門『算聖関孝和の業績』槇書店(1972)を参照する。その他に、和算書の内、〔4〕榎並和澄『参両録』(1653)、〔5〕山田正重『改算記』(1658)、〔6〕前田憲舒『算法至源記』(1670)、〔7〕村瀬義益『算法勿憚改』(1673)を引用する。

2節 十字環なる問題



原図

〔4〕榎並が「方円卵」と称して問題を提出した。図のように輪径が $d=4.8/\pi$ で、外径 $D=36/\pi$ なる浮輪(輪環)に同じ輪径の十字の円柱(直環)が組合わさり、複雑な貫通部分(図の丁)を呈する。榎並、山田、前田等の解答は11節に述べる。〔7〕村瀬は切口が d 四方の正方形、長さ D なる4本の棒を組合わせた「炉縁」の体積を求めるのに、棒の体積を求めて4倍する代わり、中心周に相当する方形の長さを切口に掛ける方法を用いた。浮輪は穴明円の面積に厚さ d を掛け、切口が正方形なる浮輪の体積を求め(正方形×中心周)、さらに円積法 $\pi/4$ を掛けて切口を円に直した。中央の貫通部分(丙)や複雑な貫通部分(丁)を正しく解いたかは、不明。

関は戊や丁には巧妙な近似立体を用い、〔1〕『求積』の集大成として巻末に掲げた。

3節 体積の概略

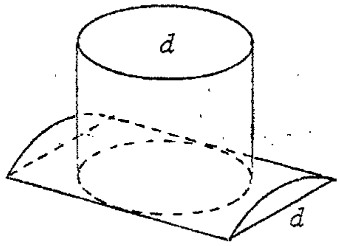
私は村瀬の炉縁方式を拡大解釈して、〔1〕関の十字環も、上図を平面図形と考えて面積を求め(戊は平面の弓形面積)、厚さ d を掛けた立体(切口は正方形)の体積を求め、

切口に円積法$\pi/4$を掛ける（私の原著）。関は浮輪の外径 $D=10$，中心径$D'=9$，内径$D''=8$，切口の直径 $d=1$を与えた。$\pi/4=0.78539816$ として全体積は 33.9563509 と求まった。9節の定積分による体積 34.2209068 と比べて、案外良い値が得られた。

4節　正確な部分立体の体積

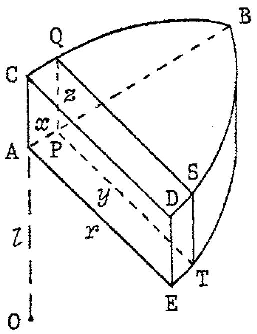
〔1〕関は前頁の原図の如く五つに分解した。以下の計算は、関の求めた値の当否が焦点ではなく、関の近似立体がどれほど定積分による値に近いかを検討することである。そこで関のも私のも、$\pi=3.14159265$ を用い、甲、乙、丙は同じ値を得る。甲積（浮輪）＝円板×中心周＝22.2066099. 乙積（円柱）＝円板×柱長×4＝10.7984517, 柱長は、fを離径＝$\sqrt{D''^2-d^2}$ とするとき、$(f-d)/2$ である。丙積（中央部）＝円壔斜截×4＝0.9041297. ここに円壔斜截とは、高さ $d/2$ なる円柱から二つの蹄形を取り去った立体である。蹄形（昨年13節）は半円を底とし高さ h の場合 $d^2h/6$ なる立体、特に半直角なる場合は $h=d/2$ だから $d^3/12$ なる立体で、丙積一ケ所は $\pi d^3/8-d^3/6$ となる。

5節　戊積の巧妙な近似計算



戊積は、円柱の先端を浮輪内周に沿う円柱状の刃で截り取った立体で、乱視用の円柱レンズに相当する。

比較のため先ず西洋流の定積分を求めよう。定積分の簡明化のため、戊積一ケ所の寸法を2倍（体積は8倍）した立体で考えて、戊積四ケ所のため後で2倍する。

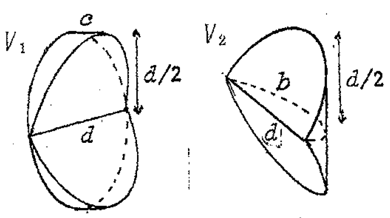


AB＝AE＝1，CO＝BO＝8．体積は

$$\int_0^1 zy\,dx=\int_0^1\left(\sqrt{8^2-x^2}-\sqrt{8^2-1}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=8\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2/64}\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx-\sqrt{63}\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

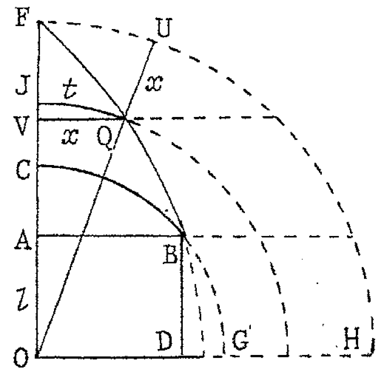
後項は$\sqrt{63}\times\pi/4=6.2339047$,　前項は、$E$ と K を完全楕円積分とすれば、$8((65/3)E(1/8)-(63/3)K(1/8))=6.2708894$ となる。戊積はこの差の2倍だから、0.0739694 となる。



関は巧妙にも二種類の円壔斜截（近似立体）に置き換えた。彼は弧背 b と弓形面積 M について、各所で異なる値を用いた。ここでは関の値の当否ではなく、近似立体値の定積分値への近似の程度を検討するため、$b=8\arcsin(1/8)=1.00262265$,　$M=(bD''-df)/4=0.020931815$, および矢 $c=(D''-f)/2=0.0313730$ を用いる。V_1 は蛇が大きく口を開けた形、V_2 はその補形、

$V_1=2(d^2c/6)=0.01045768$, $V_2=(d/12c)(d^3-6Mf)=0.008375546$. よって、関の戊積$=4(V_1+V_2)=0.0753329$ で、先の定積分値よりも 0.0013635 だけ過剰である。

6節　丁積（貫通部分）の分解



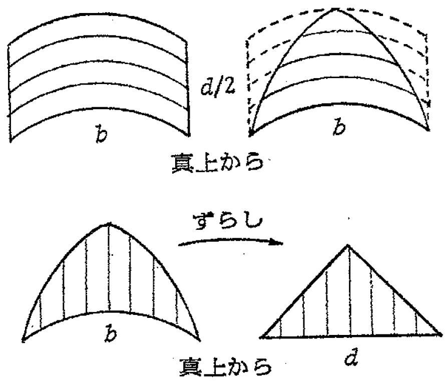
円柱と浮輪が貫通する複雑な立体が残った。〔1〕関は先ず丁積前半として浮輪から船の舳（へさき）先状の立体＝刃壔積を截り取る。これには浮輪との貫通部分（削いだ牛の角（つの）状）＝丁積後半＝虚積が含まれるから、刃壔積から引き去る。

定積分によって丁積全体の姿を示そう。計算の容易化のため、全体の寸法を2倍（体積は8倍）した立体を考え、後で2倍する。AB＝OD＝FC＝GH＝1 は円柱の半径、FO＝OH＝9 は浮輪の中心半径、CO＝OG＝8 は内半径、AO＝BD は半離径$=f/2=\sqrt{63}$. 曲線 FB は浮輪と直円柱の交線で、放物線（焦点と準線から等距離なる点の軌跡）となる。 FB 上に一点Qを取り、VQ＝UQ を x とする。船の舳先＝刃壔積を考えるとき、FBDO 全体から先ず直円柱 □ABDO を引き去り、次いで戊積 CBAを引き去るのが簡明。刃壔積＋戊積 FBAは、

$$\int_0^1\left(\sqrt{(9-x)^2-x^2}-\sqrt{8^2-1}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}\;dx$$
$$=3\cdot\int_0^1\sqrt{(9-2x)(1-x^2)}\;dx-\sqrt{63}\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}\;dx.$$

後項は前節と同じく$\sqrt{63}\times\pi/4=6.2339047$. 前項は変形が難しいので数値積分を行い、昨年5節の「増約術」により精度を高め、2倍し 13.4468457 を得た。これから$\sqrt{63}\pi/2=12.4678093$ を引き 0.9790364, また戊積 0.0739694 を引き 0.9050670. 刃壔積を得た。

削いだ牛の角状の虚積は浮輪の一部分であり、上図の FBC に相当する。円弧の一部を成す長さ $JQ=t=(9-x)\arcsin(x/(9-x))$ と、高さ$\sqrt{1-x^2}$ をもつ撓めた曲面を考え、この曲面を積み重ねた立体とする。定積分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot(9-x)\arcsin(x/(9-x))\;dx$ のため、数値積分と増約術を用い、2倍して虚積$=0.6673209$ を得る。そこで丁積全体は、刃壔積－虚積$=0.9050670-0.6673209=0.2377461$.

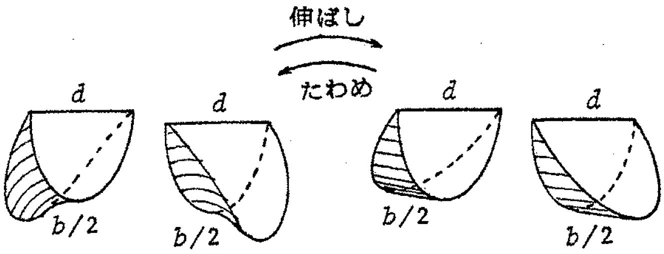


7節　刃壔積の巧妙な近似計算

西洋流の定積分は上記のように難解であった。関の時代に勿論かかる立体の求積法はなかった。〔1〕で彼は、径 d の円柱を浮輪内周に沿った二重の円形のの刃で截り取り、さらに斜めの刃で削いで、船の舳先

状の立体＝刃壔積を得た。さらに縦方向のズラシを施して円壔斜截を得た。実形から見れば歪みを伴っている。しかし彼は鋭い直観により、近似立体を考案したのである。最後の立体は、丙積の四分の一に他ならない。四箇所で丙積と同じく 0.9041297 となる。前節の刃壔積 0.9050670 と比べて、かほどに近似が良いのには驚かざるを得ない。

8節　虚積の巧妙な近似計算



虚積は、削いだ牛の角(つの)の如き立体であり、このままでは途方に暮れる。関は〔1〕で、鋭い直観により、真っ直ぐに伸ばせば円壔斜截に直せると考えた。実形から見れば歪みを伴うが、存外近似が良い。半円を底とし高さ $b/2$ だから $d^2b/12$ が二つ。b は5節で求めた 1.00262265 を用い、虚積は 0.6684151 となり、刃壔積から引いて 0.9041297－0.6684151＝0.2357146 が丁積である。

定積分による 0.2377461 と比べて驚くべき結果である。これは刃壔積が定積分に比べて 0.0009373 不足し、虚積が定積分に比べて 0.0010942 不足し、前者から後者を引いて、丁積全体の誤差が 0.0020315 の不足となったことに依る。

9節　十字環全体の体積

以上の結果を一覧表に示す。4節に述べた理由で、共通に $\pi=3.14159265$ を用いた。

	関の計算値	定積分の値	後者に対する差
甲　積	22.2066099	同　じ	0
乙　積	10.7984517	同　じ	0
丙　積	0.9041297	同　じ	0
丁　積	0.2357146	0.2377461	－ 0.0020315
戊　積	0.0753329	0.0739694	＋ 0.0013635
全体積	34.2202358	34.2209068	－ 0.0006680

この予想外に良い結果は、関の計算値で丁と戊が相殺したためである。

10節　正確と精密の違い

甲・乙・丙積の如く幾何学理論に忠実なのが正確である。それに対して丁・戊積の如く

別の図形で近似し、近似が巧妙なほど精密な値が得られる。関の近似図形が巧妙であったため、予想外に精密な値が得られた。十字環の体積を求める目的からすれば、大成功と言えるかも知れない。しかし（数値は省略するが）、輪径 $d=1$ は同じくし、外径 $D=4$，中心径 $D'=3$，内径 $D''=2$ なる立体では、定積分に比較し関の計算値の誤差は、約 0.031 不足する結果となった。近似が巧妙でも、幾何学理論から外れた計算は欠陥を露呈する。

関の〔1〕『求積』の原文の欠陥は、どこまでが幾何学的に正確で（甲・乙・丙積）、どこが近似図形によるか（丁・戊積）を明示していない点である。丁・戊積の定積分が難しいことは5、6節に見た通り。私も一部、式を変形する代わりに数値積分に頼った。関も〔1〕の圭（二等辺三角形）の求積および昨年5節の合蓋（半球の補題）にも数値積分を用い、加速法の増約術まで用いたから、西洋流の求積と遜色はない。しかし丁・戊積の如き難解な立体にまで数値積分を適用することなく、代わりに巧妙な近似図形に置き換えた。この点は許容できる。しかし、それを明示しない点が批判に晒される。

和算における一般的な傾向は「ともかく出来る限り精密な値が求まればよい」とする。関もその立場に立つ。西洋流の流れを汲む我々には許容し難いが、数学観の違いであるから、和算は別世界の話だと考えねばならないであろう。

11節　関連問題の復元（原著）

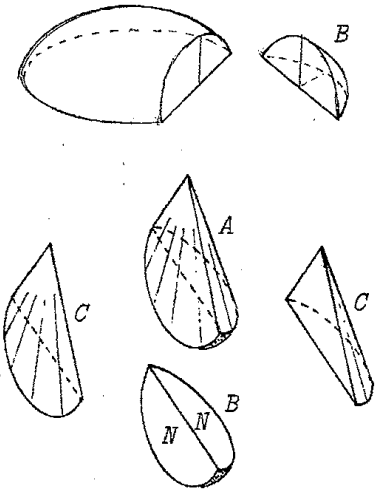
〔4〕榎並は十字環の問題を提出したが、答えは無し。〔5〕山田は輪径 $d=4.8/\pi$，外径 $D=36/\pi$ $(\pi=3.16)$ の下、答えのみ 87.3275 を示した。〔6〕前田は、山田の解が「十字部分の円柱の長さを浮輪内径 $D''=(36-2\cdot4.8)/\pi$ の2倍と仮定した」と考えて復元した。浮輪部分 $=(1/4)\cdot(\pi d/\pi)^2\cdot(\pi D-\pi d)\pi=(1/4)\cdot(\pi d/\pi)^2\cdot98.592$，十字部分 $=(1/4)\cdot(\pi d/\pi)^2\cdot(\pi D-2\pi d)\cdot2=(1/4)\cdot(\pi d/\pi)^2\cdot52.8$，両者の和 $=\pi^2d^2(98.592+52.8)/4\pi^2=3488.07168/39.9424=87.3275[4366]$．[ ]は切り捨て。

〔2〕藤原は原文を採録するのみ。〔3〕加藤は数式で解説したが、98.592 と 52.8 の意味が不明と述べた。私は、単なる中間数値（なるほど変な数値ではあるが）に過ぎず、強いて意味を付与する必要はない、と考える。〔6〕前田は、自身の答えは 85.1039679 になるが、「真の法術は口伝に任す。故に茲に記さず」と言う。何たる秘密主義！　これでは前田が果して実際に解いたか否かが、判定できぬ。和算家にままある態度と言われる。私は試行錯誤の末にほぼ復元したので、以下に示す（私の原著）。①　前田の $\pi=3.1428$．②　十字部分の円柱の長さを、山田と同じく浮輪内径の2倍と仮定したとき、87.973068 となって、目標より過剰。代わりに③　内周に対する離径 $f=\sqrt{26.4^2-4.8^2}/\pi$ を知っていたと仮定し、十字部分の円柱の長さを内径の2倍の代わりに離径 f の2倍と仮定し

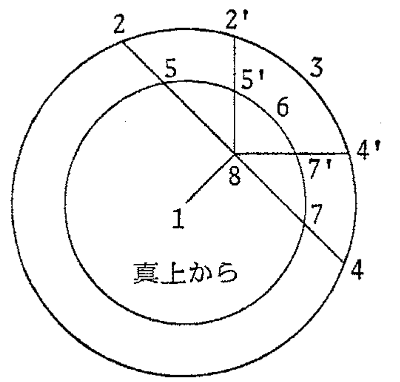
たとき、87.459850. 目標より過剰。よって③の仮定を採り下げる。代わりに ④ 前田は丙積に必要な、半円上半直角の蹄形公式 $d^3/12$ を用いたと仮定し、⑤ さらに十字部分の円柱の長さを $4\cdot(f-d)/2$ と仮定したと考えるとき、浮輪＋丙積＋円柱＝57.182131＋3.223251＋24.679367＝85.084749 となり、前田の 85.1039679 に近い値に到達した。

〔6〕前田『算法至源記』に、離径と蹄形公式があるだろうか？ 離径 f は直接には出て来ないが、径 d, 矢 c, 弦 a の間の関係 $a^2=4dc-c^2$ または $2c=d-\sqrt{d^2-a^2}$ などを用いているので、 $f=\sqrt{d^2-a^2}$ を知っていたであろう。半円半直角の蹄形公式はどこにも見当たらないので、私の仮定④は期待過剰かもしれない。関の〔1〕『求積』において、円壔斜截が初めて取り上げられた、というのが真相かもしれない。

１２節 球欠直截の体積



昨年15、16節で球欠の体積を扱った続きとして、〔1〕関の球欠直截を取り上げる。球欠を水平に置き、垂直な刃で截り取った立体の体積 B を求める。ただし関は水平と垂直の矢が等しい、従って弓形 N が等しい場合を扱う。B の曲面部分の表面積 X を球の中心と結ぶと、落下傘状の立体 A を生ずる。A を球欠直截 B と、また N と中心を結ぶ二つの錐 C とに分解する。曲面積 X が求まれば落下傘 A が求まり、計算が容易な錐 C 二つを引けば、球欠直截の体積 B が残るという論法である。



１３節 球欠の表面積（原著）

問題は、如何にして表面積 X を求めるかに転嫁された。関は X を含む球欠の表面積 Y が求まったものと仮定して、次の公式を提出した。

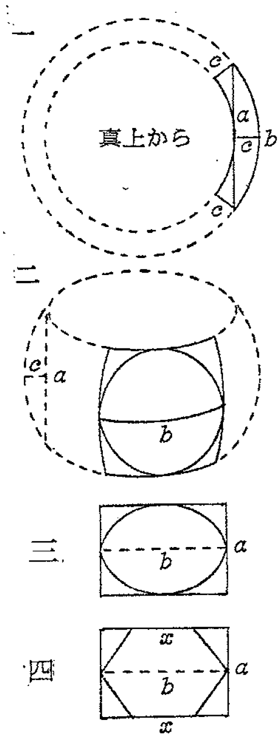
（☆） $X=Y\cdot(p+p')/(b+b')$

ここに、仮背 $b=\widehat{234}$, 中心背 $b'=\widehat{567}$, X の背 $p=\widehat{2'34'}$, X の中心背 $b'=\widehat{5'67'}$ と置いた。従来〔2〕藤原も〔3〕加藤も、公式（☆）の意味を解釈できなかった。

球欠の表面積 Y は曲面を問題としているので、確かに難しい。関は曲面を平面で近似しようと考えた。これが私の推測である。以下もすべて私の推測である。

球欠を一部に含んだカマボコ形の指輪（昨年13節、関の用語では正弧環）を考える。図

で、 $\overset{\frown}{22'3\,4'4}$ が球欠の弧背、$\overline{25874}$ が球欠の截面を表す。指輪の体積を知るには、指輪の断面である弓形、弓形の重心（関の中心）、そして中心周を必要とする。指輪の断面である弓形は、図の $\overline{863}$ に相当し、6 が中心、$\overset{\frown}{55'67'7}$ が中心周の一部に相当する。指輪の体積が一般公式「弓形面積×中心周」により求まることは、昨年13節で述べた。



第一図の c は矢、a は弦、b は背を示す。第二図はこれを立体で示している。球欠を一部として含んだ指輪の部分が、曲面的な四角で示されていることに注目せよ。曲面はそのままでは扱い難い。そこで関は、第三図の如く、曲面を平面に展（のば）した。球欠は平面に展されると楕円状の曲線になる。この楕円状の曲線をさらに第四図の如く、六角形に置き換えた。六角形の面積を求めるためには、図の x なる長さが必要になる。彼は大胆にも x を中心背 b' で置き換えた！　私は数値実験で置き換えの妥当性を確かめた（関の推理の鋭さ）。a を六角形の縦の長さとするとき、球欠の表面積 Y は

（＊）　$Y=a\cdot(b+b')/2$

球欠直截の表面積 X は、式（＊）からの類推で、

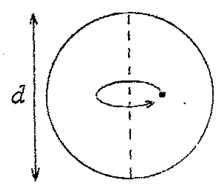
（＊＊）　$X=a\cdot(p+p')/2$

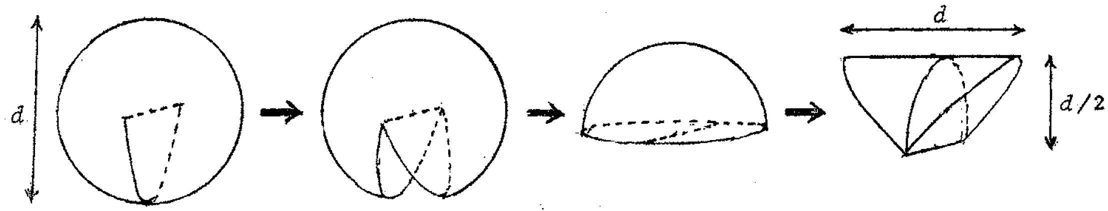
となり、（＊）と（＊＊）から公式（☆）が出る。

このように、球欠直截の体積を考えるためには、指輪の体積、その断面の弓形、弓形の中心、中心周等の諸概念が総動員される。〔1〕関『求積』の集大成と言える。

１４節　蹄形の体積（原著）

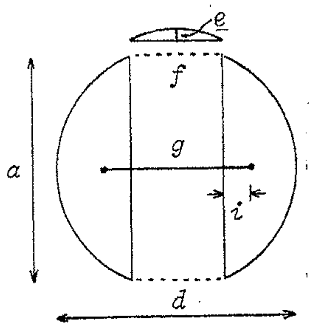
昨年13節と今回４節で、底面が半円で高さが h なる蹄形の体積が $d^2h/6$ であり、特に半直角の場合は $d^3/12$ であると述べた。この点を少し補足する。関は〔1〕『求積』では一般の場合（後述）を説明したのであるが、その論法を用いて先ず半円半直角の場合を考えてみる。球を蜜柑のように多くの半月状の実（み）の袋から成った立体と考える。袋を薄くした極限は、中心軸（直径）の回りに半円を回転させた立体である。切口（半円）に中心周 πg を掛けた $(\pi d^2/8)\cdot\pi g$ が球の体積 $\pi d^3/6$ に等しいから、中心径は $g=4d/3\pi$ となる。半円の重心（関の中心）の位置は、直径から内側に中矢 $g/2$ だけ入った位置にある。ここまでは、球の体積を回転体として考えていて、一見して蹄形の体積とは無関係と思われる。

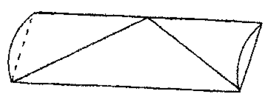




球の下側に半円分の切れ目を入れ、切れ目を広げて行き、右端の図まで変形する。その間、球の周 πd も徐々に縮めて行き、右端の上辺が d になったとする。右端の体積は明らかに $(\pi d^3/6)/\pi = d^3/6$. しかも半円半直角の場合の蹄形を二つ合わせ立体である。

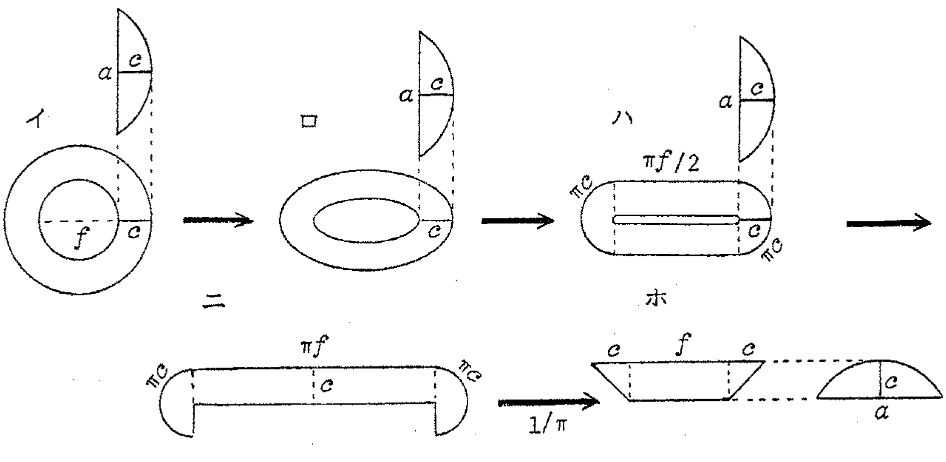
この話は荒唐無稽ではない。〔1〕『求積』で関は一般の場合、面積 M の弓形の上に立つ半直角の蹄形の体積の2倍 $2V$ を、「これ弧環を伸ばして（原文の面を而に改む）、中の弧壔を去らば、則ち両旁適（まさ）にこの形を作る。故に立円旁環（左図）より起こしてこれを求む。」と述べた。藤原の〔1〕『明治前、第二巻』248頁の説明および下図は誤りで、私の次の説明の如く訂正する（原著）。先ずカマボコ形の指輪（立円旁環）の体積 T は、球から二つの球欠（弦 f, 高 e）と中の円柱（径 f, 高 a）を除けばよい。





$$T = \pi d^3/6 - 2(\pi f^2 e/8 + \pi e^3/6) - \pi f^2 a/4 = (\text{中略}) = \pi a^3/6$$

この指輪の中心径 g を $f+2i$（中心は弦から内側に中矢 i 入った位置）と仮定し、弓形の面積を M とすれば、$T = \pi g M$ から g および i が求まる。「弧環を伸ばす」作業は、



イ図の弧環を伸ばして行き、ロ図を経てハ図の点線で繋ぎ直してニ図とする。全体の長さを π で割れば（原文には π で割るが欠落したと考える）、ホ図が得られる。描き直したへ図とト図の両端の立体は、弓形 M 上の半直角の蹄形に他ならない。