数理解析研究所講究録 1449 巻 2005 年 124-131

ラベル付き配置空間の内在的群完備化について

Intrinsic group completions of labeled configuration spaces

岡山大学理学部　島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)
Department of Mathematics, Okayama University

1 はじめに

筆者は，参考文献 [7] において,『パーシャル・モノイド』(partial abelian monoid) から一般ホモロジー理論を構成する方法を与えた。大まかにいって，それは以下のようなものである。

かってなパーシャル・モノイド M と基点付き空間 X に対して，スマッシュ積 $X \wedge M$ もパーシャル・モノイドと考えられる。この $X \wedge M$ にラベルを持つ $\mathbb{R}^\infty$ 内の有限点集合からなる配置空間を $C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ であらわす。すると，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ はホモトピー結合的かつホモトピー可換的ホップ空間であり，$E^M(X) = \Omega C^M(\mathbb{R}^\infty, \Sigma X)$ とおくと，次が成り立つ。

1. X に関して自然な群完備化写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to E^M(X)$ が存在する。

2. $E^M(X)$ は無限ループ空間であり，対応 $X \mapsto \pi_\bullet E^M(X)$ は一般ホモロジー論を定める。

したがって，M に対応するホモロジー論が，無限ループ空間 $E^M(X)$ のホモトピー群として与えられる訳であるが，実際にその詳細な構造を調べ為には，群完備化のより幾何学的ないし内在的な構成法がしばしば必要となる。

本小論では，そのような内在的構成法を二通り紹介しよう。一つ目のものは，適用範囲は限られるが，それを用いることによって $E^M(X)$ では取り扱い辛いある重要な命題に簡明な証明を与えることが可能となる。もう一つのものは，一般の M に対して適用可能であり，未だ具体的な応用例は無いものの，その幾何学的な意味合いから，将来的な応用の可能性が期待される。

2　用語について

2.1　パーシャル・モノイド

基点付き空間 M に対して，以下に列挙する性質をみたす写像の族

$$M^n \to M, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j \ (n \geq 0)$$

が存在するとき，M を**パーシャル・モノイド**とよぶ。

ただし，$(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ が与えられたとき，$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合 $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$ に対して，$(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}) \in M_s$ が成り立つならば，部分列 $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s})$ の $M_s \to M$ による像を $\sum_{j \in J} a_j$ とかくことにする。すなわち，$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{j_\alpha}$ である。

（性質）

1. $M_0 \to M$ は包含写像 $\{0\} \subset M$ である。

2. $M_1 \to M$ は恒等写像である。

3. $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ に対し，$\{1, \ldots, n\}$ の分割 $J_1 \coprod \cdots \coprod J_r = \{1, \ldots, n\}$ があって，すべての k に対して部分和 $\sum_{j \in J_k} a_j$ が存在すると仮定する。このとき，

$$(a_1, \ldots, a_n) \in M_n \iff \left(\sum\nolimits_{j \in J_1} a_j, \ldots, \sum\nolimits_{j \in J_r} a_j\right) \in M_r$$

であり，どちらかの（したがって，双方の）条件がみたされるならば，

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j = \sum\nolimits_{j \in J_1} a_j + \cdots + \sum\nolimits_{j \in J_r} a_j$$

が成り立つ。

例 1. 以下に，代表的なパーシャル・モノイドの例を挙げる。

(a) 全ての基点付き空間 X。ただし，$X_n = X \vee \cdots \vee X$ とし，$X_n \to X$ は折り畳み写像。

(b) 単位元を含むような位相アーベル群のかってな部分集合 M。ただし，

$$M_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid a_1 + \cdots + a_n \in M\}$$

とし，$M_n \to M$ は写像：$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 + \cdots + a_n$。

(c) $\mathbb{R}^\infty$ 内の有限次元部分ベクトル空間のなすグラスマニアン $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)$，ただし，

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)_n = \{(V_1, \ldots, V_n) \mid V_i \perp V_j \text{ if } i \neq j\} \subset \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)^n$$

とし，$\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)_n \to \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)$ は直和をとる写像：$(V_1, \ldots, V_n) \mapsto V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n$。

(d) かってな基点付き空間 X とパーシャル・モノイド M のスマッシュ積。ただし，

$$(X \wedge M)_n = \{(x \wedge a_1, \ldots, x \wedge a_n) \mid x \in X,\ (a_1, \ldots, a_n) \in M_n\}$$

とし，$(X \wedge M)_n \to X \wedge M$ は $M_n \to M$ から誘導される写像。

2.2　ラベル付き配置空間

M がパーシャル・モノイドであるとき，M の元の有限列全体のなす空間（すなわち，非交和 $\coprod_{p \geq 0} M^p$）を考え，その二元 $(a_1, \ldots, a_p), (b_1, \ldots, b_q)$ に対して，写像 $\theta\colon \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, q\}$ が存在して

$$b_j = \textstyle\sum_{i \in \theta^{-1}(j)} a_i \quad (1 \leq j \leq q)$$

が成り立つとき，それらを同一視することによって得られる商空間を $B(M)$ とかく。

かってな空間 V に対して，スマッシュ積 $V_+ \wedge M = V \times M / V \times 0$ もパーシャル・モノイドであることを思い出そう。

定義 2. $v_1, \cdots, v_n$ がすべて相異なる列 $(v_j, a_j) \in (V \times M)^n$ で代表されるような元全体からなる $B(V_+ \wedge M)$ の部分空間を $C(V, M)$ とかく。すなわち，

$$C(V, M) = \{[v_j, a_j] \in B(V_+ \wedge M) \mid\ i \neq j \text{ ならば } v_i \neq v_j\}$$

具体的には，$C(V, M)$ は V の有限部分集合 S と写像 $\sigma\colon S \to M$ からなる対 (S, σ) からなる集合と見なすことができる。ただし，二つの対 (S, σ) および (S', σ') の間に下の関係が成り立つとき，それらは同一視される。

$$S \subset S', \quad \sigma' | S = \sigma, \quad x \notin S \text{ ならば } \sigma'(x) = 0$$

以後，主に $V = \mathbb{R}^\infty$ の場合を取り扱い，さらに，M と X を区別するため，

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X) = C(\mathbb{R}^\infty, X \wedge M)$$

とかく。このとき，射影 $X \vee Y \to X$ および $X \vee Y \to Y$ により誘導される自然変換

$$\rho\colon C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee Y) \to C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \times C^M(\mathbb{R}^\infty, Y)$$

はホモトピー同値写像である。したがって，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は，積

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)^2 \xrightarrow{\rho^{-1}} C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee X) \xrightarrow{\nabla} C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$$

に関して，ホモトピー可換かつホモトピー結合的ホップ空間となる。ただし，ρ^{-1} は $C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee X) \xrightarrow{\rho} C^M(\mathbb{R}^\infty, X)^2$ のホモトピー逆写像であり，∇ は折り畳み写像 $X \vee X \to X$ により誘導される。

$E^M(X) = \Omega C^M(\mathbb{R}^\infty, \Sigma X)$ とかこう。ただし，$\Sigma X = S^1 \wedge X$ である。すると，ホップ空間の間の写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to E^M(X)$ が，合成写像

$$S^1 \wedge C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{l \wedge 1} \mathrm{Map}_0(X, \Sigma X) \wedge C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\varepsilon} C^M(\mathbb{R}^\infty, \Sigma X)).$$

から導かれる。ただし，l は $v \in S^1$ に対して，基点を保つ写像 $x \mapsto v \wedge x$ を対応させる写像とし，ε は評価写像 $f \wedge x \mapsto f_*(x)$ をあらわす。

定理 3 ([7, Proposition 4.5]). 写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to E^M(X)$ は群完備化写像である。すなわち，任意の可換環係数ホモロジーにおいて，誘導準同型

$$H_\bullet(C^M(\mathbb{R}^\infty, X))[\pi^{-1}] \cong H_\bullet(E^M(X))$$

はポントリャーギン環としての同型射である。ただし，$\pi = \pi_0 C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ とする。さらに，$E^M(X)$ は無限ループ空間であり，対応 $X \mapsto \pi_\bullet E^M(X)$ は一般ホモロジー論を定める。

例 4. 以下は古典的な例である。

(a) M として $\mathbf{Z}$ の部分集合 $\{0, 1\}$ をとれば，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は通常の配置空間 $C(\mathbb{R}^\infty, X)$ であり，とくに，X が連結であれば，無限ループ空間 $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$ に弱同値である ([4])。この場合，$X \mapsto \pi_\bullet E^M(X)$ は安定ホモロジー論である。**(Barratt-Priddy-Quillen 定理)**

(b) M として自然数のなす可換可換群 $\mathbf{N}$ をとれば，$C^{\mathbf{N}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限対称積 $\mathrm{SP}^\infty X$ であり，Dold-Thom 定理により，$X \mapsto \pi_\bullet E^{\mathbf{N}}(X)$ は整係数特異ホモロジー論で ある。**(Dold-Thom 定理)**

3 内在的群完備化の構成法 I

位相アーベル群 A の（単位元を含む）任意の部分集合はパーシャル・モノイドであった。この場合，M を $\pm M = \{a - b \mid a, b \in M\}$ で置き換えることにより，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ の群完備化が構成できる，というのがこの節の主張である。すなわち，次が成り立つ。

定理 5 ([6, Theorem 1]). M は位相アーベル群 A の単位元を含む部分集合であるとする。このとき，包含写像 $M \subset \pm M$ により誘導される写像

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

は群完備化写像であり，したがって，ホモロジー論の自然同型

$$\pi_\bullet E^M(X) \cong \pi_\bullet C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

が存在する。

特別な場合として，自由加群 $\mathbf{Z}$ の部分集合 M を考えよう。前節の例で述べたように M として，$\{0,1\}$ をとれば安定ホモトピー論が得られ，一方，自然数全体 $\mathbf{N} = \{0,1,2,\dots\}$ からは整係数特異ホモロジー論が得られる。そこで，これら二つとは異なる一般ホモロジー論が $\mathbf{Z}$ の部分集合から構成できるか否かが問題となるが，M が有限集合である限り，そのようなものは存在し得ないことを，上の定理で与えた内在的群完備化を用いて示すことができる。すなわち，

定理 6. M は 0 を含む $\mathbf{Z}$ の有限部分集合とする。もし，M が 0 と異なる元を一つ以上含み，さらに作用 $n \mapsto -n$ に関して閉じているならば，任意の X に対して，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限ループ空間 $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱ホモトピー同値である。

注意 7. $M = \{0,1\}$ の場合，$C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X) = C^{\pm}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は，Mcduff [2] が導入した " the space of positive and negative particles" に他ならない。Caruso は [1] において，X が局所同等連結（すなわち，対角写像 $X \to X \times X$ がコファイブレーション）であれば，$C^{\pm}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限ループ空間 $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱同値となることを示している。したがって，定理 5 は M および X の双方に関する Caruso の結果の一般化である。

$\pi_\bullet E^M(X)$ が $\pi_\bullet C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$ と同型であることから次も示される。

系 8. 零を含む $\mathbf{Z}$ のかってな有限部分集合 M に対し，$\pi_\bullet E^M(X)$ は X の安定ホモトピー群である。

定理 5 から定理 6 がどのように導かれるかを以下に示そう。

M が定理 6 の条件をみたすとき，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は群状，すなわち，$\pi_0 C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ が群であり，定理 5 によって，自然な写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は弱ホモトピー同値となる。より一般的に，$(\pm)^0 M = M$ とし，1 以上の k に対して

$$(\pm)^k M = \pm((\pm)^{k-1} M)$$

と定める。すると，包含写像 $(\pm)^k M \subset (\pm)^l M$ が誘導する写像

$$C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{(\pm)^l M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

は弱ホモトピー同値である。ただし，$k \leq l$ とする。

M に属する整数全体の最大公約数を d とかく。有限集合 M の元はすべて d の倍数なので，$M \subset (\pm)^j\{0, d\} = \{0, \pm d, \ldots, \pm jd\}$ をみたす整数 $j \geq 1$ が存在する。

一方，d は M の元の整数を係数とする一次結合としてあらわされることから，$d \in (\pm)^k M$ をみたす $k \geq 1$ が存在することがわかる。したがって，

$$\pm\{0, d\} \subset (\pm)^k M \subset (\pm)^l\{0, d\} \subset (\pm)^{k+l-1} M \quad (\text{ただし，} l = j + k)$$

が成り立ち，次の図式が導かれる：

$$C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\gamma_1} C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\gamma_2} C^{(\pm)^l\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$$
$$\xrightarrow{\gamma_3} C^{(\pm)^{k+l-1} M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

ここで，$\gamma_2\gamma_1$，$\gamma_3\gamma_2$ は包含写像 $\pm\{0, d\} \subset \pm\{0, d\}^l$, $(\pm)^k M \subset (\pm)^{k+l-1} M$ から導かれるので，定理 5 により共に弱同値である。したがって，γ_1 も弱同値である。かくて，弱ホモトピー同値写像の鎖

$$C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\simeq} C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \xleftarrow{\simeq} C^M(\mathbb{R}^\infty, X).$$

が存在するが，$C^{\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は本来の配置空間 $C(\mathbb{R}^\infty, X)$ と同相なので，その群完備化 $C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱同値である。(Barratt-Priddy-Quillen 定理)

4　内在的群完備化の構成法 II

前節では M に条件を課したが，本節では，任意の M に対して，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ の群完備化を幾何学的に構成する試みについて解説する。感覚的に言うならば，M の元の逆を幾何学的に構成するというところがポイントである。

奥山 [3] にしたがって，実直線 $\mathbf{R}$ 内の区間のなす空間を $I(\mathbf{R})$ であらわす。$I(\mathbf{R})$ の各元は有限個の有界区間の和である。より具体的には，$I(\mathbf{R})$ の元は和集合

$$P = J_1 \cup \cdots \cup J_r$$

としてあらわされる。ただし，各 J_i は開区間，閉区間および半開区間のいずれかであり，$J_i < J_{i+1}$，すなわち，『$x \in J_i$ かつ $y \in J_{i+1}$ ならば $x < y$』が成り立つとする。

また，その位相の定義により，$I(\mathbf{R})$ においては，$J_i \cup J_{i+1}$ が集合として連結な区間になる（すなわち，片一方の開端点と他方の閉端点が重なる）とき，$J_i \cup J_{i+1}$ はその和集合があらわす単一区間と同一視され，さらに，半開区間の長さが 0 になった途端，その区間は消滅する。明らかに，$I(\mathbf{R})$ は条件

$$(P_1, \ldots, P_n) \in I(\mathbf{R})_n \Longleftrightarrow P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

で定まる部分集合の族 $\{I(\mathbf{R})_n \mid n \geq 0\}$ に関してパーシャル・モノイドである。

$I(\mathbf{R})$ の元 $J_1 \cup \cdots \cup J_r$ で，各 J_i がすべて閉集合であるようなものからなる $I(\mathbf{R})$ の部分集合を $I(\mathbf{R})_+$ であらわす。

定義 9. かってな実ベクトル空間 V，パーシャル・モノイド M および基点付き空間 X に 対して，以下のように定める。

$$I^M(V,X) = C^{I(\mathbf{R})\wedge M}(V,X), \quad I^M_+(V,X) = C^{I(\mathbf{R})_+\wedge M}(V,X)$$

本節の目標は，$I^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ が $C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ の自然な群完備化であることを示すことにあるが，主結果の定式化および証明は有限群の作用を含む形で行うことができる。 そこで，G を有限群とし，定義 9 における V, M, X にはすべて G が然るべき形で作用するものと仮定する。すなわち，V は直交 G 加群であり，M の加法 $M_n \to M$ は G 同変写像であるとする。

このとき，以下の二つの定理が成り立つ。

定理 10 ([5, Theorem 1])**.** ホップ G 空間の写像からなる図式

$$C(V,M) \xleftarrow{\lambda} I_+(V,M) \xrightarrow{\rho} I(V,M)$$

が存在して，以下に述べる性質をみたす。

1. λ は G ホモトピー同値である。

2. ρ は G 同変群完備化である。すなわち，G のすべての部分群 H に対して，$\rho^H\colon I_+(V,M)^H \to I(V,M)^H$ は群完備化写像である。

定理 11 ([5, Theorem 2])**.** V として完備 G ユニバース（例えば，$\mathbf{R}[G]^\infty$）をとれば，対応

$$X \to \pi_\bullet I^M(V,X)$$

は基点付き G 空間のカテゴリー上で G 同変一般ホモロジー論を定める。

参考文献

[1] J. Caruso. A simpler approximation to QX. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265:163–167, 1981.

[2] D. Mcduff. Configuration spaces of positive and negative particles. *Topology*, 14:91–107, 1975.

[3] S. Okuyama. The space of intervals in a euclidean space. preprint.

[4] G. Segal. Configuration spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones Math.*, 21:213–221, 1973.

[5] K. Shimakawa. Interactions of strings and equivariant homology theories. preprint.

[6] K. Shimakawa. Labeled configuration spaces and group completions. preprint.

[7] K. Shimakawa. Configuration spaces with partially summable labels and homology theories. *Math. J. Okayama Univ.*, 43:43–72, 2001.