

ギャップ条件を満たさない有限群について  
FINITE GROUPS NOT FULFILLING THE GAP HYPOTHESIS

角 俊雄 (TOSHIO SUMI)

九州大学大学院芸術工学研究院 (Faculty of Design, Kyushu University)

## 1. 序

球面上の有限群作用を考察するときに、ギャップ条件を満たす表現（ギャップ表現という）が必要となることが多い (cf. [M]). このような表現をもつ有限群をギャップ群とよび、もたない群を非ギャップ群とよぶ. ディスク上の有限群作用については, R. Oliver, B. Oliver の結果 [OR, OB] があり, ある意味完全に決定されているといえる. それに対し, 球面上の有限群作用は, 多くの場合, ギャップ表現のようなよい表現をもつ有限群についてしかわかっていない. そのため, 非ギャップ群である有限群の特徴を抽出することは有効であろう.

ギャップ群であるための必要十分条件は中心化群の条件で示すことができる. さらに, その条件を基にして, 非ギャップ群をクラスわけできる. 群の直積がギャップ群になるかどうか, 中心化群の条件で与えることができる. 本論では, 中心化群の条件とギャップ表現の構成方法について考察する.

## 2. ギャップ表現

有限群  $G$  に対し,  $G$  の位数を割る素数のなす集合を  $\pi(G)$  とする. 素数  $p$  に対し, 指数  $[G : L]$  が  $p$  ベキであるような位数最小な正規部分群を  $p$  型のドレス部分群とよび,  $O^p(G)$  で表す.  $\mathcal{P}(G)$  を, 素数ベキ位数をもつ  $G$  の部分群 (自明な群を含む) のなす集合とする. また,  $\mathcal{L}(G)$  を, どのドレス部分群も含まないような  $G$  の部分群のなす集合とする. 特に,  $\mathcal{L}(G)$  は, 完全群  $G$  では  $G$  以外の部分群のなす集合と一致し, 冪零群  $G$  では  $|\pi(H)| < |\pi(G)|$  なる部分群  $H$  のなす集合と一致する.

$G$ -表現は有限次元実表現を考えることにする.  $G$ -表現  $V$  が  $\mathcal{L}(G)$ -自由であるとは, 任意のドレス部分群による固定点集合の次元が 0 であるときにいう.  $\mathcal{L}(G)$ -自由である  $G$ -表

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 20C15.

*Key words and phrases.* gap group, gap module, representation.

This research was partially supported by Grand-in-Aid for Scientific Research (C) (2) (No. 17540084) of the Japan Society for the Promotion of Science.

現  $V$  がギャップ表現であるとは, すべての  $P \in \mathcal{P}(G), P < H \leq G$  なる組  $(P, H)$  に対し,

$$\dim V^P > 2 \dim V^H$$

を満たすときにいう. ギャップ表現でない表現を非ギャップ表現という. ギャップ群になるためには,  $\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \emptyset$  が必要であることは容易にわかる. そのため, 以降, 次を仮定する.

**仮定 1.**  $\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \emptyset$ .

ギャップ表現はいくつかの表現を直和して構成することが多い.

**命題 1** (cf. [S1]). 任意の有限群  $G$  に対し,  $L/O^2(G)$  が巡回群であるような  $G$  の部分群  $L$  ( $L \geq O^2(G)$ ) すべてがギャップ群であれば,  $G$  はギャップ群である.

$L_1, L_2, \dots, L_r$  を  $L/O^2(G)$  が巡回群であるような  $G$  の部分群  $L$  のなかで, 包含関係  $\geq$  に関して極大な部分群たちの  $G$  における共役類の代表系とする.

**命題 2.**  $L_j$  たちがすべてギャップ群であれば, ギャップ  $L_j$ -表現  $U_j$  に対し,

$$\bigoplus_{j=1}^r \text{Ind}_{L_j}^G U_j$$

はギャップ  $G$ -表現である.

### 3. ギャップ群になるための必要十分条件

命題 1 より, この章では, 仮定 1 に加え, 次を仮定する.

**仮定 2.**  $G/O^2(G)$  は (非自明な) 巡回群である

Laitinen-森本が固定点が 1 点であるような球面上の有限群作用の存在を示すときに利用された表現  $V(G)$  がある ([LM]).

$$V(G) := (\mathbb{R}[G] - \mathbb{R}) - \bigoplus_P (\mathbb{R}[G/G^{(p)}] - \mathbb{R})$$

この  $G$ -表現  $V(G)$  は正則表現  $\mathbb{R}[G]$  の最大  $\mathcal{L}(G)$ -自由  $G$ -表現となっている. 一般に  $V(G)$  はギャップ  $G$ -表現ではないが, 特に,  $O^2(G) = G$  であるか,  $|\pi(G/[G, G])| > 2$  であれば, ギャップ  $G$ -表現である. さらに, すべての  $P \in \mathcal{P}(G), P < H \leq G$  なる組  $(P, H)$  に対し,

$$\dim V(G)^P \geq 2 \dim V(G)^H$$

が成り立つ。そのため、ギャップ表現を構成するときに役に立つ。

$G \neq O^2(G)$  のとき,

$$E_4^g(G) := \{x \in G \mid |x| = 2^* > 2, \langle x \rangle O^2(G) = G, |\pi(O^2(C_G(x)))| \geq 1\}$$

$$E_2^g(G) := \{x \in G \mid |x| = 2, \langle x \rangle O^2(G) = G, |\pi(O^2(C_G(x)))| \geq 2\}$$

と定める。[ $G : O^2(G)$ ] > 2 のとき、 $E_2^g(G)$  は空集合となる。さらに,

$$E^g(G) := E_4^g(G) \cup E_2^g(G)$$

とおく。  $G = O^2(G)$  のときは,

$$E^g(G) := G$$

とする<sup>1</sup>。これら3つの集合は、すべて共役について閉じている。ギャップ群かどうかは、 $E^g(G)$  が空集合かどうかで決定される。

$G \setminus E^g(G)$  の位数2ベキの元たちの  $G$  における共役類  $(x_j)$  の代表系を  $x_j (j \in J)$  とする。 $\mathbb{Q}$ -係数実表現環  $RO(G) \otimes \mathbb{Q}$  の元

$$\bigoplus_{j \in J} \frac{|x_j|}{|N_G(\langle x_j \rangle)|} (\text{Ind}_{\langle x_j \rangle}^G \mathbb{R}[\langle x_j \rangle])_{\mathcal{L}(G)}$$

を適当な整数倍することによって、 $G$ -表現  $W$  を得ることができる。ここで、 $G$ -表現  $V$  に対し、 $V_{\mathcal{L}(G)}$  は、 $V$  の最大  $\mathcal{L}(G)$ -自由  $G$ -表現を表す。  $P \in \mathcal{P}(G)$ ,  $P < H \leq G$  なる組  $(P, H)$  に対し、

$$\dim V^P \geq 2 \dim V^H$$

であって、特に、 $H \setminus P$  が  $E^g(G)$  と交われば、

$$\dim V^P > 2 \dim V^H$$

となるような  $G$ -表現  $V$  が存在する (cf. [S1])。  $W$  は、 $H \setminus P$  が  $E^g(G)$  と交わらないときを対処するもので、 $E^g(G)$  が空でなければ、

$$\dim W^P > 2 \dim W^H$$

となっている。また、 $E^g(G)$  が空のとき、

$$\dim W^P = 2 \dim W^H$$

<sup>1</sup> $G = O^2(G)$  のときの  $E^g(G)$  の定義はどのようにしてもよい。統一して定義できればいいのだが、5次交代群  $A_5$  のように、 $O^2(A_5) = A_5$  であるが、 $A_5$  の元の位数はすべて素数ベキであるような群が存在するため、うまくできない。

である. 一般に  $E^s(G)$  が空のとき, すべての  $\mathcal{L}(G)$ -自由  $G$ -表現  $U$  に対して,

$$\sum_{j \in J} \dim U^{P_j} = 2 \sum_{j \in J} \dim U^{H_j}$$

が成り立つ. つまり,  $U$  はギャップ表現になり得ず,  $G$  は非ギャップ群である. ここで,

$$P_j := O^2(C_G(x_j)) \langle x_j^2 \rangle$$

$$H_j := O^2(C_G(x_j)) \langle x_j \rangle$$

である. 特に,  $|x_j| > 2$  のとき,  $P_j = \langle x_j^2 \rangle, H_j = \langle x_j \rangle$  である.

さて, 指数 2 の部分群列

$$G = F_0 > F_1 > \cdots > F_k = O^2(G)$$

を考える. 上の議論より,  $V_{j-1}$  がギャップ  $F_{j-1}$ -表現で,  $E^s(F_j)$  が空でなければ, 上の  $G$  の代わりに  $F_j$  に適用して,  $W$  を求めれば,

$$\text{Ind}_{F_{j-1}}^{F_j} V_{j-1} \oplus W$$

はギャップ  $F_j$ -表現となる. また,  $E^s(F_j)$  が空のときは, ギャップ  $F_j$ -表現が存在しないことがわかる.  $j = k$  に対しては,  $\mathcal{P}(F_k) \cap \mathcal{L}(F_k) = \emptyset$  の場合は,  $V(F_k)$  がギャップ  $F_k$ -表現となるが, 結局  $G$  への誘導表現をとるので, 最初から  $V(G)$  を考えればよい. よって以下が示せた:

**補題 3.**  $G$  がギャップ群になるための必要十分条件は,  $E^s(F_j)$  がすべて空でないことである ( $0 \leq j \leq k$ ).

$1 \leq j \leq k-2$  に対し,  $x \in E^s(F_{j-1})$  のとき,  $x^2 \in E^s(F_j)$  が成り立つ. つまり,  $E^s(F_{j-1})$  が空でなければ,  $E^s(F_j)$  も空にはならない.  $j = k-1$  のときは自明ではないが,  $E^s(F_{k-2})$  が空でなければ,  $E^s(F_{k-1})$  も空でないことが示せる:

**定理 4.**  $G$  がギャップ群になるための必要十分条件は,  $E^s(G)$  が空でないことである.

#### 4. 直積がギャップ群になるための必要十分条件

一般に  $G$  がギャップ群であるとき, 任意の有限群  $F$  に対し, 直積  $G \times F$  はギャップ群である (cf. [S1]).

正整数  $k$  に対し,

$$G^k := \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k \text{ times}}$$

とおく.

**定理 5.**  $k \geq 2$  のとき,  $G^{k+1}$  がギャップ群であれば,  $G^k$  もギャップ群である.

**証明.** 簡単のため,  $k = 2$  とする. (一般の場合も同様に証明できる.) 命題 1 によって,  $L/O^2(G)$  が巡回群となる部分群  $L > O^2(G)$  がギャップ群であることを示せばよい.  $[G^3 : L^3]$  は 2 ベキのため,  $L^3$  はギャップ群である. よって,  $(x_1, x_2, x_3) \in E^8(L^3)$  が存在する.  $C_{L^3}(x_1, x_2, x_3) = C_L(x_1) \times C_L(x_2) \times C_L(x_3)$  は 2 群でない.  $C_L(x_1)$  が 2 群でないとしてよい.  $x_1$  の位数が 2 でなければ,  $x_1 \in E^8(L)$  がいえ,  $L$  はギャップ群となり,  $L \times L$  もそうである.  $x_2$  の位数が 2 でなければ,  $(x_1, x_2)$  の位数も 2 でなく,  $(x_1, x_2) \in E^8(L^2)$  がいえ,  $L \times L$  はギャップ群となる.  $x_1, x_2, x_3$  ともに位数が 2 であれば,  $O^2(C_{L^3}(x_1, x_2, x_3)) = O^2(C_L(x_1)) \times O^2(C_L(x_2)) \times O^2(C_L(x_3))$  が 2 群でないため,  $O^2(C_L(x_1))$  が 2 群でないとしてよく, このとき,  $x_1 \in E^8(L)$  となり,  $L$  はギャップ群である. よって, いずれの場合も,  $L \times L$  はギャップ群である.  $\square$

5 次対称群  $S_5$  はギャップ群でないが,  $S_5 \times S_5$  はギャップ群であるため,  $k = 1$  では不成立である (cf. [MSY]).

有限群  $G$  が仮定 1, 2 を満たしているとする.  $E_4^8(G)$  と  $E_2^8(G)$  では定義が違っていた.  $E_2^8(G)$  の部分を  $E_4^8(G)$  の条件で与えた場合, 直積がギャップ群になるための条件を与える.

$$E^d(G) := \{x \in G \mid \langle x \rangle O^2(G) = G, |\pi(O^2(C_G(x)))| \geq 1\}$$

と定める<sup>2</sup>. 一般に ( $[G : O^2(G)] = 2$  のとき),  $E^8(G)$  は  $E^d(G)$  の部分集合であるが, 等しいとは限らない.

**定理 6.** 有限群  $G$  は仮定 1, 2 を満たしているとする. 有限群  $F$  は,  $[F : O^2(F)] = 2$ ,  $\mathcal{P}(F) \cap \mathcal{L}(F) = \emptyset$  を満たしていて, さらに, 位数 2 ベキ  $> 2$  の  $O^2(F)$  の外の元が存在するとする. このとき,  $E^d(G) \neq \emptyset$  ならば  $G \times F$  はギャップ群である.

**定理 7** ([S3, Theorem 12]). 仮定 1, 2 を満たす有限群  $G$  に対し, 2 型のドレス部分群  $O^2(G)$  の位数が偶数のとき, 次は同値である.

- (1)  $E^d(G) \neq \emptyset$
- (2)  $G^k$  はギャップ群である ( $k \geq 2$ ).

<sup>2</sup>仮定 2 のため,  $[G : O^2(G)] > 2$  のときは,  $E^d(G) = E^8(G)$  なので意味がないが, 次章で一般の群に対して議論するときには意味を持つ.

$O^2(G)$  の位数が奇数の場合, 上の定理は成り立たない. 可換群  $A$  に対し,

$$\langle h, a \in A \mid h^2, (ah)^2 (a \in A) \rangle$$

なる位数  $2|A|$  の群を一般化された 2 面体群という. 特に,  $A$  が巡回群のとき, 上の群は 2 面体群である. 位数が 4 の倍数でない偶数であるような一般化された 2 面体群  $D$  に対し,  $O^2(D)$  は可換群で,  $G$  の  $O^2(G)$  の外の元はすべて位数 2 である. よって,  $E^d(D)$  は空集合である. 奇素数  $p$  と位数  $p$  の巡回群  $C_p$  に対して,  $E^d(D \times C_p)$  は空でなくなるが,  $(D \times C_p)^2$  は非ギャップ群である.

次に, 2 つの直積について考察する. 定理 4, 7 より,  $G$  の幾つかの直積がギャップ群であるかどうかは,  $E^d(G), E^s(G)$  で調べることができる.

**定理 8.**  $G$  を仮定 1 を満たす有限群とする. このとき, 次は同値である.

- (1) 任意の素数  $p$  に対して,  $G \times C_p$  は非ギャップ群である.
- (2) 任意の素数  $p$  と, 任意の  $p$ -群  $P$  に対して,  $G \times P$  は非ギャップ群である.
- (3) 一般化された 2 面体群  $D$  ( $O^2(G) \leq D \leq G$ ) が存在する.
- (4)  $O^2(G)$  の巡回群による拡大となっている  $G$  の部分群の中で極大なものの共役類の個数を  $n$  とする.  $G \times C_p$  は非ギャップ群であるような奇素数  $p$  が少なくとも  $n+1$  個存在する.

ただし,  $C_p$  は位数  $p$  の巡回群を表す.

定理 8 から, 非ギャップ群を無限に構成できる。

**系 9.** 仮定 1, 2 を満たし,  $O^2(G)$  が非可換群であるような有限群  $G$  に対し,  $G \times C_p$  が非ギャップ群であるような奇素数  $p$  は高々 1 つしか存在しない. ただし,  $C_p$  は位数  $p$  の巡回群を表す.

さらに, 次が成り立つ.

**定理 10.**  $G$  を定理 8 における有限群とする.  $\mathcal{P}(F) \cap \mathcal{L}(F) = \emptyset$  を満たす有限群  $F$  に対し, 直積  $F \times G$  がギャップ群であれば,  $F$  もギャップ群である.

## 5. 一般の有限群への拡張

$G/O^2(G)$  が巡回群であるような有限群  $G$  に対して, 3 章や 4 章にて, それぞれ,  $E^s(G), E^d(G)$  の定義を行った. 本章では, 一般の有限群について考察する.

$G$  を  $G \neq O^2(G)$  を満たす有限群とする.  $G$  の元  $x$  が極大であるとは,  $x$  を含む  $G$  の巡回部分群  $C$  に対して,  $C$  は  $x$  で生成されるときにいう. 命題 2 からすると, 以下のように定義するのが妥当であろう.

$$E^s(G) := \bigcup_x E^s(O^2(G)\langle x \rangle)$$

$$E^d(G) := \bigcup_x E^d(O^2(G)\langle x \rangle)$$

ただし,  $x$  は  $O^2(G)$  の外の位数 2 ベキの極大元全体を動く.  $E^s(G), E^d(G)$  とともに, 共役について閉じている. 有限群  $F$  に対して,  $M(F)$  を  $F$  の極大元の共役類全体のなす集合とする.  $\rho: G \rightarrow G/O^2(G)$  を自然な射影とすると, その射影の制限が写像

$$\rho|_{E^s(G)}: E^s(G)/\text{conj} \rightarrow M(G/O^2(G))$$

$$\rho|_{E^d(G)}: E^d(G)/\text{conj} \rightarrow M(G/O^2(G))$$

を誘導する.

**定理 11.**  $G$  を仮定 1 を満たす有限群とする. このとき, 次は同値である.

- (1)  $\rho|_{E^s(G)}$  は全射である.
- (2)  $G$  はギャップ群である.

定理 6 も同様に,  $E^d(G) \neq \emptyset$  を  $\rho|_{E^s(G)}$  は全射である条件に置き換えると成り立つ. 直積のときと同様に, リース積についても拡張できる.

**定理 12.**  $G$  を仮定 1,  $G \neq O^2(G)$  を満たす有限群とする. 2 型のドレス部分群  $O^2(G)$  の位数が偶数のとき, 次は同値である.

- (1)  $\rho|_{E^d(G)}$  は全射である.
- (2)  $G^k$  はギャップ群である ( $k \geq 2$ ).
- (3) 任意の自明でない有限群  $F$  に対して,  $G \int F$  はギャップ群である.

**証明.** (1)  $\implies$  (3) は, [S3, Theorem 18] の証明とほぼ同様に,  $E^s(G \int F) \neq \emptyset$  を示すことができる. 途中,  $E^s(G^2) \neq \emptyset$  を証明し利用する. (3)  $\implies$  (2) は,  $F$  を位数が十分大きな 2 ベキの巡回群とすれば,  $[G \int F : G^{[F]}]$  が 2 ベキであることから従う. (2)  $\implies$  (1) は, 定理 5 の証明をみればわかる. □

## 6. 結び

有限群のなかで、非ギャップ群はそう多く存在しないと思われる。そこで、非ギャップ群の特徴が調べられないだろうか。例えば、非ギャップ群  $G$  のシロー 2 部分群  $G_2$  の形が決まらないだろうか。特に、2 型のドレス部分群  $O^2(G)$  が指数 2 である条件の下で、 $O^2(G)$  の外の位数 2 の元の共役類の個数はいくらでも大きくできるだろうか。  $G_2 \setminus O^2(G)$  の位数 2 の元が  $G_2$  を生成する場合は、 $G_2$  は位数 2 であるので、共役類の個数は 1 個になる。一般の場合は不明である。

## 参考文献

- [LM] E. Laitinen and M. Morimoto, Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres, *Forum Math* 10 (1998), 479–520.
- [M] M. Morimoto, Deleting-inserting theorems of fixed point manifolds, *K-theory* 15 (1998), 13–32.
- [MSY] M. Morimoto, T. Sumi. and M. Yanagihara, Finite groups possessing gap modules, *Contemp. Math.* 258 (2000), 329–342.
- [S1] T. Sumi, Gap modules for direct product groups, *Jour. Math. Soc. Japan* 53 (2001), 975–990.
- [S2] ———, Gap modules for semidirect product groups, *Kyushu Jour. Math.* 58 (2004), 33–58.
- [S3] ———, 2-elements outside of the dress subgroup of type 2, 短期共同研究「変換群論と surgery」, 数理解析研究所講究録 1393 (2004), 33–43.
- [OR] R. Oliver, Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes, *Comment. Math. Helv.* 50 (1975), 155–177.
- [OB] B. Oliver, *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces*, *Topology* 35 (1996), 583–615.

DEPARTMENT OF ART AND INFORMATION DESIGN, FACULTY OF DESIGN, KYUSHU UNIVERSITY, SHIOBARU 4-9-1, FUKUOKA, 815-8540, JAPAN  
*E-mail address:* sumi@design.kyushu-u.ac.jp