

空間形問題とその tangential 化について

On space form problem and its tangential version

京都大学 数理解析研究所 吉野 太郎 (Taro Yoshino)
 Research Institute for Mathematical Sciences,
 Kyoto University

1 導入

n 次元球面 S^n は完備で正の定曲率を持つコンパクトなリーマン多様体である。 S^n の (ある種の) 擬リーマン化がいつ存在するか考えてみよう。

問題 1 (空間形問題). 完備で正の定曲率を持つコンパクトな符号 (p, q) の擬リーマン多様体はいつ存在するか?

この問題に対する部分的な答えとして次が知られている。

事実 2. (p, q) が以下の表に含まれるときは存在する。

p	N	0	1	3	7
q	0	N	2N	4N	8

Table 1

上の結果は $p = 1, 3$ の場合は Kulkarni [Ku81] によって、 $(p, q) = (7, 8)$ の場合は小林 [Ko96] によって証明された。一方、事実 2 の逆は証明されていないが、次のように予想されている。

予想 3 (空間形予想; [Ko01]). (p, q) が Table 1 に含まれないときは存在しない。

正の定曲率を持った擬リーマン多様体を **球空間形** と呼ぶ (定義 5)。問題 1 は、完備でコンパクトな球空間形の存在を問う問題であり、空間形問題と呼ばれている。

空間形問題、及びその tangential 化がこの話の主題である。‘tangential 化’ の正確な定義は後で述べることにし、先に主結果を見ることにしよう。

主定理 4 ([KoY05]). 完備でコンパクトな符号 (p, q) の *tangential* 空間形が存在する必要十分条件は次の不等式で与えられる:

$$p < \rho(q). \quad (1)$$

ここで $\rho(q)$ は q の Hurwitz-Radon 数であり、 $q = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$ (u は奇数、 $\beta \leq 3$) に対して

$$\rho(q) := 8\alpha + 2^\beta \quad (2)$$

と定義される (但し $\rho(0) := \infty$ とする)。 q を奇数倍しても $\rho(q)$ の値は変わらないので、 q が 2 の巾のときの $\rho(q)$ の値を見ておこう。

$\rho(q)$	1	2	4	8	9	10	12	16	17	18	20	24	25	...
q	1	2	4	8	16	32	64	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	...

Table 2

これより (1) を満たす (p, q) を具体的に書き下すと次の様になる。

p	N	0	1	2, 3	4...7	8	9	...
q	0	N	2N	4N	8N	16N	32N	...

Table 3

空間形問題とその *tangential* 化を結びつける一般論は今のところ見つかっていないものの、その答え (Table 1、Table 3) は比較的似ている。そのため著者は、空間形問題とその *tangential* 化の関係を調べることで、今後、空間形問題の解決に向けて前進できるのではないかと期待している。

この講義録では空間形問題とその *tangential* 化について見てゆく。Section 2 では空間形問題について定式化し、Clifford-Klein 形の言葉を用いた表現に書き換える。Section 3 では空間形問題の *tangential* 化を定式化し、もとの空間形問題との関連について考察した後、主結果の証明の概略を見てゆく。

2 空間形問題

‘*tangential* 化’の話は後回しにして、この節ではまず空間形問題について考えていこう。

2.1 一般の空間形問題

最初に空間形を定義する。

定義 5. 定曲率の擬リーマン多様体を **空間形** (*space form*) という。特に、曲率が正の場合は **球空間形** (*spherical space form*) という。

従って問題 1 は「完備でコンパクトな球空間形」の存在問題であると言える。この問題の動機は「コンパクトな球空間形」の部分であり、完備性は問題を簡単にするための技術的な条件である。実際、 $\min(p, q) \leq 1$ の場合には完備性がコンパクト性から導かれる事が知られている ([K196])。

問題 1 は曲率が正の空間形を扱っている。同じようにコンパクトな空間形の存在問題を曲率が 0 あるいは負の場合に考えることも出来る。しかし、これらを新しい問題として定式化しても、さほど意味は無い。実際、曲率が 0 のコンパクトで完備な空間形は常に存在し (\mathbb{R}^{p+q} に自然に符号 (p, q) の擬リーマン計量を定めると、商空間 $\mathbb{Z}^{p+q} \backslash \mathbb{R}^{p+q}$ は符号 (p, q) のトーラスとなる)、符号 (p, q) のコンパクトで完備な負曲率空間形の存在は、符号 (q, p) のコンパクトで完備な正曲率の空間形の存在に帰着される (擬リーマン計量の定義 $ds^2 = dx_1^2 + \dots$ を $ds^2 = -(dx_1^2 + \dots)$ に置き換えれば良い)。即ち、一般の空間形問題を考えるにあたって、曲率が正あるいは負のどちらか一方の場合のみを扱えば十分である。

これ以降は、曲率正の空間形、即ち球空間形について考える。このとき、計量を適当にスカラー倍することで曲率は 1 であるとして一般性を失わない。

2.2 Clifford-Klein 形

曲率 1 の完備でコンパクトな空間形の存在は“コンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題”として定式化することが出来る。Section 2.3、Section 2.4 において、問題 1 を少しずつ変形し最終的にコンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題に帰着される様子を見てゆく。ただし、目標を見失わないよう変形の最終的な形 (問題 7) を先に見ておくことにしよう。空間形問題の tangential 化は、この最終的な形に対して自然に定義される。

まず、Clifford-Klein 形を定義する。 G をリー群とし、 H を閉部分群とする。 G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき商写像

$$\omega : G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$$

は被覆写像となり、 ω が局所微分同相写像となるように商空間 $\Gamma \backslash G/H$ に多様体の構造を入れることが出来る。

定義 6. 上の多様体 $\Gamma \backslash G/H$ を等質空間 G/H の Clifford-Klein 形という。

Clifford-Klein 形の言葉を用いると問題 1 は、次のように言い替えることが出来る。

問題 7. 等質空間 $O(p+1, q)/O(p, q)$ のコンパクトな Clifford-Klein 形はいつ存在するか?

この節の残りの部分で、問題 1 を少しずつ変形し、最終的に問題 7 の形に至る様子を見ていく。

2.3 余コンパクトな離散群の存在問題

まず初めに、問題 1 をある離散群の存在問題に帰着しよう。

コンパクト性を仮定しなければ、完備で曲率 1 の空間形は常に存在する。実際、これは次のように具体的に構成できる： \mathbb{R}^{p+q+1} に自然に符号 $(p+1, q)$ の擬リーマン計量を定め、 \mathbb{R}^{p+q+1} の超平面 $X(p, q)$ を次で定める。

$$X(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} : x_1^2 + \cdots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q+1}^2 = 1\}. \quad (3)$$

このとき：

命題 8. $X(p, q)$ は完備で曲率 1 の擬リーマン多様体である。従って、特に完備な球空間形である。また、 $X(p, q)$ は $p \geq 2$ ならば連結かつ単連結である。

次の事実は、任意の完備な球空間形が $X(p, q)$ に局所微分同相である事を意味する。

事実 9 ([W84]). M を曲率 1 の完備で連結な符号 (p, q) の球空間形とする。 M の普遍被覆多様体 \tilde{M} は、以下のものと同型である。

$$\tilde{M} \simeq \begin{cases} X(p, q) & (p \geq 2 \text{ のとき}), \\ \tilde{X}(1, q) & (p = 1 \text{ のとき}), \\ X_0(0, q) & (p = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

但し $\tilde{X}(1, q)$ は $X(1, q)$ の普遍被覆多様体、 $X_0(0, q)$ は $X(0, q)$ の $(1, 0, \dots, 0)$ を含む連結成分とする。

以下、簡単のために $p \geq 2$ の場合のみを考える ($p = 0, 1$ の場合には、事実 9 に基づいて $X(p, q)$ を $\tilde{X}(1, q)$ や $X_0(0, q)$ に読みかえれば良い)。

事実 9 より、曲率 1 の完備で連結な球空間形 M は、基本群 $\Gamma := \pi_1(M)$ によって、 $M \simeq \Gamma \backslash X(p, q)$ と書ける事が分かる。これより、問題 1 は次のように言い替えることができる。

問題 10. $X(p, q)$ に作用する離散群 Γ で次の条件を満たすものはいつ存在するか？

- (a) Γ は $X(p, q)$ に固有不連続かつ固定点自由に作用する。
- (b) Γ は $X(p, q)$ の擬リーマン計量を保つ。
- (c) $\Gamma \backslash X(p, q)$ はコンパクトである。

注意 11. 条件 (a) に関しては、一般的多様体 M に対し、基本群 $\pi_1(M)$ の普遍被覆多様体 \tilde{M} への作用は固有不連続かつ固定点自由であることに注意。逆に、多様体 X に離散群 Γ が固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき商写像

$$\varpi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$$

は被覆写像となり、 ω が局所微分同相写像となるように $\Gamma \backslash X$ に多様体の構造を定めることが出来る。

条件 (b) は、商多様体 $\Gamma \backslash X(p, q)$ が擬リーマン計量を持ち、被覆写像 ω が擬等長写像となるために必要かつ十分な条件である。

2.4 $O(p+1, q)$ の離散部分群の存在問題

問題 10 をさらに言い替えよう。

G を不定値直交群 $G := O(p+1, q)$ とし、 $X(p, q)$ を (3) で定めた超平面とする。このとき、 G は $X(p, q)$ に擬リーマン計量を保って作用し、逆に、 $X(p, q)$ 上の擬リーマン計量を保つ変換は G に属する。従って、問題 10 の条件 (b) は $\Gamma \subset G$ と言い替えることが出来る。

一方、 G は $X(p, q)$ に推移的に作用する。従って $X(p, q)$ は等質空間であり、一点 x (例えば $x = (1, 0, \dots, 0)$) を固定する G の部分群 $H := G_x$ を用いて、 $X(p, q) \simeq G/H$ と書くことができる。

以上より、問題 10 の言い替えとして次を得る。

問題 12. $(G, H) = (O(p+1, q), O(p, q))$ とする。次の条件を満たす G の離散部分群 Γ はいつ存在するか?

- (a) Γ は等質空間 G/H に固有不連続かつ固定点自由に作用する。
- (b) $\Gamma \backslash G/H$ はコンパクトである。

この問題を Clifford-Klein 形の言葉を用いて書き換えたものが、問題 7 に他ならない。(但し、 $p = 1$ の場合には $G = \tilde{O}(2, q)$ と考える。)

3 Tangential 化

この節では、等質空間 $G/H := O(p+1, q)/O(p, q)$ に対し、その tangential 等質空間 G_θ/H_θ が定義される。

問題 7 (あるいは問題 7) は G/H のコンパクトな Clifford-Klein 形の存在を問う問題であった。その tangential 化は G_θ/H_θ のコンパクトな Clifford-Klein 形を問う問題として定式化される。

3.1 簡約型等質空間の tangential 化

問題 7 において $G = O(p+1, q)$ は簡約リー群であり、 $H = O(p, q)$ はその簡約部分群である。このような簡約リー群 G とその簡約部分群 H に対し、その等質空間 G/H を

簡約型等質空間という。ここでは一般の簡約型等質空間 G/H に対し、その tangential 化 G_θ/H_θ を定義しよう。

G を簡約リー群とし θ をそのカルタン対合とする。このとき、 G のリー環 \mathfrak{g} は θ に応じて $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とカルタン分解する。

\mathfrak{k} をリー環とする G の解析的部分群 K は、 \mathfrak{p} に Adjoint として作用する。 K と \mathfrak{p} の半直積群

$$G_\theta := K \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{p}$$

を G のカルタン運動群という。このとき G と G_θ は微分同相写像

$$\Phi_\theta : G \rightarrow G_\theta, \quad e^X k \mapsto (k, X)$$

を通じて多様体として同型となるが、一般にリー群としては同型でなく、最早 G_θ は簡約リー群ではない。

H を G の θ 不変な部分群とし、連結成分が有限個と仮定する。このとき、 H はそれ自身簡約リー群となり、カルタン運動群 H_θ を考えることが出来る。一方、 Φ_θ は群準同型写像ではないにもかかわらず、 H の像 $\Phi_\theta(H)$ は G_θ の部分群となり、かつ H_θ とリー群同型となる。従って、同型 $H_\theta \simeq \Phi_\theta(H) \subset G_\theta$ を通じて H_θ を G_θ の部分群とみなすことができ、等質空間 G_θ/H_θ を考えることが出来る。このとき、次のような言葉を導入しよう。

定義 13. 上の等質空間 G_θ/H_θ を G/H の tangential 等質空間という。特に、 G/H が対称空間のときは G_θ/H_θ もまた対称空間となり、これを tangential 対称空間ともいう。さらに G/H が球空間形、つまり $O(p+1, q)/O(p, q)$ のとき、その tangential 対称空間を tangential 空間形という。

3.2 コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題の tangential 化

等質空間 G/H を一つ選んだとき、そのコンパクト Clifford-Klein 形の存在を問うことが出来る。この問題に対し、 G_θ/H_θ のコンパクト Clifford-Klein 形の存在を問う事を (問題の) 'tangential 化' という。

tangential 化することで問題が (比較的) 簡単になることが経験的に分かっている。また、現在知られている限り、両者のコンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在に関する結果は一致している。即ち、

G/H にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する

$$\iff G_\theta/H_\theta \text{ にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する}$$

という命題は (どちら向きの implication も証明されていないが) 今までのところ反例も見つかっていない。

従って、問題の tangential 化は、元の問題に対する「良い近似」であると考えることが出来る。

最も簡単な例として、リーマン対称空間 G/K を考えよう。つまり、 G を簡約型リー群とし、 K をその極大コンパクト群とする。このとき、リーマン対称空間 G/K は $P := \exp(\mathfrak{p})$ と自然に同型であり、tangential 対称空間 G_θ/K_θ は \mathfrak{p} と自然に同型となる (この辺りが tangential 化と名付けた「気持ち」である)。

Borel [Br63] によると、 G/K は常にコンパクト Clifford-Klein 形を持つ。つまり、 $\Gamma \backslash G/K$ がコンパクト多様体となるような、離散部分群 $\Gamma \subset G$ が存在する。

一方、これを tangential 化した問題は殆ど自明である。実際、 $G_\theta/K_\theta \simeq \mathfrak{p}$ は線形空間であるから、 $\mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^n$ の余コンパクトな離散群として \mathbb{Z}^n を選べば良い (\mathfrak{p} は G_θ の閉部分群であるから、 \mathbb{Z}^n は G_θ の離散部分群である)。

いま、 $G/K \simeq P$ と $G_\theta/K_\theta \simeq \mathfrak{p}$ は、多様体としては同型、つまり $\exp : \mathfrak{p} \rightarrow P$ を通じて微分同相である事に注意しよう。しかし、考えている幾何構造が異なるため、許容される離散群が異なる (一方では G の離散部分群、他方では G_θ の離散部分群でなければならない)。従って、一方の離散群から Φ_θ や \exp を通じて他方の離散群が得られる訳ではなく、 Γ と \mathbb{Z}^n はいわば「それぞれ独立に存在している」と言える。

この事情は、一般の等質空間においても同様である。すなわち、 G/H と G_θ/H_θ は多様体としては同型である。しかし、許容される離散群は異なり、両者のコンパクト Clifford-Klein 形の存在を直接結びつける一般論は (今のところ) 存在しない。

3.3 Tangential 空間形問題

以上の一般論を空間形問題に適用することで、tangential 空間形問題を考えることが出来る。そして、主定理 4 はその解を完全に与えている。

Section 3.2 の初めに見たように、現在証明されている結果に限れば、 G/H と G_θ/H_θ それぞれのコンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在は一致している。

実際、空間形問題についても存在しないことが実際に確かめられているのは次の結果のみであり、これは主定理 4 の結果に反していない。

事実 14 ([W84], [Be96], [KoO90]). (p, q) が次の条件のいずれかを満たすならば、符号 (p, q) の完備でコンパクトな空間形は存在しない。

(a) $p \geq q > 0$.

(b) $p + 1 = q$ is odd.

(c) pq is odd.

一方、まだ分かっていない部分、すなわち予想の部分にまで視野を広げると、元の空間形予想 (予想 3) と、その tangential 化の解 (主定理 4) は異なっている。その為、著者

は密かな期待を抱いてしまう、実は予想 3 は偽であり、まだ知られていないコンパクト空間形が存在するのではなかろうか、と。例えば、 $(p, q) = (2, 4)$ は期待できる一例である。あるいは逆に、 $(p, q) = (2, 5)$ の場合にコンパクト空間形が存在しないことは比較的容易に確かめられそうにも思える。

3.4 証明の概略

最後に主定理の証明の概略を見てゆく。結果として主定理は補題 16 に帰着されるが、この補題の証明は省略する。

次で見るように、不等式 $p < \rho(q)$ は、一見無関係に思える多くの命題と同値である (ρ の定義は (2))。

命題 15. 自然数の組 (p, q) に関する次の命題は同値である。

(i) $G/H = O(p+1, q)/O(p, q)$ としたとき、 G_θ/H_θ がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ。

(ii) 双線形写像 $f: \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在して次を満たす。

$$f(v, w) = 0 \text{ ならば } v = 0 \text{ または } w = 0 \quad (v \in \mathbb{R}^{p+1}, w \in \mathbb{R}^q)$$

(iii) 双線形写像 $f: \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在して次を満たす。

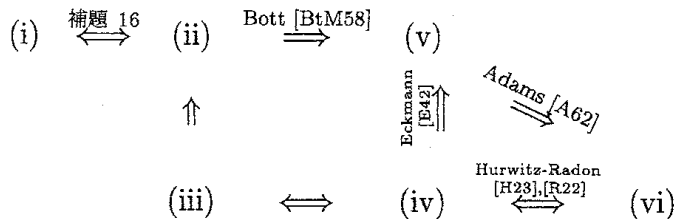
$$\|f(v, w)\| = \|v\| \cdot \|w\| \quad (v \in \mathbb{R}^{p+1}, w \in \mathbb{R}^q)$$

(iv) $(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2) \cdot (y_1^2 + \dots + y_q^2) = z_1^2 + \dots + z_q^2$ が恒等式となるように、 z_1, \dots, z_q を $x_1, \dots, x_{p+1}, y_1, \dots, y_q$ の双線形写像として書き表せる。

(v) $q-1$ 次元球面 S^{q-1} 上に、各点で一次独立なベクトル場が p 本とれる。

(vi) $p < \rho(q)$

この中の (i) と (vi) が同値であるという主張が、主定理 4 に他ならない。(ii) から (vi) が同値であることは 1962 年には知られていた。より正確には次の図のようになる。



ここで、(iii) \Rightarrow (ii) や (iii) \iff (iv) は自明である。それ以外の implication については発見者の名前を添えた。従って、命題 15 は (i) \iff (ii)、つまり次の補題に帰着される。

補題 16. 自然数の組 (p, q) に関する次の命題は同値である。

(i) $G/H = O(p+1, q)/O(p, q)$ としたとき、 G_θ/H_θ がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ。

(ii) 双線形写像 $f: \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在して次を満たす。

$$f(v, w) = 0 \text{ ならば } v = 0 \text{ または } w = 0 \quad (v \in \mathbb{R}^{p+1}, w \in \mathbb{R}^q)$$

この命題の証明には多くの準備が必要となってしまうため省略する。

ところで、(i) と (v) には少し面白い関係が見られる。(i) において G_θ/H_θ は $S^p \times \mathbb{R}^q$ と微分同相である。一方 (v) は、接バンドル $T(S^{q-1})$ の部分バンドルとして、自明なバンドル $S^{q-1} \times \mathbb{R}^p$ が取れると主張している。つまり、 p と q の役割が何故か「逆転」している事が見て取れる。今のところ、このような逆転現象を直接説明するような議論は得られていない。

参考文献

- [A62] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. **75** (1962), 603–632.
- [Be96] Y. BENOIST, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. **144** (1996), 315–347.
- [Br63] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.
- [BtM58] R. BOTT AND J. MILNOR, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.
- [E42] B. ECKMANN, *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen*, Comment. Math. Helvetici **15** (1942/43), 358–366.
- [H23] A. HURWITZ, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. **88** (1923), 1–25.
- [Kl96] B. KLINGLER, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. **306** (1996), 353–370.
- [Ko96] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, In: Lecture Notes of the European School, August 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Math **17**. Academic Press (1996), 99–165.

- [Ko01] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited–2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer (2001), 723–747.
- [KoO90] T. KOBAYASHI AND K. ONO, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Univ. of Tokyo **37** (1990), 71–87.
- [KoY05] T. KOBAYASHI AND T. YOSHINO, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces –revisited*, to appear.
- [Ku81] R. S. KULKARNI, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Adv. Math. **40** (1981), 10–51.
- [R22] J. RADON, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. math. Sem. Hamburg **1** (1922), 1–14.
- [W84] J. A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, 5th edn., Publish of Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1984.
- [Y05] T. YOSHINO, *Criterion of proper discontinuity in a Cartan motion group*, submitted to Int. J. of Math.