数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 1-8

テータ関数の特殊値にあらわれる素因子について

電気通信大学電気通信学部　金山直樹 (Naoki Kanayama)
Department of Information and Communication Engineering,
The University of Electro-Communications
kanayama@ice.uec.ac.jp

早稲田大学理工学部　小松啓一 (Keiichi Komatsu)
Department of Mathematical Science,
School of Science and Engineering,
Waseda University
kkomatsu@mse.waseda.ac.jp

日本大学生産工学部　福田隆 (Takashi Fukuda)
Department of Mathematics,
College of Industrial Technology,
Nihon University
fukuda@math.cit.nihon-u.ac.jp

1. 動機と背景

岩澤理論において重要な役割を果たす円単数と楕円単数は，有理数体 $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大において指数関数の，或いは虚二次体のアーベル拡大において楕円関数の特殊値として構成される．近年，これら以外の単数として，4 次の CM 体のアーベル拡大において 2 変数テータ関数の特殊値としてある種の単数を構成する試みがなされている (cf. [1],[3],[4],[5],[6],[9]).

例えば円単数を構成する典型的な手順は次のようになる．正整数 n に対し $\zeta_n = \exp(2\pi\sqrt{-1}/2^n)$ とおくと，$\frac{\zeta_n-\zeta_n^{-1}}{\zeta_{n+1}-\zeta_{n+1}^{-1}} = 2\cos\frac{2\pi}{2^{n+1}}$. 三角関数の倍角の公式より $2\cos\frac{2\pi}{2^{n+1}}$ は代数的整数であり，$\zeta_2-\zeta_2^{-1} = 2\sqrt{-1}$ であるから，$\mathbb{Q}(\zeta_n)$ において $\zeta_n-\zeta_n^{-1}$ の素因子は 2 の上にある．従って奇数 ℓ に対し $\frac{\zeta_n^{\ell}-\zeta_n^{-\ell}}{\zeta_n-\zeta_n^{-1}}$ は単数になる．これがいわゆる円単数である．

本講演では $\mathbb{Q}$ の 4 次巡回拡大体 $k=\mathbb{Q}(\exp(2\pi\sqrt{-1}/5))$ 上のアーベル拡大を考える．k の mod 2^n の ray class field $k(\mathrm{mod}\ 2^n)$ において，2 変数テータ関数の特殊値として代数的整数 α_n を構成し，α_n の素因子の振舞を調べる．ここからある種の性質をもつ新しい単数を構成することが我々の夢である．この夢に興味をもち我々を励まして下さった J. Coates 先生に感謝いたします.

記号. 通常通り $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で有理整数環，有理数体，実数体，複素数体を表す．$\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ 等は n 次元列ベクトルの全体とする．単位元をもつ可換環 Y に対し，$Y^\times$ は可逆元全体を表す．行列 α の転置は ${}^t\alpha$ とかく．$\langle g_1, g_2, \cdots, g_r\rangle$ は群 G の元 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ が生成する部分群を表す．体の拡大 K/F において $(K:F)$ で拡大次数を表し，K/F がガロア拡大であれば $G(K/F)$ でガロア群を表す．また代数体 F に対し O_F で F の整数環を表す．最後に $\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ を固定し，$k=\mathbb{Q}(\zeta)$ とおく．k の mod 2^n の ray class field を $k(\mathrm{mod}\ 2^n)$ で表す．

2. 定理

2次の複素対称行列で虚数部分が正定値であるもの全体を $\mathfrak{H}_2$ で表す．$u \in \mathbb{C}^2, \tau \in \mathfrak{H}_2$, $r \in \mathbb{R}^2$, $s \in \mathbb{R}^2$ に対し，通常通り

$$\Theta(u,\tau:r,s) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} e\Big(\frac{1}{2}{}^t(x+r)\tau(x+r) + {}^t(x+r)(u+s)\Big)$$

でテータ関数を定義する．$e(\xi) = e^{2\pi\sqrt{-1}\xi}$ である．更に

$$\Phi(\tau;r,s) := \frac{2\Theta(0,\tau:r,s)}{\Theta(0,\tau:0,0)}$$

とおく．

さて $\mathbb{C}$ 上定義された曲線 $C : y^2 = x^5-1$ の第一種微分の基底として $\mu_1 = \dfrac{dx}{2y}$, $\mu_2 = \dfrac{x}{2y}dx$ をとり，$H_1(C,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{A_1,A_2,B_1,B_2\}$ で交叉数が $A_1\cdot A_2 = B_1\cdot B_2 = 0$, $A_i\cdot B_j = \delta_{ij}$ をみたすものを選ぶ．この時，周期行列 ω, ω' および τ_0 が

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}, \quad \omega' = \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}, \quad \tau_0 = \omega^{-1}\omega' \tag{1}$$

$$\omega_{ij} = \int_{A_j}\mu_i, \quad \omega'_{ij} = \int_{B_j}\mu_i \quad (i,j=1,2)$$

で定義される．簡単な計算により $\det\omega \neq 0$, $\tau_0 \in \mathfrak{H}_2$ となる．次に C の第二種微分 $\nu_1 = \dfrac{3x^3}{2y}dx$, $\nu_2 = \dfrac{x^2}{2y}dx$ を用いて準周期 $\eta_{ij} = \displaystyle\int_{A_j}\nu_i \quad (i,j=1,2)$ を定め $\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}$ とおく．

この時2変数 σ-関数 $\sigma(u)$ が

$$\sigma(u) = e^{-\frac{1}{2}{}^t u\eta\omega^{-1}u}\Theta(\omega^{-1}u, \tau_0 : \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}) \quad (u \in \mathbb{C}^2)$$

で定義される (cf. [8])．$\sigma(u)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の解析関数である．

$-\dfrac{\partial}{\partial u_i}\dfrac{\partial}{\partial u_j}\cdots\dfrac{\partial}{\partial u_k}\log\sigma(u)$ を $\wp_{ij\cdots k}(u)$ で表す．$2\begin{pmatrix}r_1\\s_1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$, $\begin{pmatrix}r_1\\s_1\end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^4$, ${}^t(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} + r_1)(\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}+s_1) \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$ をみたす $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}^2$ を選び，$r_n, s_n \in \mathbb{Q}^2$ を $\begin{pmatrix}r_n\\s_n\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}r_{n-1}\\s_{n-1}\end{pmatrix}$ $(n \geq 2)$ で帰納的に定義する．r_n, s_n は $2^n\begin{pmatrix}r_n\\s_n\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$, $2^{n-1}\begin{pmatrix}r_n\\s_n\end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^4$ $(n \geq 1)$ をみたしている．この r_n, s_n を用いて

$$\alpha_n = \Phi(\tau_0; \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} + r_n, \begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix} + s_n)^{2^{n+1}}, \quad u_n = \omega' r_n + \omega s_n \tag{2}$$

で α_n と u_n を定義する．α_n は $k(\mathrm{mod}\, 2^n)$ に含まれる代数的整数である (cf. [10])．

我々が得た結果は次の定理にまとめられる．

定理 2.1. $k(\mathrm{mod}\, 2^n) = k(\wp_{11}(u_n), \wp_{12}(u_n), \wp_{22}(u_n)) \quad (n \geq 1)$.

定理 2.2. $\mathfrak{p}_n$ を $\wp_{11}(u_n)$, $\wp_{12}(u_n)$, $\wp_{22}(u_n)$ のいずれかの分母を割る $k(\bmod 2^n)$ の素イデアルとする．$\mathfrak{p}_n$ が *10* と素であれば $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_n\cap k$ は $k(\bmod 2^n)/k$ で完全分解する．

定理 2.3. $\mathfrak{p}_n$ を $k(\bmod 2^n)$ の素イデアルで α_n を割るが α_{n-1} を割らないものとする．$\mathfrak{p}_n$ が *10* と素であれば $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_n\cap k$ は $k(\bmod 2^n)/k$ で完全分解する．

3. 定理 2.1 の証明

証明の概略を説明しよう．C, ω, ω' を §2 の通りとし，J を C のヤコビ多様体とする．ω と ω' の列ベクトルで生成される $\mathbb{C}^2$ の格子を L とすると

$$C^{(2)} \ni (P_1, P_2) \mapsto \int_\infty^{P_1} + \int_\infty^{P_2} (\mu_1, \mu_2) \text{ modulo } L$$

により J は $\mathbb{C}^2/L$ と同一視できる．$\wp(u)=\wp_{11}(u)\wp_{22}(u)-\wp_{12}(u)^2$ とおく．すると

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^2 \ni u \mapsto\ & (\sigma^3(u), \sigma^3(u)\wp_{11}(u), \sigma^3(u)\wp_{12}(u), \sigma^3(u)\wp_{22}(u), \sigma^3(u)\wp_{111}(u),\\ & \sigma^3(u)\wp_{112}(u), \sigma^3(u)\wp_{122}(u), \sigma^3(u)\wp_{222}(u), \sigma^3(u)\wp(u))\end{aligned} \tag{3}$$

により，J は $\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$ に埋め込まれる (cf. [11, p.105])．$G(k/\mathbb{Q})$ の生成元 g を $\zeta^g=\zeta^2$ で定める．J はタイプ $(k;1,g)$ のアーベル多様体であり，$(k;1,g)$ の reflex はタイプ $(k;1,g^3)$ である．我々は $\sigma(u)\neq 0$ の場合を扱うので，次の関係式が成り立つ (cf. [8, Theorems 2.5 and 2.11]) .

$$\wp_{111}(u)^2 = 4\wp_{11}(u)^3 - 4\wp_{12}(u)^2 + 16\wp_{11}(u)\wp_{22}(u), \tag{4}$$
$$\wp_{112}(u)^2 = 4\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^2 - 4\wp_{22}(u)^2, \tag{5}$$
$$\wp_{122}(u)^2 = -4 - 4\wp_{11}(u)\wp_{12}(u) + 4\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u), \tag{6}$$
$$\wp_{222}(u)^2 = 4\wp_{11}(u) + 4\wp_{12}(u)\wp_{22}(u) + 4\wp_{22}(u)^3, \tag{7}$$

$$\wp_{122}(u)\wp_{222}(u) = -2\wp(u) + 4\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^2, \tag{8}$$
$$\wp_{112}(u) = \wp_{222}(u)\wp_{12}(u) - \wp_{122}(u)\wp_{22}(u), \tag{9}$$
$$\wp_{111}(u) = 2\wp_{22}(u)\wp_{112}(u) - \wp_{12}(u)\wp_{122}(u) - \wp_{11}(u)\wp_{222}(u), \tag{10}$$

$$\wp_{111}(u)\wp_{222}(u) = \wp_{112}(u)\wp_{122}(u) + 4\wp(u)\wp_{12}(u) - 4\wp_{11}(u)^2 + 4\wp_{22}(u), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\{\wp_{22}(u)^2 + 4\wp_{12}(u)\}\wp_{11}(u)^2 + \{4 - 2\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)\}\wp_{11}(u)\\ &+ 4\wp_{22}(u)^3 + \wp_{12}(u)^4 + 4\wp_{12}(u)\wp_{22}(u) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

また ι を 偏極アーベル多様体 $J=\mathbb{C}^2/L$ の自己同型とすれば

$$\wp_{\mu\nu}(u^\iota)^5 = \wp_{\mu\nu}(u)^5, \quad \wp_{\lambda\mu\nu}(u^\iota)^{10} = \wp_{\lambda\mu\nu}(u)^{10} \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2). \tag{13}$$

$J_{2^n}=\{\, x\in J \mid 2^n x = 0 \,\}$ とおく．[14, Proposition 20 in 7.5] 及び (8),(9),(10) より

$$k(J_{2^n}) = k(\wp_{11}(u_n), \wp_{12}(u_n), \wp_{22}(u_n), \wp_{222}(u_n)) \tag{14}$$

であり，[14, Theorem 2 in 16.3] と (13) に注意すれば

$$k(J_{2^n}) \supset k(\bmod 2^n) \supset k(\wp_{11}(u_n)^5, \wp_{12}(u_n)^5, \wp_{22}(u_n)^5, \wp_{222}(u_n)^{10}) \tag{15}$$

を得る．次の命題が定理 2.1 の証明の要となる．

命題 3.1. $k(\bmod 4)=k(\wp_{11}(u_2),\wp_{12}(u_2),\wp_{22}(u_2))$ であり，$k(J_4)$ は 2 と 5 の外で不分岐な $k(\bmod 4)$ の 2 次拡大である．更に k の素イデアル $(1-\zeta)$ の $k(J_4)$ における分岐指数は 2 である．

Proof. k の類数は 1 であることに注意する．$\wp_{ij}$ の 2 倍角の公式は次のようになる (cf. [2]):

$$\wp_{11}(2u)=\frac{H_{11}(u)}{4\delta(u)},\ \wp_{12}(2u)=\frac{H_{12}(u)}{4\delta(u)},\ \wp_{22}(2u)=\frac{H_{22}(u)}{4\delta(u)}, \tag{16}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= -16\wp_{12}(u)^2-8\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^3-4\wp_{12}(u)\wp_{11}(u)^2\wp_{22}(u)\\
&\quad -24\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^2-2\wp_{12}(u)^4\wp_{22}(u)+4\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)^2\wp_{11}(u)\\
&\quad -12\wp_{22}(u)^4+4\wp_{11}(u)^3+24\wp_{11}(u)\wp_{22}(u)-2\wp_{11}(u)^2\wp_{22}(u)^3, \qquad (17)\\
H_{11}(u) &= 48\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^4\wp_{22}(u)-16\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^2\\
&\quad -20\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)^2\wp_{11}(u)^2+32\wp_{12}(u)\wp_{11}(u)^3\wp_{22}(u)+4\wp_{11}(u)^4\\
&\quad -48\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^2-128\wp_{12}(u)+64\wp_{22}(u)^2+16\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^5\\
&\quad -80\wp_{11}(u)^2\wp_{12}(u)^3+32\wp_{11}(u)\wp_{22}(u)^4+8\wp_{11}(u)^3\wp_{22}(u)^3\\
&\quad -112\wp_{12}(u)^3\wp_{22}(u)-64\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)^3+4\wp_{12}(u)^5\wp_{22}(u)^2\\
&\quad -8\wp_{12}(u)^3\wp_{22}(u)^3\wp_{11}(u)-20\wp_{12}(u)^6+4\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^4\wp_{11}(u)^2,\\
H_{12}(u) &= 192\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)+128\wp_{22}(u)+64\wp_{12}(u)^3+64\wp_{11}(u)^2\\
&\quad +28\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^4+32\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)^2-4\wp_{12}(u)^5\wp_{22}(u)\\
&\quad +128\wp_{12}(u)\wp_{11}(u)^3+80\wp_{11}(u)\wp_{22}(u)^3+28\wp_{11}(u)^3\wp_{22}(u)^2\\
&\quad -72\wp_{12}(u)^2\wp_{11}(u)^2\wp_{22}(u)+8\wp_{12}(u)^3\wp_{22}(u)^2\wp_{11}(u)\\
&\quad -4\wp_{12}(u)\wp_{11}(u)^2\wp_{22}(u)^3-16\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^4,\\
H_{22}(u) &= 64-32\wp_{11}(u)\wp_{22}(u)^2+80\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)+16\wp_{12}(u)^2\wp_{22}(u)\\
&\quad +36\wp_{12}(u)\wp_{11}(u)^2\wp_{22}(u)^2-72\wp_{22}(u)\wp_{11}(u)\wp_{12}(u)^3+176\wp_{12}(u)\wp_{22}(u)^3\\
&\quad +16\wp_{22}(u)\wp_{11}(u)^3+160\wp_{11}(u)^2\wp_{12}(u)^2+36\wp_{12}(u)^5.
\end{aligned}$$

$x_n=\wp_{11}(u_n)$, $y_n=\wp_{12}(u_n)$, $z_n=\wp_{22}(u_n)$ とおく．$\nu_1\not\equiv\nu_2 \pmod 5$ をみたす適当な $\nu_1,\nu_2\in\mathbb{Z}$ に対し $x_1=\zeta^{2(\nu_1+\nu_2)}(\zeta^{2\nu_1}+\zeta^{\nu_1+\nu_2}+\zeta^{2\nu_2})^2$, $y_1=-\zeta^{\nu_1+\nu_2}$, $z_1=\zeta^{\nu_1}+\zeta^{\nu_2}$ となることが知られているので (cf. [8, p.99], [12, 3.86])，(16) より x_2, y_2, z_2 に関する 3 つの関係式

$$\begin{aligned}
&4x_2^4+\{32y_2z_2+8z_2^3-16\zeta^{2(\nu_1+\nu_2)}(\zeta^{2\nu_1}+\zeta^{\nu_1+\nu_2}+\zeta^{2\nu_2})^2\}x_2^3\\
&+\{4y_2z_2^4-20y_2^2z_2^2-80y_2^3+\zeta^{2(\nu_1+\nu_2)}(16y_2z_2+8z_2^3)(\zeta^{2\nu_1}+\zeta^{\nu_1+\nu_2}+\zeta^{2\nu_2})^2\}x_2^2\\
&+\{48y_2^4z_2-8y_2^3z_2^3+32z_2^4-48y_2^2-16y_2z_2^2\\
&\quad+\zeta^{2(\nu_1+\nu_2)}(32y_2^3-16y_2^2z_2^2-96z_2)(\zeta^{2\nu_1}+\zeta^{\nu_1+\nu_2}+\zeta^{2\nu_2})^2\}x_2 \qquad (18)\\
&+\{64z_2^2-20y_2^6-112y_2^3z_2+16y_2z_2^5+4y_2^5z_2^2-64y_2^2z_2^3-128y_2\\
&\quad+\zeta^{2(\nu_1+\nu_2)}(8y_2^4z_2+48z_2^4+96y_2z_2^2+64y_2^2)(\zeta^{2\nu_1}+\zeta^{\nu_1+\nu_2}+\zeta^{2\nu_2})^2\}=0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\{128y_2+28z_2^2+16\zeta^{\nu_1+\nu_2}\}x_2^3+\{64-72y_2^2z_2-4y_2z_2^3-\zeta^{\nu_1+\nu_2}(8z_2^3+16y_2z_2)\}x_2^2\\
&+\{192y_2z_2+80z_2^3+28y_2^4+8y_2^3z_2^2+\zeta^{\nu_1+\nu_2}(16y_2^2z_2^2-32y_2^3+96z_2)\}x_2\\
&+\{128z_2+64y_2^3+32y_2^2z_2^2-4y_2^5z_2-16y_2z_2^4\\
&-\zeta^{\nu_1+\nu_2}(8y_2^4z_2+48z_2^4+96y_2z_2^2+64y_2^2)\}=0,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&16\{z_2-(\zeta^{\nu_1}+\zeta^{\nu_2})\}x_2^3+\{160y_2^2+36y_2z_2^2+(\zeta^{\nu_1}+\zeta^{\nu_2})(8z_2^3+16y_2z_2)\}x_2^2\\
&+\{(80y_2-32z_2^2-72y_2^3z_2+(\zeta^{\nu_1}+\zeta^{\nu_2}))(-96z_2+32y_2^3-16y_2^2z_2^2)\}x_2\\
&+176y_2z_2^3+36y_2^5+(\zeta^{\nu_1}+\zeta^{\nu_2})(64y_2^2+96y_2z_2^2+48z_2^4+8y_2^4z_2)=0,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

が得られ，更に (12) より

$$(z_2^2+4y_2)x_2^2+(4-2y_2^2z_2)x_2+y_2^4+4y_2z_2+4z_2^3=0 \tag{21}$$

を得る．

この 4 つの関係式から x_2, y_2, z_2 を根にもつ k 係数の多項式が得られるのであるが，それには今のところ計算機の助けが必要である．まず (18), (19), (20), (21) を x_2 の多項式とみて終結式を計算すると y_2, z_2 に関する 6 個の多項式が得られる．これらを y_2 の多項式とみて再び終結式を計算すると z_2 を根にもつ 15 個の多項式が得られる．この 15 個の多項式の最大公約数をとることにより，最終的に z_2 を根にもつ 4 次既約多項式が得られる．従って $k(z_2)$ は k 上の 4 次拡大となるが，J は O_k による虚数乗法をもつからアーベル拡大になる．同様に $k(x_2)$ と $k(y_2)$ も k の 4 次アーベル拡大であることがわかる．従って $(k(x_2,y_2,z_2):k)$ は 2 巾であり，(15) より $k(\mathrm{mod}\,4)\supset k(x_2,y_2,z_2)$. J/k は $(1-\zeta)$ において bad reduction をもつから $(1-\zeta)$ は $k(J_4)/k$ で分岐し (cf. [13])，$(k(J_4):k(x_2,y_2,z_2))=(k(J_4):k(\mathrm{mod}\,4))=2$ となる．よって (7), (14) より $k(\mathrm{mod}\,4)=k(x_2,y_2,z_2)$ を得る． □

これを使うと定理 2.1 は次のようにして証明される．

$k(J_{2^n})/k$ は 2 と $1-\zeta$ の外で不分岐なアーベル拡大であり，命題 3.1 と [13, Corollary 2 to Theorem 2] より 2 の分岐指数は 2 である．$(1-\zeta)$ の $k(J_{2^n})/k$ における惰性体は適当な m に対して $k(\mathrm{mod}\,2^m)$ に含まれるから，$(k(J_{2^n}):k)$ は 2 巾であり，(15) より

$$k(J_{2^n})=k(x_n,y_n,z_n,\wp_{222}(u_n))\supset k(\mathrm{mod}\,2^n)\supset k(x_n,y_n,z_n)$$

を得る．$(k(J_{2^n}):k(x_n,y_n,z_n))=(k(J_{2^n}):k(\mathrm{mod}\,2^n))=2$ だから $k(\mathrm{mod}\,2^n)=k(x_n,y_n,z_n)$ である．

4. ノルム計算

定理 2.1 より定理 2.2 が得られ，定理 2.2 より定理 2.3 が得られるのであるが，証明はやや繁雑であるので投稿中の論文を見て頂きたい．ここでは定理 2.3 の実例を紹介する．

$k_n=k(\mathrm{mod}\,2^n)$, $a_n=N_{k_n/\mathbb{Q}}(\alpha_n)$ とおく．α_n は代数的整数だから a_n は有理整数である．従って α_n の共役を適当な精度で近似計算し a_n の近似値を求めれば a_n の正確な値がわかる．α_n の k 上の共役は志村の相互律よりわかるので

$$\beta_n \;=\; N_{k_n/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\alpha_n)=\left|N_{k_n/k}(\alpha_n)\right|^2$$

は任意の精度で計算できる．従って α_n^g がわかれば

$$\beta_n' \;=\; N_{k_n/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\alpha_n^g)=\left|N_{k_n/k}(\alpha_n^g)\right|^2 \tag{22}$$

を求め，$N_{k_n/\mathbb{Q}}(\alpha_n) = \beta_n\beta'_n$ とすればよいのだが，α_n^g を記述する理論は今のところ知られていない．しかし適当な r'_n, $s'_n \in \dfrac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2$ および適当な 1 の根 ρ に対し

$$\alpha_n^g = \Phi(\tau_0; r'_n, s'_n)^{2^{n+1}}\rho$$

となることは分かっているので，(22) を r'_n, s'_n の全ての組合せについて計算し，$\beta_n\beta'_n$ が有理整数に近くなればそれが a_n の候補である．ただ大抵の場合候補が複数個現れ a_n を特定することはできない．そこで $\beta_n\beta'_n$, $\beta_n+\beta'_n$ が共に有理整数に近くなるものを捜す．これまでこの種の計算を多数行ってきたが (cf. [5], [6])，こうすればいずれの場合も候補は唯一つになり a_n を決定することができた．

$[k_n : \mathbb{Q}] = 2^{3n-2}$ $(n \geq 2)$ であるから a_n $(n \leq 4)$ の計算に困難はない．しかし a_5 については調べるべき α_5^g の可能性が多くまともにやると時間がかかりすぎる．そこで異なる r_1, s_1 に対する α_5 の近似値が十分な精度で (e.g. 100 桁) 一致すれば厳密に一致すると仮定して計算量を減らす必要があった．この仮定は $n \leq 4$ に対しては正しいことが示されるので，$n = 5$ の時も成り立っていると期待される．

a_n に現れる素因子の分布を紹介しよう．まず $n = 2$ の時は §2 の条件をみたす全ての r_1, s_1 に対し $a_2 = 2^{64}$ であった．a_3 に現れる素因子は 2, 3, 79 である．a_4 および a_5 に現れる 2 以外の素因子を Tabl1 1 と Table2 に示す．定理 2.3 より，これらの素数の上にある k の素イデアルは k_n で完全分解する．

Table 1 (prime factors of a_4).

7
21121
126241
386161
2991601
5219441
390913841
60320799521
1749844518161
2464148712401
5306758949603201
1279
41999
43759
123439
877056959
1138982479

Table 2 (prime factors of a_5).

17
623521
740321
1151041
54907201
113143361
251836001
909562561
48792778241
89994785921
123846617281
14766796062401
23031607327361
62073018171841
322585859178241
6791030931265121
9859582823887681
121373765890906241
138627540798725592001
283761829258666183269121
2540005964089001540756161
91530804946026496995825812641
34010717505788353176619395918721
159967450523239651118920199974563841
226332093148238679542531297577493944161
11096770490899820584455226359098963680321
491021040929460827687340304464458427410081
527392096986943199090412791647682059104961
9467777018449513282924707744087161727673601
240903064525509586990847532596007152559640001
1433224830243555409995625957280123147344991590893121
19801664049302835002764517018396747778812054402307155829931256321
346482681832373212756519017301088884276735689590878458528197518561
16745852002558870716307382286575318925719555800003615178412926257259979381842081
4961410365937195945947140586692803321248711791724624053815710147916474922080640911728161
479
1279
1439
1759
2879
14879
20479
68639
228479
445279
667519
2148799
19241759
51993919
228341759
7077655999
7268615839
7600748479
23741954399
72291619679
516416122399
11467647903199
273437674199999
497029018909279
1051222651001119
10413022738533119
61026256298013119
403632787146929759
3380620162585394879
13775192616423112639
14428962239662865119
27706644929144359039
67453235113973356799
12584260421081427300799
1272938639517795156244319
238285982944048968708514079
97762933592263776709602885919
6334680931948162592186346501119
14888493569139692000830316397119
127660090241397857544761178972319
10120485015517651131633015981709759
21413727328714059751990021891023946879
78932288900401264679952013738040739839
171574893636298404892944602635863651199
18534916229856415275987731322203883502399
2642667595952650646304560618250186174934079
215362156102916958987579683941202942263669919
25797125216540562231107134572377081178565513919
193774662370233367956769107865367393911150330079
10621929115212417131759925439396041353314137820624799
1367629285695606691366258039094560851523092872708561759
20243686916096862931241809499071152058586161656134364830218079
13915232198425499511307755350067692016003898555007500590023407199
19184137436452605378050740755609461516715982341852015913719929034268026699261896341683405729313439

References

[1] J. Arledge, S-units attached to genus 3 hyperelliptic curves, J. Number Theory, **63**(1997), 12–29.

[2] H. F. Baker, An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions, Cambridge University Press, 1907.

[3] J. Boxall and E.Bavencoffe, Quelques proprietés arithmetiques des points de 3-division de la jacobienne de $y^2 = x^5 - 1$, Sém. Théor. Bordeaux 4-1(1992), 113–128.

[4] E. De Shalit and E. Z. Goren, On special values of theta functions of genus two, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) **49**(1997), 775–799.

[5] T. Fukuda and K. Komatsu, On a unit group generated by special values of Siegel modular functions, Math. Comp 69-231(2000), 1207–1212

[6] T. Fukuda and K. Komatsu, On Minkowski units constructed by special values of Siegel modular functions, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **15**(2003), 133–140

[7] D. Grant, A Generalization of Jacobi's Derivative Formula to Dimension Two, J. Reine. Angew. Math. **392**(1988), 125–136.

[8] D. Grant, Formal Groups in Genus 2, J. Reine. Angew. Math. **411**(1990), 96–121.

[9] D. Grant, Units from 3-and-4 torsion on Jacobians of curves of genus 2, Compositio Math. **94**(1994),pp.311–320.

[10] K. Komatsu, Construction of a normal basis by special values of Siegel modular functions, Proc. of Amer. Math. Soc., **128**(2000), 315–323.

[11] S. Lang, Introduction to Algebraic and Abelian Functions(2nd ed.), Grad.Texts in Math 89, New York 1982.

[12] D. Mumford, Tata lectures on Theta II, Progress in Mathematics, 43 (Birkhäuser Verlag, 1983).

[13] J. P. Serre and J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. **88**(1968), 492–517.

[14] G. Shimura, Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions, Princeton University Press, 1998.

[15] G. Shimura and Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory, Publ. Math. Soc. Japan, No.6 (1961).