数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 145-154

Ekedahl-Oort Strata Contained in the Supersingular Locus

Shushi Harashita
原下秀士
東京大学数理科学研究科 COE 特任研究員

要約
正標数の体上の主偏極アーベル多様体のモジュライ空間に Ekedahl-Oort stratification と呼ばれる階層構造が定義された．本説では超特異軌道に含まれてしまうそれぞれの Ekedahl-Oort stratum の可約性およびその既約成分の個数がある四元ユニタリー群のある類数に等しいことの証明の概説をする．

1 導入

素数 p をひとつ選び以後それを固定する．$\mathcal{A}_g$ を標数 p の体上の主偏極アーベル多様体のモジュライ空間 $\mathcal{A}_{g,1,1}\otimes\mathbb{F}_p$ とする．$\mathcal{A}_g$ には Newton polygon stratification と呼ばれる階層構造がはいる．それはアーベル多様体に付随する p-divisible group の同種類によって定義される．その同種類は Newton polygon によって分類される (cf. [9], [1])．最近 Oort やその共著者によってこの階層構造の研究で大きな成果が得られてきている．特にその階層のひとつである超特異軌道 (supersingular locus) W_σ については K.-Z. Li と Oort によって詳しく調べられた [8]．アーベル多様体 X が超特異であるとはその付随する p-divisible group $X[p^\infty]$ の Newton polygon が constant slope 1/2 であることであるが, Deligne-Ogus の定理 [12] によりこれはアーベル多様体間の同種

$$E^g \longrightarrow X$$

が存在することが同値である．ここで E はある超特異楕円曲線である．ひとつ E を選び以後それを固定する．また E^g と同型なアーベル多様体は超特別 (superspecial) と呼ばれる．

W_σ に限らず一般に Oort は以下を示した．各 Newton polygon stratum は equi-dimensional で, その次元も決定できる．さらに W_σ 以外の Newton polygon stratum は既約である [15]．既約性に関する部分は長年予想 (Oort) であったのだが, これが解決されたというのは最近の最も大きなニュースの一つであった．

今回の主な研究対象は Oort と Ekedahl によって定義された別の新しい $\mathcal{A}_g$ 内の階層構造 Ekedahl-Oort stratification である [14]．これは アーベル多様体 X の p-kernel $X[p]$ の群スキームとしての同型類によって定義される．p-divisible group の同種類が Newton polygon という組み合わせ論的なデータで分類されたように, この p-kernel の同型類もある組み合わせ論的なもので分類したい．これは Oort によって以下のようになされた．

k を標数 p の代数的閉体とする．(X,λ) を k 上の主偏極アーベル多様体とする．$X[p]$ をその p-kernel そして $\lambda[p]$ を主偏極 λ から誘導された群スキームの同型

$$\lambda[p]:\quad X[p] \xrightarrow{\sim} X^t[p] \xrightarrow{\sim} X[p]^D$$

とする．二番目の同型は Cartier duality theorem [11] から得られる自然なものである．このとき, ペア $(X[p],\lambda[p])$ は以下で定義する「偏極付レベル 1 の Barsoti-Tate 群」(pol. BT_1) のひとつになっている．

定義 1.1. 偏極付レベル 1 の Barsoti-Tate 群とはペア (G,ι) であって G は k 上の有限群スキームで

$$\begin{cases} FG = \ker V : G^{(p)} \to G \\ VG^{(p)} = \ker F : G \to G^{(p)} \end{cases}$$

を満たすもの. ι は G 上の偏極と呼ばれそれは群スキームの同型 $G \simeq G^D$ である.

定義 1.2. 写像

$$\varphi : \quad \{0,1,\cdots,g\} \longrightarrow \{0,1,\cdots,g\}$$

は

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(i-1) \le \varphi(i) \le \varphi(i-1)+1 \quad (i=1,2,\cdots,g) \end{cases}$$

を満たすとき長さ g の elementary sequence という.

Oort は以下を証明した.

定理 1.3. 次のような自然な全単射が存在する.

$$ES: \quad \{k \text{ 上の } pol.\ BT_1 \ of\ rank\ p^{2g}\}/isom \xrightarrow{\ \sim\ } \{elementary\ sequence\ \varphi\ of\ length\ g\}$$

この写像は以下の非自明な事実をもとに定義される. (G,ι) を pol. BT_1 とする. この時 filtration

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_g \subset \cdots \subset G_{2g}$$

で V と F^{-1} の作用で安定なものが (唯一つとは限らないが) 存在しさらに elementary sequence φ で

$$\begin{cases} VG_i = G_{\varphi(i)} & (i=1,2,\cdots,g) \\ VG_{2g-i} = G_{g+\varphi(i)-i} & (i=1,2,\cdots,g) \end{cases}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ここで G の任意の部分群スキーム H に対して $F^{-1}H$ は $F^{-1}(H^{(p)} \cap FG)$ で定義され, また VH も正確には $VH^{(p)}$ のことである. 上の定理の最も難しい部分はこの写像の単射性であるが Oort によってちゃんと証明されている.

主偏極アーベル多様体 (X,λ) に対し付随する elementary sequence $ES(X[p],\lambda[p])$ を $ES(X)$ と略記することにする. Ekedahl-Oort strata は以下のように定義される. 先ず集合としては

$$S_\varphi := \{(X,\lambda) \in \mathcal{A}_g \mid ES(X) = \varphi\}$$

であり, さらに Oort は S_φ は自然な $\mathcal{A}_g$ の局所閉部分スキームの構造を持つことを示した.

以下 Oort による Ekedahl-Oort stratification の基本定理を紹介する.

定理 1.4. *(1)* S_φ は *quasi-affine* で, その *Zariski* 閉包 $\overline{S}_\varphi$ は $\varphi(g)=0$ でない限り連結である.

(2) S_φ は *equi-dimensional* でその次元は $\sum_{i=1}^{g}\varphi(i)$ に等しい.

(3) $\overline{S}_\varphi = \coprod_{S_{\varphi'} \cap \overline{S}_\varphi \neq \emptyset} S_{\varphi'}$ が成り立つ.

(3) はこの $\mathcal{A}_g$ の S_φ たちへの分割が "stratification" と呼んでもよいと言うことをいっている. 長さ g の elementary sequences 全体の集合には 2 つの順序付けがある. φ と φ' を 2 つの elementary series とする. ひとつは $\varphi' \prec \varphi$ と書きこれは $\varphi'(i) \leq \varphi(i)$ $(\forall i = 1, \cdots, g)$ を意味する. もう一つは $\varphi' \leq \varphi$ と書きこれは $S_{\varphi'} \cap \overline{S}_\varphi \neq \emptyset$ を意味し, (3) によってこれは順序になる. この 2 つの順序付けは一般には一致しない. ただ $\varphi' \prec \varphi$ は $\varphi' \leq \varphi$ を導く.

Ekedahl-Oort strata の既約性に関し Oort は以下のような予想をたてていた [16].

Conjecture.

(1) $S_\varphi \subset W_\sigma$ でない限り S_φ は既約である.

(2) $S_\varphi \subset W_\sigma$ の時は十分大きな p に対して S_φ は可約である.

ところがごく最近 Ekedahl と van der Geer が以下を示した [3].

定理 1.5. $\varphi([(g+1)/2]) \neq 0$ ならば S_φ は既約である.

この定理は Oort の予想 (1) を導く. なぜなら Oort が

命題 1.6. $S_\varphi \subset W_\sigma$ であるための必要十分条件は $\varphi([(g+1)/2]) = 0$ であることである.

を示していたからである. 驚くべきことに Ekedahl と van der Geer はこの命題を使っていない. S_φ が既約になる一つの十分条件として $\varphi([(g+1)/2]) \neq 0$ を見つけたようである.

この論説では以下を解説する.

定理 1.7. $\varphi([(g+1)/2]) = 0$ の時 *EO-stratum* S_φ は十分大きな p に対して可約である.

従って, 上の Oort の予想の (2) も解決された.

2 超特異軌道 W_σ.

次の命題 [4] と定義がこの研究の基礎となる.

命題 2.1. 任意の $W(k)$ 上の主準偏極超特異デュドネ加群 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ に対し, ある M のシンプレクティック基底 $X_1, \cdots, X_g, Y_1, \cdots, Y_g$ $(\langle X_i, Y_j\rangle = \delta_{ij}$, 他は $0)$ でそれに付随する *display* が以下のようにかけるものが存在する：

$$\begin{pmatrix} T & -\varepsilon^{-1}w \\ \varepsilon w & 0 \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$(FX_1, \cdots, FX_g, FY_1, \cdots, FY_g) = (X_1, \cdots, X_g, Y_1, \cdots, Y_g) \begin{pmatrix} T & -p\varepsilon^{-1}w \\ \varepsilon w & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $T = (t_{ij})$ は真下三角 $g \times g$-行列で対称性 ${}^t(Tw) = Tw$ を持つものである. w は $(\delta_{i,g+1-j})$ で ε は $\varepsilon = -\varepsilon^\sigma \in W(\mathbb{F}_{p^2})^\times$ を満たすものを一つ取っておいた.

これは K.-Z. Li と Oort の超特異軌道の研究（LNM 1680）をさらに明示的に書くことによって得られる. 従って次のような定義をするのが自然である.

定義 2.2. K を $\mathbb{F}_{p^2}$ を含む任意の完全体とする.

(1) 真下三角 $T=(t_{ij})\in M_g(W(K))$ で対称性 ${}^t(Tw)=Tw$ を持つものに対して T に付随した準偏極デュドネ加群, M_T とは $X_1,\cdots,X_g,Y_1,\cdots,Y_g$ で生成される自由 $W(K)$-加群で以下で定義される F と V の作用を持つものである

$$\begin{cases}(F-V)X_i=\displaystyle\sum_{j=i+1}^{g}t_{ji}X_j\\ Y_i=\varepsilon^{-1}VX_{g+1-i}\end{cases}\tag{1}$$

また M_T 上の準偏極は $\langle X_i,Y_j\rangle=\delta_{ij}$, 他は 0 で定義される.

(2) M を $W(K)$ 上の主準偏極超特異デュドネ加群とする. M の $W(K)$ 上の marking とは $W(k)$ 上の準偏極超特異デュドネ加群としての同型 $M\simeq M_T$ のことである. T は上と同様のものである.

3 S_φ の可約性について.

以後 elementary sequence φ は $\varphi([(g+1)/2])=0$ を満たすもののみを扱う. S_φ の可約性を示すために新しいモジュライ問題を導入し S_φ との関係を調べる. そのために幾つかの補助的なデータが必要である. 任意の $[g/2]$ 以下の非負整数 c に対し集合

$$\Lambda_c:=\{\text{pol. }\mu\text{ on }E^g\mid\ker\mu\simeq\alpha_p^{2c}\}/\operatorname{Aut}(E^g)$$

を定める. Λ_c は簡約理論によって有限集合になる. さらに今の場合

$$\Lambda_c\xrightarrow{\sim}G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/U_c$$

という全単射が得られる (cf. [6]). ここで G は $\mathbb{Q}$ 上の四元ユニタリー群

$$G=\{h\in GL_g(B)|{}^t\overline{h}h=\nu(h)1_g,\nu(h)\in\mathbb{Q}\}$$

で, B は $\mathbb{Q}$ 上の p と ∞ だけで分岐する四元代数 $\operatorname{End}(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ である. U_c はコンパクト部分群の積 $\prod_l U_l$ で

$$\delta_l^{-1}U_l\delta_l:=\{h\in GL_g(\mathcal{O}_{B,l})\mid{}^t\overline{h}f_lh=\nu(h)f_l\}$$

で定義される. ここで $l\neq p$ に対しては $f_l=1,\delta_l=1_g$ そして $l=p$ に対しては

$$f_p:=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{g-2c},\underbrace{\begin{pmatrix}0&F\\-F&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&F\\-F&0\end{pmatrix}}_{c})\tag{2}$$

で δ_p は ${}^t\overline{\delta}_p\delta_p=f_p$ を満たす $GL_g(\mathcal{O}_{B,p})$ の元である.

定義 3.1. 各 $\mu\in\Lambda_c$ に対して $\mathcal{T}_\mu$ を同種

$$\rho:\quad(E^g,\mu)\longrightarrow(Y,\lambda)$$

で

(i) $\mu = \rho^*\lambda$,

(ii) λ は Y 上の主偏極

をみたすもののモジュライ空間とする.（正確にはこのような同種のモジュライ問題がこの $\mathcal{T}_\mu$ で represent されることが証明できる.）

先ず, $\mathcal{T}_\mu$ の構造を調べる. $\mathcal{T}_\mu$ はある有限枚のアファイン開集合で覆われ：

$$\mathcal{T}_\mu = \bigcup_{\Theta} U^\Theta$$

次のような finite étale 射

$$U^\Theta \longrightarrow N_{g,c}$$

が存在する. ここで $N_{g,c}$ は所謂 Hasse-Witt 行列からなる集合で, 任意の $\mathbb{F}_{p^2}$-代数 R に対して

$$N_{g,c}(R) := \left\{\mathfrak{H} = (\mathfrak{h}_{ij}) \in M_g(R) \;\middle|\; \mathfrak{H}w = {}^t(\mathfrak{H}w),\ \mathfrak{h}_{ij} = 0\ (i \leq g-c \text{ or } j > c)\right\}$$

で定義されるアファイン空間である. 主に以上の考察により次を得る.

命題 3.2. モジュライ空間 $\mathcal{T}_\mu$ は次元 $c(c+1)/2$ の非特異既約射影多様体である.

最初の主定理は以下の通り：

定理 3.3. 任意の $[g/2]$ 以下の非負整数 c に対し自然な射

$$\Psi_c : \coprod_{\mu \in \Lambda_c} \mathcal{T}_\mu \longrightarrow \coprod_{\varphi(g-c)=0} S_\varphi$$

が存在し, それは *quasi-finite* であり全射である.

射 Ψ_c は $(\rho : (E^g, \mu) \to (Y, \lambda))$ を (Y, λ) に送るものとして定義する. この定理から S_φ の可約性が証明出来ることを以下述べる. そのためには一つ命題が必要である.

命題 3.4. 主偏極アーベル多様体 (Y, λ) が 2 つの像 $\Psi_c(\mathcal{T}_\mu)$, $\Psi_c(\mathcal{T}_{\mu'})$ $(\mu \neq \mu')$ の点に対応するとする. このとき φ を (Y, λ) に対応する *elementary sequence* $ES(Y)$ とすると $\varphi(g-c+1) = 0$ が成立する.

この命題から, elementary sequence φ が $\varphi(g-c) = 0$, $\varphi(g-c+1) = 1$ を満たすならば S_φ は像 $\Psi_c(\mathcal{T}_\mu)$ $(\mu \in \Lambda_c)$ たちの交叉とは交わらない. また各 $\Psi_c(\mathcal{T}_\mu)$ は必ず S_φ の元を含むことも示せるため,

$$\sharp\{\text{irr. comp. of } S_\varphi\} \geq \sharp\Lambda_c \tag{3}$$

を得る. また一般的な不等式

$$\sharp\Lambda_c \geq 2\mathfrak{m}_{g,c} \tag{4}$$

を思い出す. ここで mass $\mathfrak{m}_{g,c}$ は

$$\sum_{h \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/U_c} \frac{1}{\sharp(hU_ch^{-1} \cap G(\mathbb{Q}))}$$

で定義され, 実はこれは

$$\sum_{\mu \in \Lambda_c} \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(E^g, \mu)}$$

に項別に等しい. このような mass は原理的には明示的に計算できる. 我々の場合は Prasad の公式 [17] を適用できるものに帰着したり, 橋本-伊吹山の公式 [5] +ある(幾何的)考察によって次のように計算される:

補題 3.5. $\mathfrak{m}_{g,c}$ は

$$\prod_{i=1}^{g} \frac{(2i-1)!\zeta(2i)}{(2\pi)^{2i}} \cdot \binom{g}{2c}_{p^2} \cdot \prod_{i=1}^{g-2c} (p^i + (-1)^i) \prod_{i=1}^{c} (p^{4i-2} - 1)$$

に等しい. ここで $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数, $\binom{g}{r}_q$ は q-二項係数

$$\binom{g}{r}_q := \frac{\prod_{i=1}^{g}(q^i - 1)}{\prod_{i=1}^{r}(q^i - 1)\prod_{i=1}^{g-r}(q^i - 1)} \quad \in \mathbb{Z}[q].$$

である.

これはある意味 Deuring の mass formula [2] の拡張になっている. 特に $\mathfrak{m}_{g,c}$ は p の多項式でしかも定数でない. したがって (3) と (4) より

$$\lim_{p\to\infty} \sharp\Lambda_c = \infty.$$

これは十分大きな素数 p に対して S_φ は可約を意味する.

4 証明の構成要素:部分多様体 $\coprod_{S_\varphi \subset W_\sigma} S_\varphi$ の考察.

先ず次元の勘定によって $g \geq 3$ の時 $\coprod_{S_\varphi \subset W_\sigma} S_\varphi$ は真に超特異軌道 W_σ に含まれていることを注意する. 今我々は W_σ を Ekedahl-Oort で分解しているのではなく W_σ よりさらに小さい部分多様体 $\coprod_{S_\varphi \subset W_\sigma} S_\varphi$ を調べている.

この部分多様体を調べる key step は $W(k)$ 上の主準偏極デュドネ加群 M に関する次の 6 つの条件が同値であることを示すところである.

(i) marking $M \simeq M_T$ で T がある $c \leq [g/2]$ に対して

$$T = \begin{pmatrix} & 0 & & 0 \\ & & & \\ t_{g-c+1,1} & \cdots & t_{g-c+1,c} & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ t_{g,1} & \cdots & t_{g,c} & \end{pmatrix}$$

という形をしているものが存在する.

(ii) marking $M \simeq M_T$ で T がすべての $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$TT^{\sigma^i} = 0$$

を満たすものが存在する.

(iii) すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $F^{2n+1}M \subset p^n M$ と $V^{2n+1}M \subset p^n M$ が成立する.

(iv) M は超特異で $S^0(M)/S_0(M)$ は k-ベクトル空間である. ここで $S^0(M)$ は M を含む最小の超特別デュドネ加群, $S_0(M)$ は M に含まれる最大の超特別デュドネ加群（これらの加群の存在および一意性は [7] で得られている）.

(v) M は $T_\mu \to W_\sigma$ の像のある点に付随したデュドネ加群である. ここで $\mu \in \Lambda_{c'}$ で c' は $[g/2]$ 以下の非負整数.

(vi) $\varphi := ES(M)$ とおくと $\varphi([(g+1)/2]) = 0$ を満たす.

また重要なステップとして $N := M/pM$ とおきある不変量

$$c(N) := \dim N/(V^{-1}F)^\infty N,$$

を導入すると

$$\varphi(g - c(N)) = 0 \text{ and } \varphi(g - c(N) + 1) = 1$$

が成立することが示される. この証明には, もしも $TT^{\sigma^i} = 0$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ なら $c(N) = g - \dim \ker \overline{T}^{\sigma} \cap \ker \overline{T}^{\sigma^3} \cap \ker \overline{T}^{\sigma^5} \cap \cdots \leq [g/2]$ と計算できることがきいている. この等式は 命題 3.4 の証明にも使われる. $TT^{\sigma^i} = 0$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ という条件が問題をすべて「線形」にしてくれるのである.

上の主定理は上の考察と以下で述べる重要な性質によって証明される. 任意の超特異デュドネ加群に対し $\gamma(M) := (1/2)\,\mathrm{length}_k\, S^0(M)/S_0(M)$ という不変量が考えられる. このとき

命題 4.1. M を主偏極超特異デュドネ加群とする. $\varphi := ES(M)$, $N := M/pM$ とおく. このとき $\varphi([(g+1)/2]) = 0$ ならば

$$\gamma(M) = c(N)$$

が成立する.

5 S_φ の既約成分の個数.

Hasse-Witt 行列の空間 $N_{g,c}$ や T に付随するデュドネ加群をさらに詳しく調べることによって以下の定理も得られる.

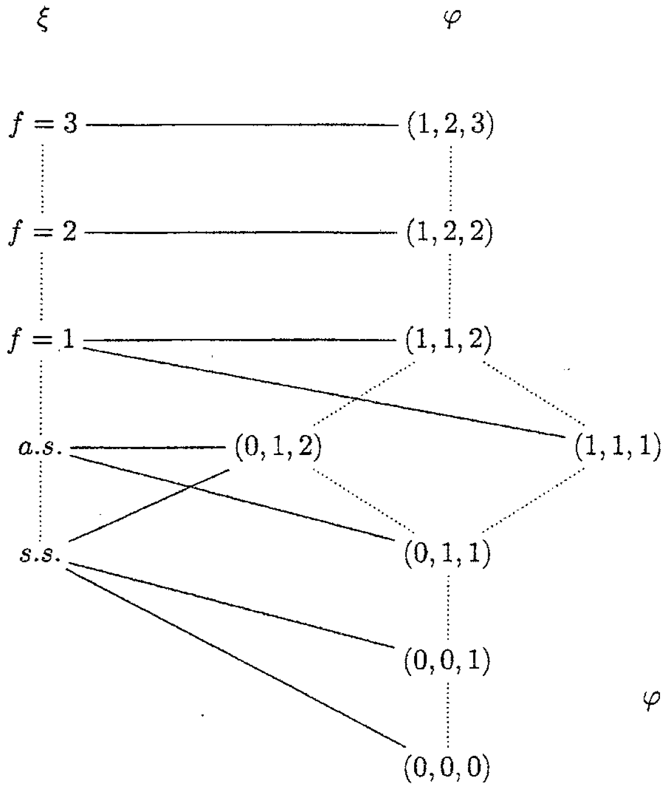
定理 5.1. 各 *Ekedahl-Oort starum* S_φ （$S_\varphi \subset W_\sigma$）*の既約成分の個数はある四元ユニタリー群のあるひとつの類数に等しい. $\varphi(g-c) = 0$, $\varphi(g-c+1) = 1$ とするとこの類数は p での種数が (2) のものに対応する.*

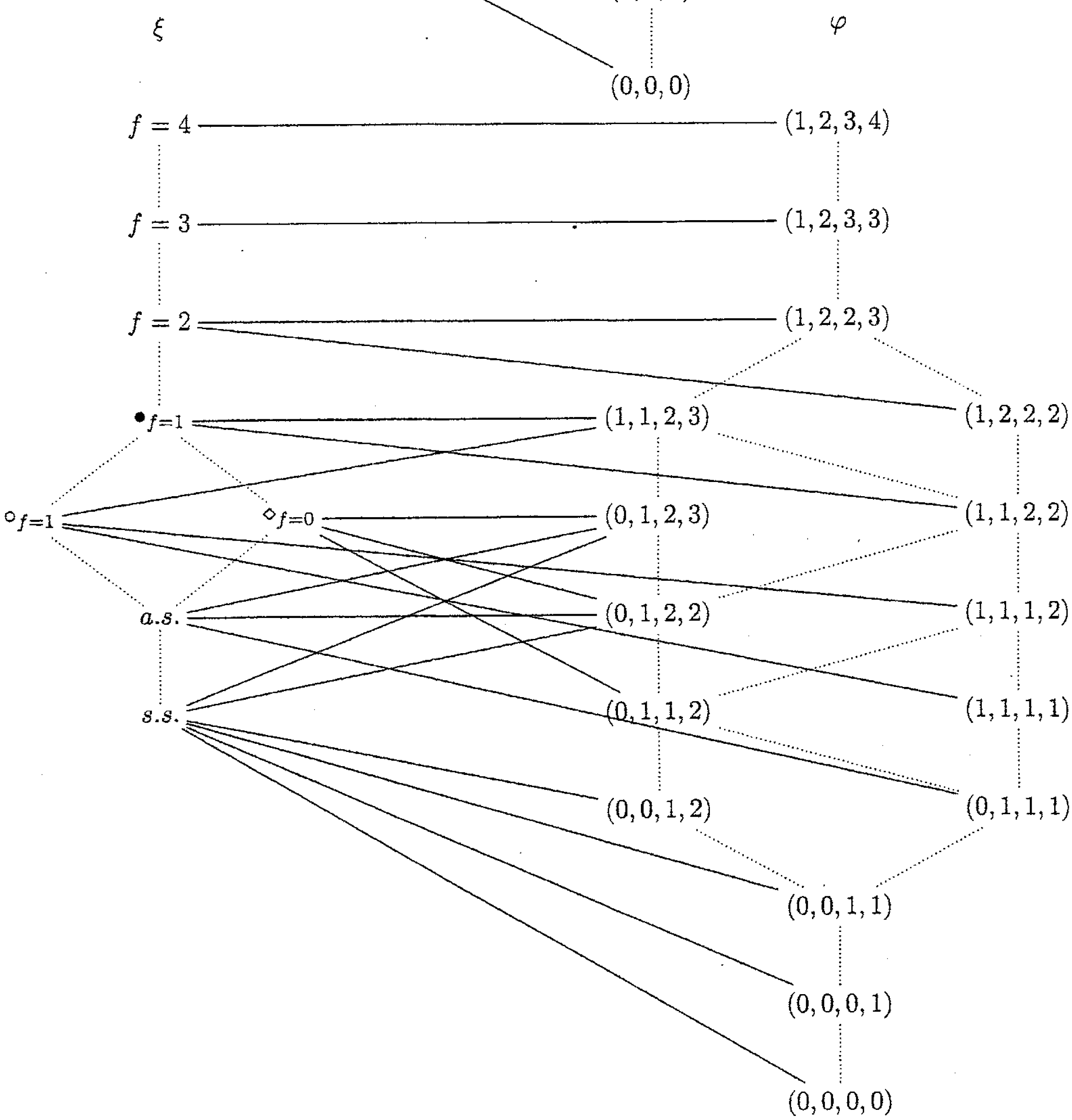
最も難しい部分は「S_φ のどの一般元にの上にも同じアーベル多様体がのっている」ことの証明である．この証明は「デュドネ加群 modulo p」間の準同型のリフトに関する考察と g に関する帰納法をうまく回すこと，また $\overline{S}_\varphi$ に入る a-数による stratification の次元の計算によってなされる．これが示されるとあとは偏極の数を勘定すればよい．

最後に Ekedahl-Oort stratification の感じをつかんでもらうために $g = 1, 2, 3, 4$ の場合の Newton polygon stratification と Ekedahl-Oort stratification の関係を図でしめしておいた．ξ が Newton polygon, φ が elementary sequence, f は p-rank である．$W^0_\xi \cap S_\varphi \neq \emptyset$ の時またその時に限り ξ と φ を線で結ぶ．ここで W^0_ξ は Newton polygon が丁度 ξ となる $\mathcal{A}_g$ の局所閉部分スキームである．

$$
\begin{tikzcd}
\xi & \varphi & \dim \\
f=1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & (1) \arrow[d, dotted, dash] & 1 \\
f=0 \arrow[r, dash] & (0) & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\xi & \varphi & \dim \\
f=2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & (1,2) \arrow[d, dotted, dash] & 3 \\
f=1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & (1,1) \arrow[d, dotted, dash] & 2 \\
f=0 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & (0,1) \arrow[d, dotted, dash] & 1 \\
 & (0,0) & 0
\end{tikzcd}
$$


ξ
φ
f = 3
(1, 2, 3)
f = 2
(1, 2, 2)
f = 1
(1, 1, 2)
a.s.
(0, 1, 2)
(1, 1, 1)
s.s.
(0, 1, 1)
(0, 0, 1)
(0, 0, 0)


ξ
φ
f = 4
(1, 2, 3, 4)
f = 3
(1, 2, 3, 3)
f = 2
(1, 2, 2, 3)
•f=1
(1, 1, 2, 3)
(1, 2, 2, 2)
∘f=1
⋄f=0
(0, 1, 2, 3)
(1, 1, 2, 2)
a.s.
(0, 1, 2, 2)
(1, 1, 1, 2)
s.s.
(0, 1, 1, 2)
(1, 1, 1, 1)
(0, 0, 1, 2)
(0, 1, 1, 1)
(0, 0, 1, 1)
(0, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 0)

References

[1] M. Demazure: Lectures on p-Divisible Groups. Lecture Notes in Math. **302** (1972).

[2] M. Deuring: Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **14** (1941), pp.197-272.

[3] T. Ekedahl and G. van der Geer: Cycle classes of the E-O stratification on the moduli of abelian varieties. Preprint: math.AG/0412272.

[4] S. Harashita: The a-number stratification of the moduli space of supersingular abelian varieties. J. Pure Appl. Algebra **193** (2004), pp. 163-191.

[5] K. Hashimoto and T. Ibukiyama: On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **27** (1980), pp.549-601. Part II, ibid. **28** (1981), pp.695-699. Part III, ibid. **30** (1983), pp.393-401.

[6] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort: Supersingular curves of genus two and class numbers. Compositio Math. **57** (1986), pp.127-152.

[7] K.-Z. Li: Classification of Supersingular Abelian Varieties. Math. Ann. **283** (1989), pp.333-351.

[8] K.-Z. Li and F. Oort: Moduli of Supersingular Abelian Varieties. Lecture Notes in Math. **1680** (1998).

[9] Ju. I. Manin, Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. Uspehi Mat. Nauk **18** no. 6 (114) (1963), pp.3-90.

[10] P. Norman: An algorithm for computing local moduli of abelian varieties. Ann. of Math. **101** (1975), pp.499-509.

[11] T. Oda: The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4série, t.**2** (1969), pp.63-135.

[12] A. Ogus: Supersingular K3 crystals. Astérisque **64** (1979), pp.3-86.

[13] F. Oort: Newton polygons and formal groups: Conjectures by Manin and Grothendieck. Ann. of Math. **152** (2000), pp.183-206, Springer - Verlag.

[14] F. Oort: A stratification of a moduli space of abelian varieties. Progress in Mathematics, Vol. 195 (2002), pp.345-416 Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland.

[15] F. Oort: Monodromy, Hecke orbits and Newton polygon strata. Manuscript. http://www.math.uu.nl/people/oort/

[16] F. Oort: Hecke orbits and stratifications in moduli spaces of abelian varieties. Manuscript. http://www.math.uu.nl/people/oort/

[17] G. Prasad: Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups. Publ. Math. Inst. HES, tome **69** (1989), pp.91-114.

Graduate School of Mathematical Sciences, The University ofTokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan.

E-mail address: `harasita@ms.u-tokyo.ac.jp`