

興奮場におけるパルスの 空間非一様性に対する応答について

上山大信 (Daishin Ueyama)

広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻

Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University

1 はじめに

反応拡散方程式は、自然界に見られる様々なパターンや形状の形成原理を説明しうるものとして、Turing が拡散誘導不安定性の理論を提唱して以来 [1] 多くの研究がなされてきた [2]. 反応拡散方程式は、そのカインティクスが単純であっても、複雑な時空パターンを生ずる事はよく知られている. 近年、自然界における時間または空間的な非一様性が注目されている [3, 4, 8]. 自然界においては完全に一様な状況というはまれであり、大抵はなんらかの非一様性が存在するからである. もちろん、それらの非一様性が一様な場合のダイナミクスから容易に想像されるものであれば問題ない. すなわち、その非一様性が無視したとしても、本質的な性質を失わないのであればさほど問題は無いだろう. これまで、反応拡散系において、進行波や定在波といったオブジェクトが注目され多くの研究がなされてきたが、それらの多くは空間一様な場における理論であった.

この小論では、ある興奮的なダイナミクスを持つ拡散率が空間周期的に変化する 1 次元反応拡散系において観察されるパルスの非自明な運動を示す. このパルスは、空間一様な場においては、一定波形・一定速度で進行する所謂進行パルス解であるが、空間周期的な非一様場においては、周期性を持たない不規則な運動が生ずることを数値計算により示す. 周期性を持たない速度変化や形状変化を示すだけでなく、空間一様場における進行パルス解が持つ重要な性質である一方向性すら失う場合があることも示される. 空間周期的な非一様性を持つ場における進行波の振る舞いについては、スカラー反応拡散方程式におけるフロント進行波に関して多くの解析結果がある. それらの結果は、空間非一様性が周期的である場合、フロント進行波は周期的にその速度および形状を変化させる事が知られている [3, 5, 6, 7]. 我々がここで示す興奮場におけるパルスの複雑な運動は、スカラー反応拡散方程式のフロント波では見られないものである.

2 モデル方程式

我々は、以下の空間的に拡散率が変化する 1 次元 Gray-Scott モデルを考える.

$$\begin{cases} u_t = (a(x)u_x)_x + \epsilon^{-1}(u^2v - (F+k)u), \\ v_t = d(a(x)v_x)_x - u^2v + F(1-v). \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 F, k および ϵ は正のパラメータである。Gray-Scott モデルは $2U + V \rightarrow 3U$ という自己触媒化学反応をモデル化したものである。 V は原材料となる化学物質であり、 U は中間生成物である化学物質、 P は最終生成物である。 P は U, V と反応しない為、方程式中には現れない。原材料化学物質 V は外部より F という率で供給されている。中間生成物 U は同じく F という率で外部に放出されている。また、中間生成物 U は率 k で最終生成物 P に変わる。このように Gray-Scott モデルで記述される化学反応系は外部から絶えず原材料化学物質が供給される開放系である。また、Gray-Scott モデルは上述のような化学反応をモデル化したものであるが、具体的な化学反応系を記述するものではない。すなわち、Gray-Scott モデルは、上述のような化学反応を内包するような化学反応系のメタモデルとして考えられる。

Gray-Scott モデルが様々な時空間パターンを示す事はよく知られている。この小論では、安定進行パルスのみ注目する。

2.1 ODE ダイナミクス

Gray-Scott モデル (1) の拡散項を取り除いた ODE カイネティクスは次のようになる。以下簡単のため、この節では $\epsilon = 1$ とする。

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \epsilon^{-1}(u^2v - (F + k)u), \\ \frac{dv}{dt} = -u^2v + F(1 - v). \end{cases} \quad (2)$$

$F = 0.04$ におけるヌルクラインおよび特徴的なフローを図 1 に示す。(2) は、Bogdanov-Takens (BT) 点を $(k, F) = (1/16, 1/16)$ において持ち、安定な平衡解 $(0, 1)$ を持つ。BT 点は codim 2 の特異点であり、Saddle-node 分岐 (SN) および Hopf 分岐 (HP) が (k, F) 空間にて交わる点である (図 2 参照)。SN 分岐前には、 $(0, 1)$ が唯一の平衡解であり大域安定である。このとき、系は図 1 ① に示すように興奮性を示す。SN 線を横切ると二つの新たな定常解 P (node) および Q (saddle) が生ずる。 P は $k > 0.035$ (図 3 参照) にて亜臨界型 Hopf 分岐により不安定化する。不安定なリミットサイクルが Hopf 分岐点から生じ、その軌道は k がホモクリニック線に近づくにつれてホモクリニック軌道に近づく。

3 空間一様場におけるパルスのダイナミクス

(1) 中の関数 $a(x)$ は、場の非一様性をあらわす。まず、ここでは $a(x) \equiv 1$ 、すなわち場が一様である場合を考える。空間一次元一様場においても Gray-Scott モデルは適切なパラメータ領域において様々な時空間パターンを示す事はよく知られている。自己複製パルスはその一つである。ここでは、そのような複雑な時空間パターンは扱わず、単純な一定波形、一定速度で進行する進行パルスを生ずるパラメータ領域を考える。この Gray-Scott モデルにあらわれる進行パルスは、2つのパルスの衝突時にパルスの反射現象が見られるという特徴がある。図 4 に、パラメータ ϵ とパルスの速度の関係を示す。図にあるようにパルスは定常パルスから超臨界分岐にて生ずる。その為、分岐点近傍では大変速度の遅い

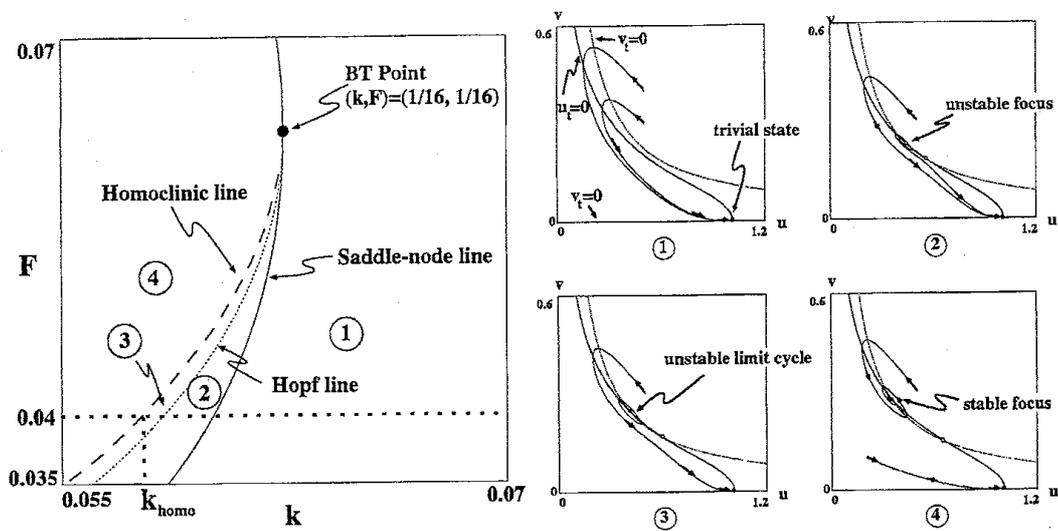


図 1: 左図: グレイ-スコットモデルのキネティクス (??) のパラメータ (k, F) に関する解析および相平面での流れ. BT 点 (Bogdanov-Takens point) は codim 2 の特異点であり, Saddle-node 分岐 (SN) および Hopf 分岐 (HP) が (k, F) 空間にて交わる点である. 実線は SN 分岐線であり, 破線は HP 分岐線である. 右図: 左図の各番号に対応するパラメータにおける特徴的な流れ.

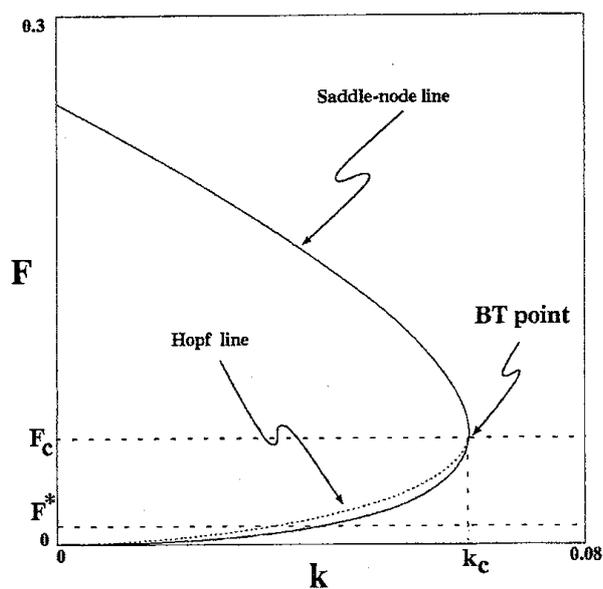


図 2: サドル・ノード分岐を実線であらわし, ホップ分岐を点線であらわす. これら 2 線は余次元 2 の分岐点である Bogdanov-Takens 点で交わる.

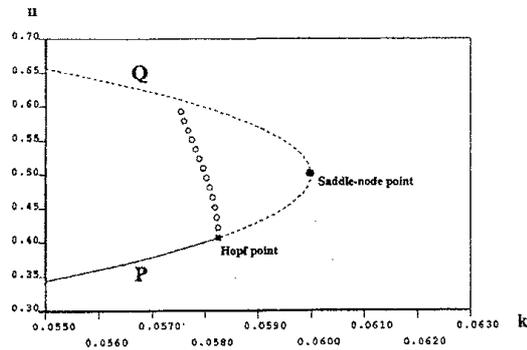


図 3: ODE の $F = 0.04$ における k に関する分岐図. ホップ枝は亜臨界分岐を経て定数解 P から分岐する.

進行パルスが存在する. 先の, 衝突時に反射する性質はこの分岐構造の存在と深く関わりがある事が知られている [9]. 今後パラメータを全て一様場において安定な進行パルス解が存在する, $F = 0.018, k = 0.052, \epsilon = 1.02, d = 2$ に固定し, 非一様性をあらわす $a(x)$ の関数形を変化させたときのパルス運動の変化を見る.

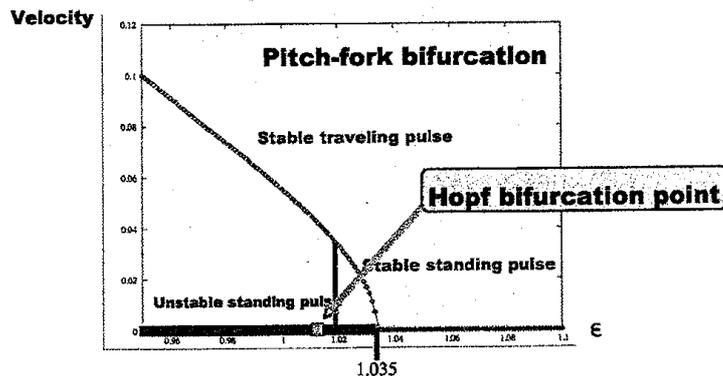


図 4: 空間一様場におけるパルスの進行速度のパラメータ ϵ に関する依存性. $\epsilon > 1.035$ において, 安定な定常パルス解が存在し, ϵ を徐々に小さくすると $\epsilon = 1.035$ でその定常解は不安定化し, 不安定定常解と安定進行波解となる. $\epsilon = 1.02$ での不安定定常解は, Hopf 分岐点の近くにあり, この特徴が空間非一様場において複雑な運動を生じさせるものと考えている.

4 空間非一様場におけるパルスのダイナミクス

ここでは, (1) が空間一様な場合において, 安定な進行パルス解が存在するパラメータに固定し, 周期的な非一様性が, 進行パルスの運動にどのように影響を与えるかをみる. ここでは, 図 5 に示すように $a(x)$ は周期関数とし, その平均は 1 とする. ここに $a(x)$ 中

のパラメータ l は非一様性の周期であり, b ($0 \leq b < 1$) は振幅をあらわす. 計算領域は, $x \in (0, L)$ であり, 周期的境界条件をかす.

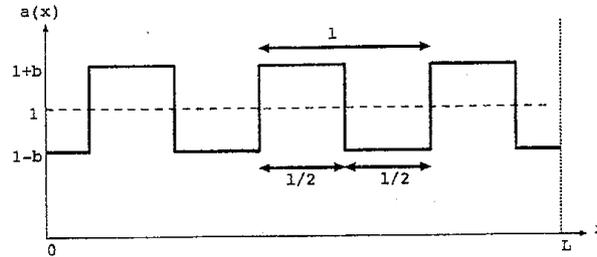


図 5: 空間的な非一様性をあらわす関数 $a(x)$ の関数形. l, b はそれぞれ周期および振幅をあらわす.

非一様性の振幅 b が十分小さい場合, 一方向にパルスが進行する事はたやすく想像される. 実際, b が十分小さい場合には, パルスは一方向に進行し, 空間周期的な非一様性によりその速度および形状は周期的に変化する. しかしながら, b がある程度大きい場合には状況は一変する. パルスのダイナミクスは, (l, b) に敏感に依存する. 最も特徴的なパルスの運動は, 進行方向がランダムに変わるパルスの運動で, その運動の様子を図 6 に示す. 数値計算により得られたパルスの運動の統計的な解析により, このパルスの運動は乱

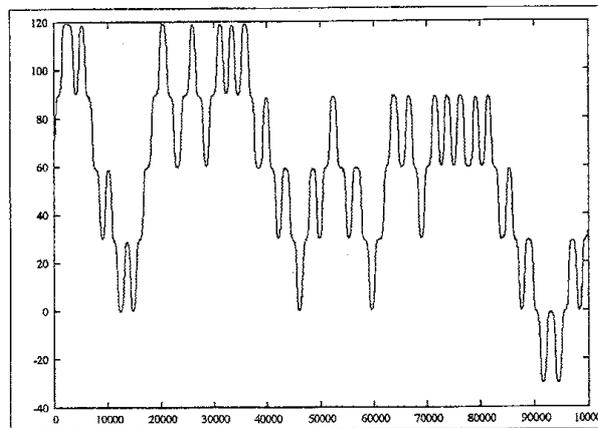


図 6: 乱歩パルスの位置の時間変化. 空間的な非一様性は周期的であるが, パルスの運動はその進行方向をランダムにかえるものとなる場合がある. 数値的に得られたパルスの運動の統計的な解析により, この運動はブラウン運動と同値である事がわかっている. ($F = 0.018, k = 0.052, \epsilon = 1.02, d = 2, L = 500, l = 30, b = 0.18$)

歩である事がわかっている. これは, 与えた空間非一様性が周期的であることと, 一様な場におけるパルスの運動が単純な進行波であった事を考え合わせると, 全く非自明な結果である. その他特徴的なパルスとして, 進行方向は一方向であるが, パルスの変形および速度の変化が周期的ではないものも観察された. パラメータ空間 (l, b) における相図を図 7 に示す. 相図にあるように, 乱歩パルスやその他特徴的なパルスは, ある程度の広がり

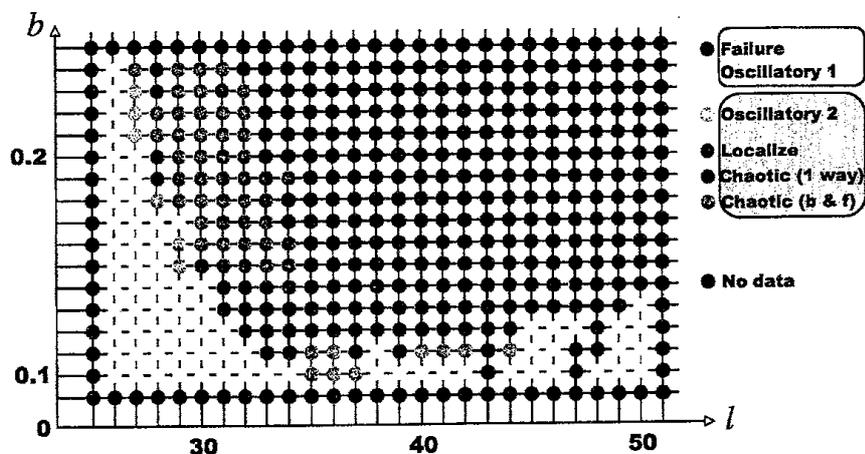


図 7: パラメータ空間 (b, l) における相図. 乱歩パルスはある有限の広がりをもったパラメータ領域で観察される. パルスの運動を 6 種類に分類した. 以下にそれぞれの相におけるパルス運動の概要を示す. Failure: パルスは振動的な運動を示し最終的に消滅する. Oscillatory 1: パルスは周期的に振動しながら一方向に進行する. Oscillatory 2: パルスは周期的な変形を繰り返しながら一方向に進行する. ただし, その変形周期は空間非一様性の周期と一致しない. Localize: パルスは周期的に進行方向を変化させ, 局所化する. Chaotic(1 way): パルスは不規則な変形をしながら一方向に進行する. Chaotic(b & f): パルスは不規則にその進行方向を変化させ進行する. 統計的な処理によりその運動は乱歩である事がわかっている.

をもって存在している事がわかる。このような乱歩パルスがどのような出自であられるのかは現在の所不明であるが、同パラメータにおいて空間一様な場合に存在する不安定な定常パルス解の振動的な不安定性に強く依存している事が分かっている(図4およびそのキャプションを参照)。

5 おわりに

我々はこの小論において、空間非一様性がパルスの非自明な運動を生ずることを示した。はじめに述べたように、自然界は非一様な環境にあふれている。ここで示した一例はおもちゃにすぎないが、非一様性が複雑性を生み出すという一つの例であろうと考える。パルスの運動が、非一様性の周期や振幅に敏感に反応することも興味深い。詳細なメカニズムはまだわかっていないが、今後の研究により、複雑な運動がどのようなメカニズムで生じるのか明らかになるであろう。

参考文献

- [1] A.M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Phi. Trans. R. Soc. Lond. B, 237(1952), 37-72.
- [2] J.D. Murray, *Mathematical Biology I, II*, Springer(2002).
- [3] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theor. Population Biol., 30(1986), 143-160.
- [4] G.C. Cruywagen, P. Kareiva, M.A. Lewis and J.D. Murray, *Competition in a spatially heterogeneous environment: modelling the risk of spread of a genetically engineered population*, Theor. Population Biol., 49(1996), 1-38.
- [5] J. Xin, *Front Propagation in Heterogeneous Media*, SIAM Rev, 42(2000), no.2, 161-230.
- [6] K.-I. Nakamura, *Effective speed of traveling wavefronts in periodic inhomogeneous media*, Preprint.
- [7] H. Berestycki and F. Hamel, *Front Propagation in Periodic Excitable Media*, CPAM, 55(2002), 949-1032.
- [8] J. Pauwelussen, *One Way Traffic of Pulses in a Neuron*, Journal of Mathematical Biology, 15(1982), 151-171.
- [9] S. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems*, Physica D, 165(2002), 176-198.