

二種混合流体における局在対流の衝突 - 振幅方程式に基づくアプローチ -

飯間 信*, 西浦 廉政,
北海道大学電子科学研究所, 札幌市北区北 1 2 条西 6 丁目

2005 年 9 月 16 日

1 はじめに

本論文では、二種混合流体における局在対流セルの衝突を、振幅方程式ともちいて解析した結果について報告する。よく知られた Rayleigh-Benard 対流では、対流の起こりは Rayleigh 数をパラメータとして超臨界分岐で記述できることが知られている。一方、水とアルコールの混合物のような二種混合流体 (binary fluid mixture) では、対流の起こりは亜臨界分岐となり、流体が静止した定常解 (conductive state) と対流を表す解 (convective state) が共存する領域が存在する (図 1)。

二種混合流体における対流にはいくつかに分類できる。conductive state が不安定になる点の近傍では、対流セルは進行波として観察される。これとは別に、局在進行波 (localized traveling wave; LTW) とよばれる、局在した対流セルからなる解が存在する。この局在進行波は、空間的に局在したある領域でのみ対流セルが存在する解で、局在領域が、ある一定の速度で進む。以後、この解のことをパルス解と呼ぶ。一般に散逸系では、同様のパルス解がよく知られており、パルス同

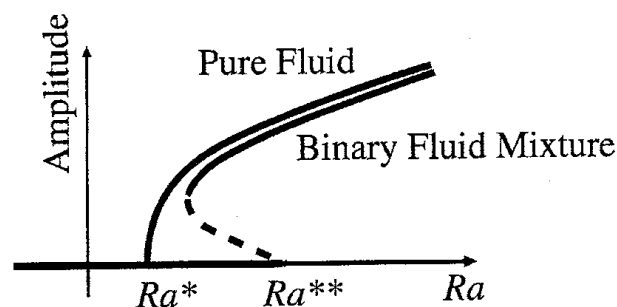


図 1 Rayleigh-Benard 対流における分岐図。単一の流体に対しては超臨界分岐が対流を起こし、二種混合流体に対しては亜臨界分岐が対流を起こす。

* makoto@nsc.es.hokudai.ac.jp

士の衝突は、消滅、反発、融合、カオス的な振る舞いなどの入出力関係を示すことが知られている。具体的な現象としては、バルハン砂丘 [13], ガスの放電 [2], 一酸化炭素の酸化プロセス [35], 化学反応 [6], および反応拡散系 [22, 23, 33] が挙げられる。

このような現象は興味深いですが、私たちが知っている限りでは、パルス衝突の力学 (パルス解同士の強い相互作用) を理解する普遍的な視点はこれまでなかった。その主たる原因は、パルス構造の大変形や時間依存性による。したがって、散逸系でのパルスの衝突力学はほとんどが個別の系の事例研究であった。ところが、最近西浦らにより提案された概念は、この主の問題の新しい解析方法を示唆していると思われる [23]。パルス衝突中の複雑で強い相互作用の過程の中には、しばしば不安定解が埋め込まれており、その不安定解 (鞍点であり、この点を軌道が通り過ぎて、不安定多様体に沿って解の漸近挙動が分類される)、及びそれらの間のヘテロクリニック結合が入出力の関係を理解する重要な鍵である、という考え方である。

このような不安定解は分水嶺解 (scattor) と呼ばれ、典型的には不安定常解または不安定周期解である。分水嶺解および、その周りの線形化作用素の固有関数がパルス衝突の複雑な振る舞いを決定していることが、Gray-Scott モデル [22], 複素 Ginzburg-Landau 方程式 [33] などの系ですでに確かめられている。

しかし、より現実に近い複雑な系で分水嶺解を得ようとするときには、系の自由度の大きさに起因する問題が生じる。たとえば分水嶺解が時間周期的であるとすると、解を有効に得るための方法が必要である。通常の Newton 法では、方程式系の Jacobian が必要となることから、系の自由度の大きさには強い制限がつく。寺本ら [33] は、複素 Ginzburg-Landau 方程式の不安定時間周期解としての分水嶺解を求めたが、系の自由度を極めて少ないものに落とさざるを得なかった。

ここでは、二層混合流体の対流にみられるパルス解の衝突を、振幅方程式を使って解析した結果を報告する。特にカオス制御の方法として用いられている遅延フィードバック制御 (Delayed feedback control; DFC) を用いて時間周期解としての分水嶺解を構成し、その解が衝突の結果を制御していることを数値的に示す。

2 分水嶺解について

解析結果の前に、分水嶺解の概念について、特に一章を設けて説明をしたい。その理由は近年分水嶺解の考え方、あるいは類似の概念を用いて解析された例が散逸系以外にも出てきていること、それに伴い分水嶺解の概念について多少の混乱が生じているように思われるためである。

混乱が生じた主要な原因としては、分水嶺解による解析を説明するとき、不安定多様体を介してのサドル解のネットワークを単にサドル部分に限定して分水嶺「解」と言ってしまったため、単独の不安定解と見分けがつかなくなったことが考えられる。より正確には、「分水嶺解による解析」とは、空間局在解の間の強い相互作用の解析を、系の (無限次元の) 相空間におけるサドル間ネットワーク (とそのパラメータ変化に伴う組み換え) が果たす機能に着目して行うことを言う。これでは煩雑でわかりにくいので、短縮してその一部のサドル部分を分水嶺解と呼んで代替させたことが混乱をまねくこととなったようである (これは単純な状況では、単独のサドル解だけ観察していれば

ばよい場合もあることにもよる)。

■動機 このような考え方をもちいる動機は、空間局在解の間の「強い相互作用」を理解することにある。強い相互作用としては、内的 (Intrinsic) および 外的 (Extrinsic) な2種類のものがあり、具体的には、内的なものとしてそれら局在解同士の衝突、外的なものとしては環境変化や外力などがある。

散逸系における空間局在解であるパルスやスポットの衝突現象は強い (内的) 相互作用の典型であり、大変形を伴うため、その記述は容易でない。その変形ダイナミクスの骨格構造はサドルネットワーク、すなわち不安定解のヘテロ結合が担っており、その大域分岐が多様な入出力関係を生み出す源となっている。分水嶺解はこのネットワークのノードにある不安定解を指している。

■分水嶺解はすぐには見えない 衝突現象の数値計算結果を見ても、直ちに変形がどのように起こっているかはわからない。特に、サドルネットワークのノードである分水嶺解は不安定であるため、衝突現象の数値計算を眺めても見いだすことは困難である。実際、分水嶺解を得るための典型的な手続きとしては、以下のようなものである。いくつかの (最低2つ) のパラメータ空間で詳しい相図を描き、その相境界、すなわち散乱の入出力関係が定性的に変化する付近で Newton 法を用いて、(運がよければ) 分水嶺解の候補を得ることができる。空間2次元ではこの作業はかなりものとなる。次にその周りでスペクトルを調べ、その固有関数、さらにその不安定固有関数方向の摂動を与えたとき、衝突散乱の output をすべて与えるかどうかを調べる必要がある。

注意すべきは、このようにして得た分水嶺解は「着目している解とは異なる」という点である。traveling pulse や traveling spot を対象にしても、分水嶺解は定常解だったり、時間周期解だったりする。また衝突をコントロールしているのがサドルであることにより、次のある種の「予測不可能性」が出ることに注意しよう。粒子解散乱実験では、初期値に対する摂動の入り方が結果に大きく影響する。例えば衝突後、合体する場合でも、どの方向にパルスやスポットが進むかについては、初期摂動やノイズの影響をまともに受けるので、予測は難しい。この事実は分水嶺解がサドルであるということに原因がある。むろん、どのような摂動を受ければ、どのような結果が出るかは言うことができる。

■分水嶺解と単なるサドルとの違い 「分水嶺解」も不安定解という意味ではサドルではあるが、その果たす役割あるいは位置付けについては上に述べたように解釈すべきで注意を要する。むしろ次のセパトリックスに概念的には近い。

多くの場合、サドルが重要となるのは、それ自体単独ではなく、その安定 (あるいは不安定) 多様体を含めてのことが多い。常微分方程式論の相平面解析で現れるセパトリックスもアトラクターのベイズン境界の意味で用いられるが、これがサドル解の安定あるいは不安定多様体から成ることはよく知られている。注意すべきは、パラメータを固定するごとにこの境界は決まるが、パラメータ変化と共に、大きく変動し、つながり方などが変わることである。これはしばしば「大域分岐」(global bifurcation) と呼ばれる。むろんセパトリックスに近いといっても、無限次元空間の話なので、上にも述べたように探索領域は桁違いに大変である。

しかしこのセパトリックスのアナロジーも必ずしも「分水嶺解」のすべての特徴を言い表しているとはいえない。その例として複雑時空間パターンの理解が挙げられる。

常微分方程式では時間方向のみの挙動が問題となるが、偏微分方程式では当然空間方向の構造がどのように変遷するかも重要となる。散乱衝突で特徴的なことは、解の変形により basin-switching がしばしば生じることがある。例えばそれまでは安定パルスだったのが、衝突後、時空間カオスに変わってしまうということが起きる。これを「deformation-induced basin switching」とよぶことにする。ある時点までは秩序解のみが観察され、衝突後、それらは消え去り、時空間カオスダイナミクスにシフトしたと見るならば、switching と言えよう。

以上のように我々が用いる分水嶺解は乱流の理解や制御に現れる分水嶺解と思想的に共通する部分も多い。しかしながら単にサドルという概念よりは広く、空間方向の構造（パターン）と時間方向のダイナミクスがそれらを介して織り合わされている。「分水嶺解による解析」という文脈で分水嶺解が使われるとき、そこでは複雑なダイナミクスの背後でそれらをコントロールしている「無限次元空間におけるヘテロクリニック結合を介したサドルネットワークとそのパラメータによる結合の仕方の切り替え」という観点が常に背後にあると考えてもらいたい。ここでいう「結合の切り替え」のより具体的事例については、文献 [24] を参照されたい。

3 Extended Complex Ginzburg-Landau Equations

解析の対象にするのは、extended complex Ginzburg-Landau equations (ECGL):

$$\partial_t A = d\partial_{xx}A + (a + fC)A + c|A|^2A + p|A|^4A + g|B|^2A, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B &= d^* \partial_{xx} B \\ &+ (a^* + f^* C)B + c^* |B|^2 B + p^* |B|^4 B + g^* |A|^2 B, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial_t C = \delta \partial_{xx} C + \alpha C + h \partial_x (|A|^2 - |B|^2), \quad (3)$$

である [27]。ここで、 $x, t \in \mathbb{R}$, $A(x, t), B(x, t) \in \mathbb{C}$; $C(x, t) \in \mathbb{R}$, $d, a, f, c, p, g \in \mathbb{C}$; $\delta, \alpha, h \in \mathbb{R}$, また * は複素共役を表す。

ECGL はブシネ近似を用いて記述された 2 次元 binary fluid convection の基礎方程式から以下の仮定のもとで導きだされたものである: (1) プラントル数 (Pr) が無限大; (2) 上下の境界条件はすべり境界条件; (3) ルイス数 $\mathcal{L} = D/\kappa$ (D は濃度場の拡散係数、 κ は熱拡散係数) が 1 に比べて十分小さい (これは水とアルコールの混合液のような典型的な場合に成立している)。変数 $A(x, t), B(x, t)$ はそれぞれ右へ進行する波、左へ進行する波の振幅を表し、 $C(x, t)$ は濃度場のある高波数成分を表す。パラメータ d, a, f, c, p, g は流体のパラメータに依存してきまるが、 Ra に依存するのは a のみである。以後は a のみを変化させ、残りの変数は固定する。

ECGL には以下の特徴がある。(C1) 変換 $(A(x, t), B(x, t), C(x, t)) \rightarrow (B^*(-x, t), A^*(-x, t), C(-x, t))$ に対して不変 (C2) 相互作用を表す項 (たとえば A に対しては $g|B|^2A$) は相手の振幅のみに依存し、位相には依存しない。特徴 (C1) は、方程式の対称性を示しており、 A, B 自体は鏡映対称性を持たないことをしめしている。特徴 (C2) により、パルス衝突の解析は複素 Ginzburg-Landau 方

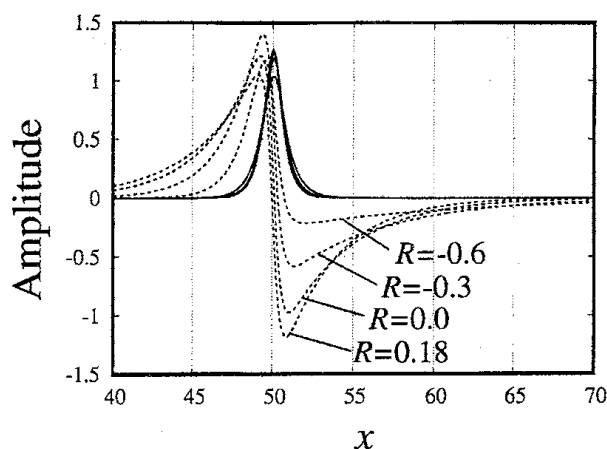


図2 単一パルス解。実線は A の振幅を、破線は C を表す。

程式の場合よりもすこし簡単となる。というのは、パルス同士の位相差にも結果が依存するからである [33]。

なお、ECGL は二層 Couette-Poiseuille 流れの界面に現れる進行波を記述することも知られている [26] ことから、あるクラスの流体運動を記述する方程式として普遍性があると考えられる。

4 数値計算によるパルス相互作用と分水嶺解の役割

数値計算により、方程式 (1)-(3) を積分し、パルス解とその相互作用を調べた。積分スキームは Euler 法 (時間刻み $\Delta t = 0.0001$, 空間刻み $\Delta x = 0.1$) である。計算領域は $L = 100$ で、境界条件は周期境界条件またはノイマン条件を課している。パラメータは、 a 以外は定数とし、以下のよう定めた: [29] $d = 0.15 + 1.0i$, $f = 0.4$, $c = 2.4 + 2i$, $p = -1.65 + 2i$, $g = -10$, $\delta = 0.25$, $\alpha = 0.02$, $h = 0.5$, ($i = \sqrt{-1}$)。パラメータ a は $a = (-0.24 + R)$ とおき、 R (Rayleigh 数に対応) を変化させた。

4.1 単一パルス解

今後この論文では空間局在解 (「パルス」と呼ぶ) に注目する。 A と C のみ ($B \equiv 0$) からなるパルスが図 2 に示されている。むろん特徴 (C2) により、 B, C のみからなるパルスも存在する。 A の振幅は C は、方程式 (1) の相互作用項 CA にも関わらずあまり影響を受けていない。項 $\partial_x |A|^2$ の影響により C の形は非対称であるが、 $|A|$ はほぼ対称である [28]。

パルスの進行速度は、 R の値によって正にも負にもなる (図 3)。支配方程式には定数移流項 $v\partial_x A$ を含んでいないので、パルスの進行は場 C との相互作用による。

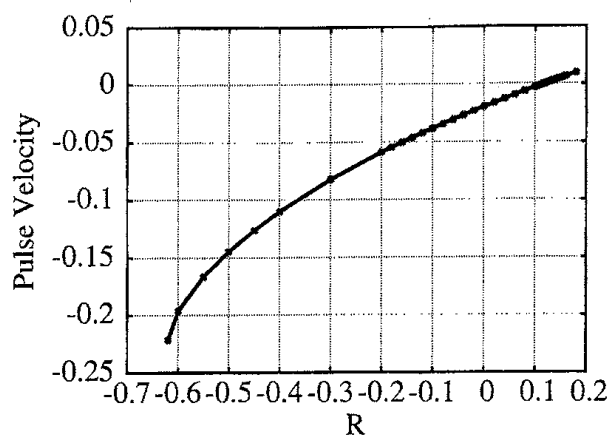


図3 単一パルスの速度。パルス解は、 $-0.62 \leq R \leq 0.18$ という範囲で存在する。 R の値によって、速度は正にも負にもなる。

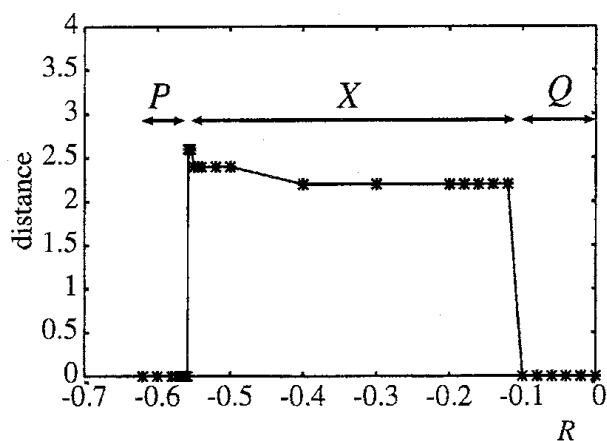


図4 パルス衝突の結果。衝突の結果束縛状態が形成された場合(領域 X)には、その間隔が示されている。消滅状態は領域 P および Q で観測される。

Kolodner らによる実験によれば [15], やはり局在対流セルは Ra に依存して正負両方の速度を持ち、その定性的な振る舞いはここで示した結果と対応している。また、以下のような結果が得られている。(1) 実験で観測された異常に遅い進行速度が再現された [28]. (2) 色々なパルスの長さが実験で観測されているが、この結果も再現されている。これらの結果により、ECGL のパルス解と二種混合流体の局在対流セルとは良い対応を見せていると言える。

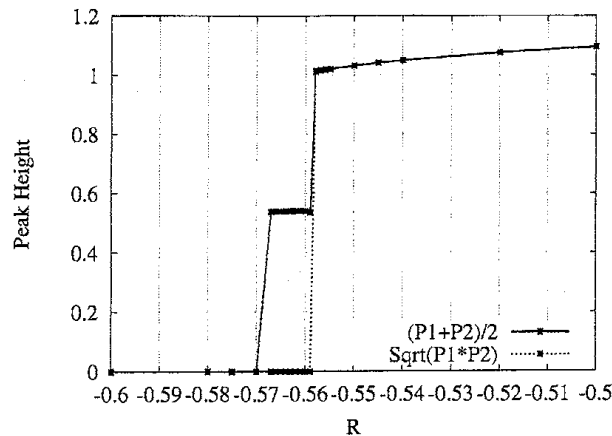


図5 パルス衝突の漸近状態。2つのパルスのピークの、相加平均と相乗平均が示されている。 $R \leq -0.57$ で示される領域は、2つのパルスが消滅したことを、 $-0.57 < R < -0.559$ で示される領域は一つのパルスの消滅を、 $-0.558 < R$ で示される領域は束縛状態が形成されたことを示す。

4.2 パルスの衝突 I: 入出力関係

この節ではパルス衝突の詳細を議論する。ここでは互いに反対向きに進むパルスの衝突を扱う。初期条件としては、 A と C からなるパルスと、 B と C からなるパルスを十分遠く(距離 = 50)に離しておいたものを用いた。

衝突後の漸近状態は束縛状態(2つのパルスが動かないで止まっている状態)か、消滅状態(1つまたは2つのパルス解が消滅する状態)である。ここでは束縛状態を2つのパルスの間隔で特徴づけた。

図4には、パルス衝突の結果が漸近状態により示されている。領域 X ($-0.54 \leq R \leq -0.12$)では、束縛状態が形成されている。この束縛状態は時間周期解であるが、 A および B の振幅は時間的に定常である。この両側に2つの消滅状態 P, Q が存在する(単一パルス解は $-0.62 \leq R \leq 0.18$ の範囲で存在する)。

この節では、図4の領域 P に対応するパルス衝突の遷移について詳細を報告する。初期条件などは第4.3章と同じである。ここでは消滅状態 P と束縛状態 X の間の遷移に着目する。この遷移において興味深いことは、入出力関係が R の変化に伴い変化する点にある。束縛状態 X と消滅状態 P の境目を拡大したものが図5である。

図5には、衝突後十分時間が経った時のパルスのピークの高さの相加平均と相乗平均が示されている。両者が一致している場合($-0.558 \leq R$)は、衝突後2つのパルスが共に残り、束縛状態を形成していることを表している。相加平均がゼロでなく、相乗平均がゼロである場合($-0.57 < R \leq -0.559$)は、衝突後ひとつのパルスの高さがゼロ、つまり消滅したことを示してい

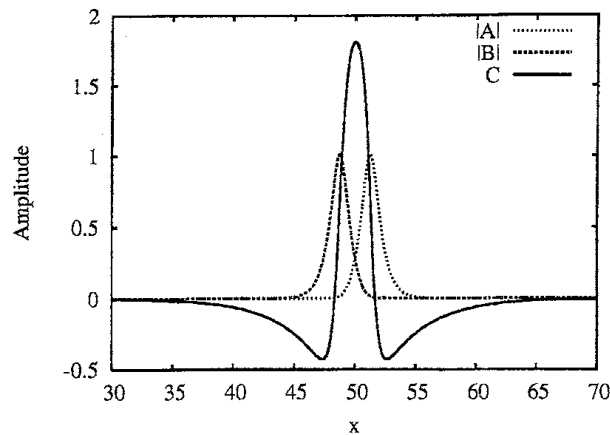


図6 不安定時間周期解 ($R = -0.56$).

る。相加平均、相乗平均が両方ともゼロである場合 ($R \leq -0.57$) は、衝突後、二つのパルスが消滅したことを表す。

つまり、領域 P と領域 Q の遷移過程においては、パルス衝突の結果は、 R が減るにしたがって (A) 2-pulse \rightarrow 束縛状態 ($-0.559 < R$), (B) 2-pulse \rightarrow 1-pulse ($-0.57 < R \leq -0.559$), (C) 2-pulse \rightarrow 消滅状態 ($R \leq -0.57$) という 3 つの入出力関係が現れることがわかった。

4.2.1 消滅プロセスにおける隠れた分水嶺解

この消滅状態への遷移を理解するには分水嶺解 [22, 23, 33] が有効であると思われる。分水嶺解は、不安定な鞍点であり、考えている系の定常状態あるいは時間周期解に対応する。そして軌道の行く先を支配する働きをもつ。衝突の際変形したパルスの分水嶺解の不安定方向のどこかに沿って変化し、その方向に沿って行った先の状態に落ち着くのである。それゆえ、しばしば軌道が分水嶺解の近傍にしばらくとどまり、その後不安定多様体の方向に向かって動き出すということが起きる。

この系では、分水嶺解は時間周期解であり、系の自由度はこれまでに研究されてきた例よりも大きい (空間分割数 $N = 1000$, 時間刻みと周期の比 $m \sim 10000$) これは AUTO のような計算機プログラムの助けを借りて大域的分岐図を作成したり、Newton 法を使って分水嶺解を求めたりすることが難しいことを意味する。したがって、ここでは別の方法 (delayed feedback control method; DFC) を用いることで不安定な時間周期解を求める (Appendix 参照)。

図 6 には、 $R = -0.56$ の場合の不安定束縛状態が示されている。この R の値はパルス衝突の結果が (B) の場合に相当する。ここには A と B の振幅のみが示されているが、各々の実部と虚部は時間周期的で、その周期はおおよそ 3.76867 である。 $|A|$ のピークと $|B|$ のピークの間隔はほぼ 2.6 であり、図 4 にある束縛状態の間隔とほぼ同じである。パルス衝突により束縛状態が達成されないため、不安定束縛状態は文献 [22, 23, 33] で論じられた分水嶺解の働きをしていると考えられる。

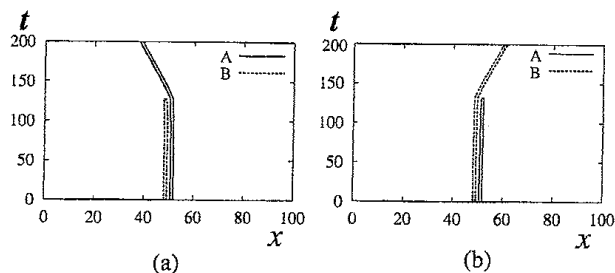


図7 不安定時間周期解に小さな摂動を加えた時の時間発展。与える摂動の違いにより、(a),(b)のように結果が制御できる様子が示されている。

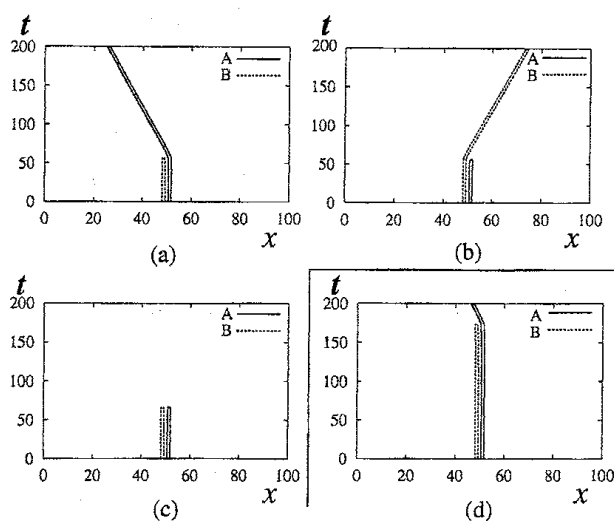


図8 (a)(b) 不安定時間周期解に摂動が加わったものの時間発展 ($R = -0.56$)。2種類の摂動により、パルス衝突の結果が制御できていることが示されている。(c) (a), (b)と同じだが、異なる摂動を加えたもの。パルス衝突の時と同様に、2つのパルスの消滅が観測されている。(d) 不安定時間周期解に (c)と同じ摂動を加えたもの ($R = -0.57$)。こちらでは、2つのパルスの消滅は観測されずに一つのパルスが残っている。

この不安定束縛状態から出る、不安定多様体の方向を調べるため、不安定解に摂動的なノイズを加えた結果を図7に示した。図7(a), 図7(b), には、同じ不安定時間周期解に、異なる摂動を加えたものである。結果は左右それぞれのパルスが生き残っている。

続いてパルス衝突 (C) の場合に相当する、 $R = -0.57$ の場合の結果を示す。同様に不安定解を得た後、摂動的なノイズを3種類与えた時の結果が、図8に示されている。図8(a), 図8(b) はそれぞれ図7(a), 図7(b)と同じ摂動を加えており、右または左のパルスが生き残るといふ結果もよ

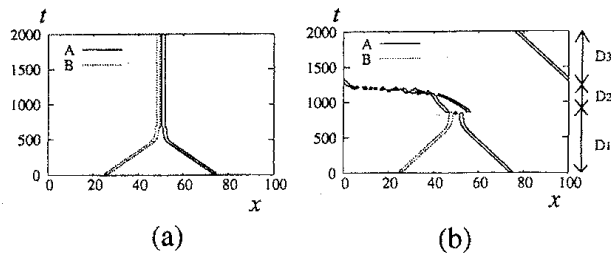


図9 (a) $R = -0.14$ のときの、パルス衝突の時空間プロット。 $|A|$ の等高線 (実線) と $|B|$ の等高線 (点線) が示されている。漸近状態は束縛状態である。(b) $R = -0.08$ の場合のパルス衝突の時空間プロット2つのパルスが互いに近づき (D_1)、強い相互作用により一つのパルスが消滅する。相互作用中に新たな秩序が形成されるが (D_2)、最終的には一つのパルスだけが残る (D_3)。

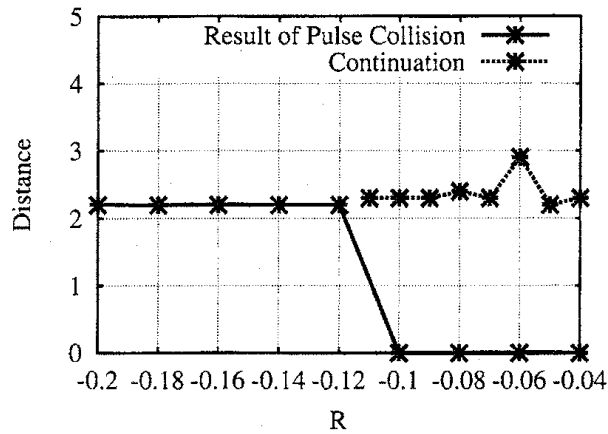


図10 束縛状態におけるパルスの距離。実線はパルス衝突の漸近状態を表し、領域 $-0.1 < R \leq -0.04$ では消滅状態である。点線は、 $R = -0.12$ の束縛状態からの continuation により得られた漸近状態である。

く似ている。一方、図8(c)は、別の摂動を加えたものであり、パルス衝突の結果と同じパルスの消滅が得られている。興味深いのは、同じ摂動を $R = -0.57$ の場合の不安定解に加えた時はパルスの消滅が起きていないこと(図8(d))である。これは、この2つの状態の間で不安定多様体の次元一つ増えたことを示唆していると考えられる。

4.3 パルスの衝突 II : 隠れた分水嶺解

4.3.1 消滅領域での安定束縛状態

ここでは、束縛状態 X と消滅状態 Q の遷移に着目する。この遷移で非常に興味深いことは、消滅状態であっても束縛状態が存在することである。これを示すために、領域 X における束縛状

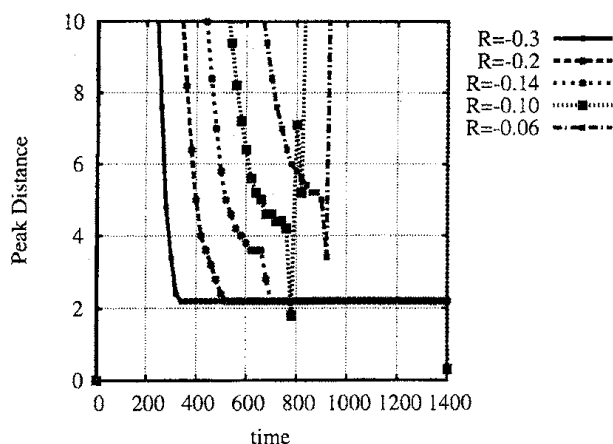


図 11 パルス衝突中の間隔の時間変化。 $R = -0.14$ の時には準定常状態が $600 \leq t \leq 650$ の時に観測され、 $R = -0.10$ の時には準定常状態が $t \simeq 750$ の時に観測されている。

態から continuation による数値計算を行った。結果は図 10 に示されており、消滅領域 Q でも以下に説明するような束縛状態が観測された。 $R \leq -0.14$ の場合には対称な束縛状態 (2つのパルスのピークの高さが同じ) である。 $-0.12 \leq R \leq -0.10$ の場合は、非対称な束縛状態 (2つのパルスのピークの高さが異なる) がみられる。この場合でもパルスのピークは時間的に定常である。一方、 $-0.09 \leq R$ の場合、パルスの振幅が時間的に周期的となる状態がみられる。結局、パルス衝突により一つのパルスが消滅するような場合でも、束縛状態が実は存在するが、パルス衝突の結果としては束縛状態には達し得ないということがわかった。この結果の理解にはより詳細な解析が必要である。

4.3.2 パルス衝突の動力学

パルス衝突の動力学をしらべる。反対方向に進むパルスの間隔が時間の関数として図 11 に示されている。束縛状態 ($R = -0.14$) における典型的なピーク間隔は 2.2 である。消滅領域 Q での関数は、まるで準定常状態を通りすぎるように見える。 $R = -0.10$ の場合、準定常状態は $t \simeq 750$ のときみられる短いプラトー (間隔 4.2) としてみられる。同様の準定常状態は、 $R = -0.14$ のときよりはっきりと見える。この場合、範囲は $600 \leq t \leq 650$ であり、そのときのパルス間隔は 3.5 である。

4.3.3 分水嶺解 II

図 12 には、 $R = -0.10$ の場合の不安定束縛状態が示されている。その周期はおよそ 1.950475、 $|A|$ のピークと $|B|$ のピークの間隔はほぼ 4.2 であり、4.3.1 章と図 10 で論じられた束縛状態の間隔とは異なる。また、この間隔の大きさは図 11 のプラトーと近い。パルス衝突により束縛状態が達成されないため、この不安定束縛状態は分水嶺解であると考えられる。

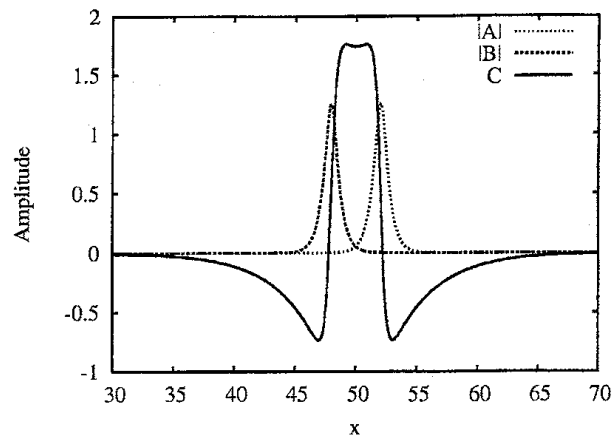


図 12 遅延フィードバック制御法により得られた不安定時間周期解 ($R = -0.10$)。

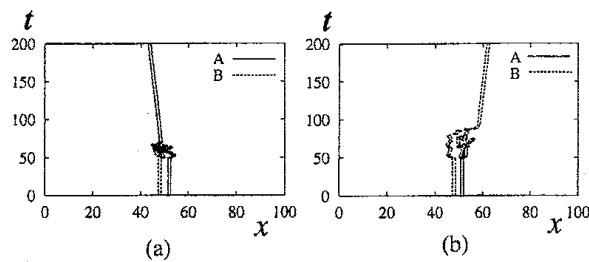


図 13 不安定時間周期解に摂動を加えた時の時間発展。2つの図異なる摂動を加えたもので、漸近状態が異なる様子が示されている。

この不安定解に摂動的なノイズを加えた結果を図 13 に示した。左側と右側は DFC により求めた同じ不安定時間周期解に、別の摂動を加えたものであるが、複雑な相互作用の結果別のパルスが生き残っていることが示されている。

5 まとめ

この論文では、extended Ginzburg-Landau equations (ECGL) を用いて二種混合流体におけるパルス衝突の動力学をしらべた。

数値計算により、ECGL は実験により得られているパルス速度の Rayleigh 数依存性や、束縛状態の形成やパルスの消滅などのパルス衝突の漸近状態を定性的に再現する結果が得られた。

パルス衝突の動力学を数値的に調べ、特にパルス衝突が一つのパルスの消滅をもたらすような領域でも、束縛状態が ECGL の解として存在することを示した。この結果は、束縛状態を形成する前にパルスの軌道を変える何らかの機構が存在することを示唆する。DFC という方法を用いて、パルス衝突を特徴づける不安定時間周期解を得た。この方法はこれまでパルス衝突の解析には用い

られてこなかった。

得られた不安定時間周期解に様々なノイズを加えた結果、多様なパルス相互作用が再現できた。これらの結果はパルス衝突の結果を含んでいるが、更に、パルス衝突では観測されないような入出力関係が含まれている。

衝突過程の詳細な研究が必要である。我々は現在、不安定周期解の近傍での線形化演算子の固有ベクトルがパルスの衝突を制御しているかどうかを調べている。次の論文で詳細を報告する予定である。

振幅方程式の詳細な研究は Navier-Stokes 方程式で記述されるようなより現実的な系の理解への重要な一歩である。今回の結果とそのような系との比較は面白い問題である。その際の鍵は、衝突過程に埋め込まれている適切な不安定周期解を得ることである。DFC は軌道の時系列データを必要とするだけなので、そのような問題にも適用できるだろう。我々のアプローチ法は散逸系の広い範囲の問題に対する普遍的な視点となることを信じている。

Appendix: Delayed feedback control

Delayed feedback control (DFC) はもともとカオス解のなかにある不安定周期解を安定化させるために開発された [20, 11, 12]. 安定化の原理に関する包括的理解はまだであるものの、周期倍化点近傍での安定化機構は説明されている [11, 12].

Delayed feedback control 法の手続きは以下ようになる。N 次元空間における力学系

$$\dot{X} = F(X) \quad (X \in R^N) \quad (4)$$

が、周期 τ の不安定周期解 (unstable periodic orbit; UPO) $X_0(t)$ を持つものとする: $X_0(t+\tau) = X_0(t)$. すると、 $X_0(t)$ は以下の力学系の安定な周期解として得られる。

$$\dot{X} = F(X) + D, \quad (5)$$

$$D = K(X(t-\tau) - X(t)), \quad (6)$$

ここで K は定数である。

DFC を用いることにより、不安定周期解を得ることができる。その具体的な手続きは以下のようになる。初期条件としては、パルス衝突の過程におけるある時刻のデータを用いた。UPO の周期 τ は入力データの周期に近いものとして、区間 $[\tau_1, \tau_2]$ ($\tau \in [\tau_1, \tau_2]$) を設定する。その後いくつかの τ (in $[\tau_1, \tau_2]$) に応じた計算を行い、制御信号 $|D|$ が最小になるような τ を選び出す。この τ を用いてさっきより狭い区間 $[\tau'_1, \tau'_2]$ を設定する。以後、 $|D|$ が十分に小さくなるまで計算を継続する。

参考文献

- [1] C. M. Aegerter and C. M. Surko. Effects of lateral boundaries on traveling-wave dynamics in binary fluid convection. *Phys. Rev. E*, 63:046301, 2001.

- [2] Y. Astrov and H. G. Purwin. Plasma spots in a gas discharge system: birth, scattering and formation of molecules. *Phys. Lett. A*, 283:349–354, 2001.
- [3] W. Barten, M. Lucke, and M. Kamps. Localized traveling-wave convection in binary-fluid mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2621–2624, 1991.
- [4] W. Barten, M. Lucke, M. Kamps, and R. Schmits. Convection in binary fluid mixtures. i extended traveling-wave and stationary states. *Phys. Rev. E*, 51:5636–5661, 1995.
- [5] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1124, 1993.
- [6] S. I. Ei, M. Mimura, and M. Nagayama. Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems. *Physica D*, 165:176–198, 2002.
- [7] C. Futterer and M. Lucke. *Phys. Rev. E*, 65:036315, 2002.
- [8] J. A. Glazier and P. Kolodner. Interaction of nonlinear pulses in convection in binary fluids. *Phys. Rev. A*, 43:4269–4280, 1991.
- [9] H. Herrero and H. Riecke. Bound pairs of fronts in a real ginzburg-landau equation coupled to a mean field. *Physica D*, 85:79–92, 1995.
- [10] D. Jung and M. Lücke. Localized waves without the existence of extended waves: Oscillatory convection of binary mixtures with strong sores effect. *Phys. Rev. Lett.*, 89:054502, 2002.
- [11] W. Just, T. Bernard, M. Ostheimer, E. Reibold, and H. Benner. Mechanism of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.*, 78:203–206, 1997.
- [12] W. Just, S. Popovich, A. Amann, N. Baba, and E. Scholl. Improvement of time-delayed feedback control by periodic modulation: Analytical theory of floquet mode control scheme. *Phys. Rev. E*, 67:026222, 2003.
- [13] A. Katsuki, H. Nishimori, N. Endo, and K. Taniguchi. Collision dynamics of two barchan dunes simulated using a simple model. *J. Phys. Soc. Japan*, 74:538–541, 2005.
- [14] P. Kolodner. Interactions of localized pulses of traveling-wave convection with propagating disturbances. *Phys. Rev. A*, 42:7504–7506, 1990.
- [15] P. Kolodner. Collisions between pulses of traveling-wave convection. *Phys. Rev. A*, 44:6466–6479, 1991.
- [16] P. Kolodner. Drift, shape, and intrinsic destabilization of pulses of traveling-wave convection. *Phys. Rev. A*, 44:6448–6465, 1991. Errata: PRA 46 (1992)6761.
- [17] P. Kolodner. Drifting pulses of traveling-wave convection. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1165–1168, 1991.
- [18] P. Kolodner and G. Flatgen. Spatial-feedback control of dissipative chaos in binary-fluid convection. *Phys. Rev. Lett. Phys. Rev. E*, 61:2519–2532, 2000.
- [19] P. Kolodner, G. Flatgen, and I. G. Kevrekidis. Controlling dissipative chaos in binary-fluid convection. *Phys. Rev. Lett.*, 83:730–733, 1999.

- [20] K. Pyragas. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller. *Phys. Rev. Lett.*, 86(11):2265–2268, 2001.
- [21] J. J. Niemela, G. Ahlers, and D. S. Cannell. Localized traveling-wave states in binary-fluid convection. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1365–1368, 1990.
- [22] Y. Nishiura, T. Teramoto, and K. Ueda. Dynamic transitions through scatters in dissipative systems. *Chaos*, 13:962–972, 2003.
- [23] Y. Nishiura, T. Teramoto, and K. Ueda. Scattering and separators in dissipative systems. *Phys. Rev. E*, 67:056210, 2003.
- [24] Y. Nishiura, T. Teramoto, and K. Ueda. Scattering of traveling spots in dissipative systems. *Chaos*, in press.
- [25] A. La Porta, K. D. Eaton, and C. M. Surko. Transition between curved and angular textures in binary fluid convection. *Phys. Rev. Lett. Phys. Rev. E*, 53:570–576, 1996.
- [26] M. Renardy and Y. Renardy. Derivation of amplitude equations and analysis of sideband instabilities in two-layer flows. *Phys. Fluids A*, 5:2738–2762, 1993.
- [27] H. Riecke. Ginzburg-landau equation coupled to a concentration field in binary-mixture convection. *Physica D*, 61:253–259, 1992.
- [28] H. Riecke. Self-trapping of traveling-wave pulses in binary mixture convection. *Phys. Rev. Lett.*, 68:301–304, 1992.
- [29] H. Riecke. Attractive interaction between pulses in a model for convection in binary mixtures. *Phys. Rev. E*, 52(5):5685–5687, 1995.
- [30] H. Riecke and G. D. Granzow. Localization of waves without bistability: worms in nematic electroconvection. *Phys. Rev. Lett.*, 81:333–336, 1998.
- [31] H. Riecke and W-J. Rappel. Coexisting pulses in a model for binary-mixture convection. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4035–4038, 1995.
- [32] A. Roxin and H. Riecke. Destabilization and localization of traveling waves by an advected field. *Physica D*, 156:19–38, 2001.
- [33] T. Teramoto, K. Ueda, and Y. Nishiura. Phase-dependent output of scattering process for traveling breathers. *Phys. Rev. E*, 69:056224, 2004.
- [34] R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. M. Surko. Traveling waves and chaos in convection in binary fluid mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 55:496–499, 1985.
- [35] M. G. Zimmermann, S. O. Firle, M. A. Natiello, M. Hildebrand, M. Eiswirth, M. Baer, A. K. Bangia, and I. G. Kevrekidis. Pulse bifurcation and transition to spatiotemporal chaos in an excitable reaction-diffusion model. *Physica D*, 110:92–104, 1997.