京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	Extensions of Figa-Talamanca's multiplier theorem to Banach function spaces (Banach and function spaces and their application)
Author(s)	冨田, 直人; 中井, 英一; 薮田, 公三
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1455: 1-7
Issue Date	2005-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/47811
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 1-7

Extensions of Figà-Talamanca's multiplier theorem to Banach function spaces

大阪大学・理学研究科 冨田 直人 (Naohito Tomita)
Department of Mathematics, Osaka University
大阪教育大学・教育学部 中井 英一 (Eiichi Nakai)
Department of Mathematics, Osaka Kyoiku University
関西学院大学・理工学部 薮田 公三 (Kôzô Yabuta)
School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University

1 はじめに

まず Figà-Talamanca の定理を述べるために, いくつかの定義を与える. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を急減少関数空間とし, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の共役空間とする. Fourier multiplier の空間 $M_p(\mathbb{R}^n)$ を

$$M_p(\mathbb{R}^n)=\{m\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n):T_m\in\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))\},\quad \|m\|_{M_p}=\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p)}$$

で定める. ここで $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素全体とし, T_m は $T_mf=[\mathcal{F}^{-1}m]*f$ $(f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ で定義される. この時, $M_p(\mathbb{R}^n)$ が Banach 空間となることがよく知られている.

次に空間 $A_p(\mathbb{R}^n)$ を

$$A_p(\mathbb{R}^n)=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}f_j*g_j\in C_0(\mathbb{R}^n):\{f_j\},\{g_j\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_p\|g_j\|_{p'}<\infty\right\}$$

とし, $A_p(\mathbb{R}^n)$ 上のノルムを

$$\|f\|_{A_p}=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_p\|g_j\|_{p'}:f=\sum_{j=1}^{\infty}f_j*g_j\right\}$$

で定める. [4] の中で, Figà-Talamanca はある意味で $A_p(\mathbb{R}^n)^*=M_p(\mathbb{R}^n)$ となることを示した ([5]). 第 2 節では Fourier multiplier の例を述べる. 第 3 節では Banach function space 上の Fourier multiplier に対し Figà-Talamanca の定理を考える．第 4 節では Banach function space の具体例として, Lorentz space 上の Fourier multiplier の特徴づけを考える．

2 Fourier multiplier の例

例 2.1. $M_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．$L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset M_2(\mathbb{R}^n)$ を示そう．$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．Plancherel 定理から

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n}\|\hat{T_m f}\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|m\hat{f}\|_2^2 \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^n}\|m\|_\infty^2\|\hat{f}\|_2^2 = \|m\|_\infty^2\|f\|_2^2\end{aligned}$$

が分かる．よって $m \in M_2(\mathbb{R}^n)$．逆の包含関係 $M_2(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ については, 例えば [2, Chapter 3, Section 5].

例 2.2. Hilbert 変換 H は

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

で定められる．すると

$$Hf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

とあらわせるから, H の L^p-有界性から $-i\,\mathrm{sgn}\,\xi \in M_p(\mathbb{R})$ $(1<p<\infty)$ が分かる．

例 2.3 ([6]). $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ は

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha|\xi|^{-|\alpha|} \quad (\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$$

を満たすとする．この時, $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$.

例 2.4 ([3]). $n \ge 2$ とする．この時, $\chi_B \notin M_p(\mathbb{R}^n)$ $(p \ne 2)$．ここで, $B = B(0,1)$.

$Q = (-1,1)^n$ とする時, $\chi_Q \in M_p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ となることがよく知られている．よってこの Feffereman の例から, $M_p(\mathbb{R}^n)$ は非常にデリケートな空間であることが分かる．

3 Banach function space 上の Fourier multiplier

まず Banach function space を次のように定義する ([1]). $L^0(\mathbb{R}^n)$ で R^n 上の Lebesgue 可測関数全体をあらわす. $L^0(\mathbb{R}^n)$ の部分空間 E と, E 上のノルム $\|\cdot\|_E$ が与えられたとする. この時, 次の 4 条件が満たされる時 $(E, \|\cdot\|_E)$ を Banach function space という:

1. $g \in E, \quad |f(x)| \le |g(x)|$ a.e. $\Longrightarrow f \in E, \quad \|f\|_E \le \|g\|_E$.
2. $\sup_j \|f_j\|_E < \infty, \quad 0 \le f_j(x) \nearrow f(x)$ a.e. $\Longrightarrow f \in E, \quad \|f_j\|_E \nearrow \|f\|_E$.
3. $|\Omega| < \infty \Longrightarrow \chi_\Omega \in E$.
4. 測度有限な $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し, 定数 $C_\Omega > 0$ が存在して $\|f\chi_\Omega\|_{L^1} \le C_\Omega \|f\|_E$ $(f \in E)$ が成り立つ.

E_0, E_1, E_2, E_3 をそれぞれ Banach function space としよう. この時, 次の 2 条件を仮定する:

(i) E_1 と E_2 はそれぞれ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を稠密に含む.

(ii) ある定数 $C > 0$ が存在して $\|f * g\|_{E_0} \le \|f\|_{E_1}\|g\|_{E_2}$ $(f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ が成り立つ.

次に $M_p(\mathbb{R}^n)$ と $A_p(\mathbb{R}^n)$ を一般化した空間, $M(E_1, E_3)$ と $A(E_0 : E_1, E_2)$ を

$$M(E_1, E_3) = \{m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : T_m \in \mathcal{L}(E_1, E_3)\},$$

$$A(E_0 : E_1, E_2) = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in E_0 : \{f_j\}, \{g_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2} < \infty\right\}$$

$$\|f\|_{A(E_0:E_1,E_2)} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2} : f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j\right\}$$

で定義する. この時, $E_0 = C_0(\mathbb{R}^n)$, $E_1 = E_3 = L^p(\mathbb{R}^n)$, $E_2 = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ とすると $M(E_1, E_3) = M_p(\mathbb{R}^n)$, $A(E_0 : E_1, E_2) = A_p(\mathbb{R}^n)$ となることに注意しよう. $m \in M(E_1, E_3)$ に対し, $A(E_0 : E_1, E_2)$ 上の線形汎関数 φ_m を

$$\varphi_m(f) = \sum_{j=1}^{\infty} (T_m f_j) * g_j(0) \qquad \left(f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in A(E_0 : E_1, E_2)\right)$$

で定める. $\check{f}$ と $\tau_x f$ はそれぞれ $\check{f}(y) = f(-y)$ と $\tau_x f(y) = f(y - x)$ をあらわす. さらに次の 2 条件を考える:

(iii) 定数 $C > 0$ が存在して, $\|\check{f}\|_{E_k} \le C\|f\|_{E_k}$, $\|\tau_x f\|_{E_k} \le C\|f\|_{E_k}$ $(f \in E_k, x \in \mathbb{R}^n, k = 0,1,2,3)$ が成り立つ.

(iv) $\lim_{x\to 0} \|\tau_x f - f\|_{E_k} = 0$ $(f \in E_k, k = 0,1,2)$.

[7] の中で, 我々は次のことを示した.

定理 3.1. *E_0, E_1, E_2, E_3 を上で述べた条件 (i)-(iv) を満たす Banach function space とし, さらに $(E_2)^* = E_3$ を仮定する. この時, $m \in M(E_1, E_3)$ とすると $\varphi_m \in A(E_0 : E_1, E_2)^*$, $\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*} \sim \|m\|_{M(E_1,E_3)}$ が成り立つ. 逆に任意の $\varphi \in A(E_0 : E_1, E_2)^*$ に対し, ある $m \in M(E_1, E_3)$ が存在し $\varphi = \varphi_m$. この意味で $A(E_0 : E_1, E_2)^* \cong M(E_1, E_3)$.*

定理の証明の概略を述べる. 次の補題は認めることにする.

補題 3.2. *$m \in M(E_1, E_3)$ とする. この時, φ_m を*

$$\varphi_m(f) = \sum_{j=1}^{\infty} T_m f_j * g_j(0) \qquad \left(f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in A(E_0 : E_1, E_2)\right)$$

で定めると, φ_m は $A(E_0 : E_1, E_2)$ 上の線形汎関数となる.

定理 3.1 の証明： はじめに $m \in M(E_1, E_3)$ ならば $\varphi_m \in A(E_0 : E_1, E_2)^*$ と $\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*} \sim \|m\|_{M(E_1,E_3)}$ が成り立つことを示そう. $m \in M(E_1, E_3)$ とする. すると補題 3.2 から, φ_m が $A(E_0 : E_1, E_2)$ 上の線形汎関数となることが分かる. $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in A(E_0 : E_1, E_2)$ としよう. 条件 (iii) と $(E_2)^* \cong E_3$ から,

$$|\varphi_m(f)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} T_m f_j * g_j(0)\right| \le C\|m\|_{M(E_1,E_3)} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2}$$

が成り立つ. よって f の表現に対する下限を取ると,

$$|\varphi_m(f)| \le C\|m\|_{M(E_1,E_3)}\|f\|_{A(E_0:E_1,E_2)}$$

つまり $\varphi_m \in A(E_0 : E_1, E_2)^*$ と $\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*} \le C\|m\|_{M(E_1,E_3)}$ を得る. 逆の不等式 $\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*} \ge C'\|m\|_{M(E_1,E_3)}$ を得るために,

$$\|m\|_{M(E_1,E_3)} \le C \sup \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_m f(x)\, g(x)\, dx \right|$$

を用いる．ここで上限は $f,g\in\mathcal{S}$ で $\|f\|_{E_1}=\|g\|_{E_2}=1$ を満たすものに対して取る．よって任意の $\epsilon>0$ に対して $f_\epsilon, g_\epsilon\in\mathcal{S}$ で

$$\|f_\epsilon\|_{E_1}=\|g_\epsilon\|_{E_2}=1,\quad \text{and}\quad \|m\|_{M(E_1,E_3)}-\epsilon<C\left|\int_{\mathbb{R}^n}T_mf_\epsilon(x)\,g_\epsilon(x)\,dx\right|$$

を満たすものが取れる．条件 (iii) から，$f_\epsilon*\check{g}_\epsilon\in A(E_0:E_1,E_2)$ と $\|f_\epsilon*\check{g}_\epsilon\|_{A(E_0:E_1,E_2)}\le C\|f_\epsilon\|_{E_1}\|g_\epsilon\|_{E_2}$ が成り立つことが分かる．よって

$$\begin{aligned}\|m\|_{M(E_1,E_3)}&<C\left|\int_{\mathbb{R}^n}T_mf_\epsilon(x)\,g_\epsilon(x)\,dx\right|+\epsilon=C|T_mf_\epsilon*\check{g}_\epsilon(0)|+\epsilon\\&=C|\varphi_m(f_\epsilon*\check{g}_\epsilon)|+\epsilon\le C\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f_\epsilon*\check{g}_\epsilon\|_{A(E_0:E_1,E_2)}+\epsilon\\&\le C\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f_\epsilon\|_{E_1}\|g_\epsilon\|_{E_2}+\epsilon=C\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}+\epsilon.\end{aligned}$$

ϵ の任意性は $C\|\varphi_m\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\ge\|m\|_{M(E_1,E_3)}$ を与える．

次に任意の $\varphi\in A(E_0:E_1,E_2)^*$ に対し，$\varphi=\varphi_m$ を満たす $m\in M(E_1,E_3)$ が存在することを示そう．$\varphi\in A(E_0:E_1,E_2)^*$ とする．$f*g\in A(E_0:E_1,E_2)$ と $\|f*g\|_{A(E_0:E_1,E_2)}\le\|f\|_{E_1}\|g\|_{E_2}$ が任意の $f,g\in\mathcal{S}$ に対し成り立つことに注意しよう．よって $f\in\mathcal{S}$ を固定すると，$L_f(g)=\varphi(f*g)$ で定義される L_f は E_2 の稠密な部分空間 $\mathcal{S}$ 上の線形汎関数となる．φ の有界性は

$$|L_f(g)|\le\|\varphi\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f*g\|_{A(E_0:E_1,E_2)}\le\|\varphi\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f\|_{E_1}\|g\|_{E_2}$$

を与える．よって $L_f\in(E_2)^*$ と $\|L_f\|_{(E_2)^*}\le\|\varphi\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f\|_{E_1}$ が分かる．$(E_2)^*\cong E_3$ から，$h\in E_3$ で $\|h\|_{E_3}\sim\|L_f\|_{(E_2)^*}$ と

$$L_f(g)=\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\,g(x)\,dx\quad(g\in E_2)$$

を満たすものが取れる．この時 $\mathcal{S}$ から E_3 への作用素 T を $Tf=\check{h}$ により定める．T の定義と条件 (iii) から，

$$\|Tf\|_{E_3}=\|\check{h}\|_{E_3}\le C\|h\|_{E_3}\le C\|L_f\|_{(E_2)^*}\le C\|\varphi\|_{A(E_0:E_1,E_2)^*}\|f\|_{E_1}$$

が分かる．これは T が E_1 から E_3 への有界作用素であることをあらわす．次に T が平行移動と可換であることを示す．$(\tau_xf)*g=f*(\tau_xg)$ だから，

$$\varphi[(\tau_xf)*g]=L_{\tau_xf}(g)=\int_{\mathbb{R}^n}T[\tau_xf](-y)\,g(y)\,dy$$

と

$$\varphi[f*(\tau_xg)]=L_f(\tau_xg)=\int_{\mathbb{R}^n}[\tau_x(Tf)](-y)\,g(y)\,dy$$

は $T\tau_x f = \tau_x Tf$ を与える．よって $m \in \mathcal{S}'$ で $Tf = [\mathcal{F}^{-1}m] * f$ $(f \in \mathcal{S})$ を満たすものが存在する．T の有界性は $m \in M(E_1, E_3)$ を与える．この m が探していたもので，$\varphi = \varphi_m$ が成り立つ．

4 Lorentz space 上の Fourier multiplier

Lebesgue 可測関数 f に対し，分布関数 $\mu(f,s)$，再配列関数 $f^*(t)$，そしてその最大関数 $f^{**}(t)$ を

$$\begin{aligned}
\mu(f,s) &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}| \quad (s \geq 0), \\
f^*(t) &= \inf\{s > 0 : \mu(f,s) \leq t\} \quad (t \geq 0), \\
f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \quad (t > 0)
\end{aligned}$$

で定義する．この時，Lorentz space $L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{L^{(p,q)}} < \infty$ となる可測関数全体とする．ここで

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{(q/p)-1}(f^{**}(t))^q\,dt\right)^{1/q}, & 0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

定理 3.1 の Banach function space として Lorentz space を考えると次の定理を得る．

定理 4.1. $1 < p_k < \infty$, $1 \leq q_k < \infty$, $k = 0, 1, 2$ とする．$1/p_0 = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/q_0 \leq 1/q_1 + 1/q_2$ ならば，

$$A(L^{(p_0,q_0)}(\mathbb{R}^n) : L^{(p_1,q_1)}(\mathbb{R}^n), L^{(p_2,q_2)}(\mathbb{R}^n))^* \cong M(L^{(p_1,q_1)}(\mathbb{R}^n), L^{(p_2',q_2')}(\mathbb{R}^n))$$

が成り立つ．

References

[1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[2] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Amer. Math. Soc. Graduate Studies in Mathematics, 29, 2001.

[3] C. Fefferman, The multiplier problem for the ball, Ann. of Math. 94 (1972), 330-336.

[4] A. Figà-Talamanca, Translation invariant operators in L^p, Duke Math. J. 32 (1965), 495-501.

[5] R. Larsen, An Introduction to the Theory of Multipliers, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.

[6] S. G. Mihlin, Fourier integrals and multiple singular integrals, Vestnik Leningrad Univ., Ser. Matem. Meh. Astr. 7 (1957), 143-155.

[7] E. Nakai, N. Tomita and K. Yabuta, Extensions of Figà-Talamanca's multiplier theorem to Banach function spaces, submitted.