数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 70-77

あるBANACH 空間の間の補間定理について

日本大学・経済学部　松 岡 勝 男 (KATSUO MATSUOKA)
COLLEGE OF ECONOMICS OF NIHON UNIVERSITY

1. Introduction

1972 年に, C. Fefferman and E. M. Stein [FS] は Hardy 空間

$$H^p = H^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \text{harmonic in } \mathbb{R}^{n+1}_+, f^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |f(y,t)| \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

$(0 < p < \infty)$ に関して, $(\cdot,\cdot)_{[\theta]}$ $(0 < \theta < 1)$ で示される複素補間空間 (see [BL]) についての次の結果を示した.

Theorem 1. $1 < p_1 < \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき,

$$\left(H^1, L^{p_1}\right)_{[\theta]} = L^p.$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = 1 - \theta + \dfrac{\theta}{p_1}$. また, $1 < p_0 < \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき,

$$(L^{p_0}, BMO)_{[\theta]} = L^p.$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$.

この Theorem 1 の corollary として, 次の H^1 と L^p の間の補間定理および L^p と BMO の間の補間定理が得られる (see [FS], [GR] and [S]).

Corollary 2. $1 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : H^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$$

そして

$$T : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $1 < p < p_1$ に対して,

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

boundedly.

Corollary 3. $1 < p_0 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$$

そして

$$T : L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to BMO$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < \infty$ に対して,

$$T : L^{p}(\mathbb{R}^n) \to L^{p}(\mathbb{R}^n)$$

boundedly.

本講演の目的は, Corollary 3 の analog を用いて, Corollary 2 の analog を示すことである.

2. Preliminaries

最初に, Beurling algebra A^p と 関数空間 B^p の定義を述べる (see [B], [CL], [F] and [G]) が, これらは次の non-homogeneous Herz 空間 $K_q^{\alpha,p}$ の特別な場合である (see [HY] and [H]).

$k \in \mathbb{Z}$ に対して, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $C_k = B_k \backslash B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{C_k}$ を定義する. ここで, χ_{C_k} は C_k の characteristic function である. また, $\tilde{\chi}_k = \chi_k$ if $k \in \mathbb{N}$, そして $\tilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$ とする.

Definition 4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,p} = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\tilde{\chi}_k\|_q^p \right\}^{1/p} < \infty \right\};$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,\infty} = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,\infty}} = \sup_{k \geq 0} 2^{k\alpha} \|f\tilde{\chi}_k\|_q < \infty \right\}.$$

Definition 5. $1 < p < \infty$ のとき,

$$A^p = K_p^{n(1-1/p),1} = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn/p'} \|f\tilde{\chi}_k\|_p < \infty \right\}.$$

ただし, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

$$B^p = K_p^{-n/p,\infty} = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{k \geq 0} 2^{-kn/p} \|f\tilde{\chi}_k\|_p < \infty \right\}.$$

次の定義は, A^p 空間と B^p 空間の同値なもう一つの定義である (see [CL] and [G]).

Definition 6. $1 < p < \infty$ とするとき,

$$A^p = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \inf_{\omega \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^{-(p-1)} dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

ただし, Ω は positive, radial, $|x|$ に関して nonincreasing, そして

$$\omega(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$$

である $\mathbb{R}^n$ 上の関数 ω の class である;

$$B^p = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ここで (および 以下において), $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ は 中心 0, 半径 $R > 0$ の open ball を表すとする.

次に, Hardy 空間 HA^p と 関数空間 CMO^p の定義を述べる (see [CL] and [G]).

Definition 7. $1 < p < \infty$ とする. このとき, Hardy 空間 HA^p associated to A^p を

$$HA^p = \{ f \in A^p : f \text{ real}, \quad f^* \in A^p \}$$

で定義する. ただし, f^* は f の Poisson 積分 の nontangential maximal 関数, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f^*(x) = \sup_{|y-x|<t} \left| c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x') \frac{t}{(t^2 + |x'|^2)^{(n+1)/2}} dx' \right|, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}},$$

である. また, norm $\|\cdot\|_{HA^p}$ を

$$\|f\|_{HA^p} = \|f^*\|_{A^p}$$

で定義する.

Definition 8. $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が central mean oscillation of order p の関数の class , CMO^p, に属するとは,

$$\|f\|_{CMO^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x) - m_R(f)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすことである. ただし,

$$m_R(f) = \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} f(x) dx$$

である.

このとき, $1 < p < \infty$ に対して,

$$CMO^p \supset B^p$$

であり, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$L^1 \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \supset A^{p_1} \supset A^{p_2},$$

$$B^{p_1} \supset B^{p_2} \supset L^\infty(\mathbb{R}^n),$$
$$H^1 \cap A^{p_1} \supset HA^{p_1} \supset HA^{p_2}$$

そして

$$CMO^{p_1} \supset CMO^{p_2} \supset BMO$$

である.

さらに, 次の duality theorem が成り立つ (see [CL], [G] and [HY]).

Theorem 9. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, where $p' = \infty$ if $0 < p \le 1$, のとき,

$$\left(K_q^{\alpha,p}\right)^* = K_{q'}^{-\alpha,p'}.$$

Corollary 10. $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(A^p)^* = B^{p'}.$$

Theorem 11. $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(HA^p)^* = CMO^{p'}.$$

また, sharp 関数 $f^\sharp$ に関して, sharp maximal theorem の analog が成り立つ.

Definition 12. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ を open ball として,

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$$

とするとき, sharp 関数 $f^\sharp$ を

$$f^\sharp(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する.

Theorem 13 ([M$_1$]). $1 < p < \infty$ のとき,

$$f \in B^p \Longrightarrow f^\sharp \in B^p$$

であり,

$$\|f^\sharp\|_{B^p} \le C_p \|f\|_{B^p}$$

である. ただし, C_p は n と p だけに depend.

Theorem 14 ([K]). $1 < p < \infty$ のとき,

$$f \in CMO^p \Longrightarrow f^\sharp \in B^p$$

であり,

$$\|f^\sharp\|_{B^p} \leq C_p \|f\|_{CMO^p}.$$

ただし, C_p は n と p だけに depend.

Theorem 15 ([K] and [M_3]). $1 < p < \infty$ のとき, some $1 < p_0 < p$ に対して, $f \in L^{p_0}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ならば,

$$f^\sharp \in B^p \Longrightarrow f \in CMO^p$$

であり,

$$\|f\|_{CMO^p} \leq C_p \|f^\sharp\|_{B^p}.$$

ただし, C_p は n と p だけに depend.

3. Interpolation theorems

最初に, C. Fefferman and E. M. Stein の L^p と BMO の間の補間定理 (Corollary 3) の analog について述べる.

Theorem 16 ([M_2] and [M_4]). $1 < p_0 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \to B^{p_0}$$

そして

$$T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < \infty$ に対して,

$$T : B^p \to CMO^p$$

boundedly.

また, Theorem 16 と同様にして, 次の 3 つの補間定理が得られる.

Theorem 17 ([M_4]). $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \to B^{p_0}$$

そして

$$T : B^{p_1} \to CMO^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < p_1$ に対して,

$$T : B^p \to CMO^p$$

boundedly.

Theorem 18 ([K]). $1 < p_0 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \to CMO^{p_0}$$

そして

$$T : L^\infty \to BMO$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < \infty$ に対して,

$$T : B^p \to CMO^p$$

boundedly.

Theorem 19 ([M_4]). $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \to CMO^{p_0}$$

そして

$$T : B^{p_1} \to CMO^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < p_1$ に対して,

$$T : B^p \to CMO^p$$

boundedly.

次に, Theorem 16 を用いて, C. Fefferman and E. M. Stein の H^1 と L^p の間の補間定理 (Corollary 2) の analog を示す.

Theorem 20. $1 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : H^1 \to L^1(\mathbb{R}^n)$$

そして

$$T : A^{p_1} \to A^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $1 < p < p_1$ に対して,

$$T : HA^p \to A^p$$

boundedly.

Proof of Theorem 20. 証明は [FS] に similar.

S を T の adjoint とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(Sg)(x)dx.$$

このとき, $g \in B^{p_1{}'}$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_1{}'} = 1$, に対して,

$$(*) \qquad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(Sg)(x)dx$$

は bounded linear functional on A^{p_1} であり, A^{p_1} - $B^{p_1{}'}$ duality により, $Sg \in B^{p_1{}'}$ となり,

$$\|Sg\|_{B^{p_1{}'}} \le A\|g\|_{B^{p_1{}'}}.$$

また, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $(*)$ は bounded linear functional on H^1 であり, H^1 - BMO duality により, $Sg \in BMO$ となり,

$$\|Sg\|_{BMO} \leq A\|g\|_{L^\infty}.$$

よって, Theorem 16 を用いると, ${p_1}' < \forall p' < \infty$ に対して,

$$\|Sg\|_{CMO^{p'}} \leq C\|g\|_{B^{p'}} \quad (g \in B^{p'}).$$

故に, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ として, $1 < \forall p < p_1$ に対して,

$$\|Tf\|_{A^p} \leq C\|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

□

さらに, Theorem 20 と同様の証明により, Theorem 17 〜 Theorem 19 を用いて, 次の 3 つの補間定理をそれぞれ示すことができる.

Theorem 21. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : HA^{p_0} \to A^{p_0}$$

そして

$$T : A^{p_1} \to A^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < p_1$ に対して,

$$T : HA^p \to A^p$$

boundedly.

Theorem 22. $1 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : H^1 \to L^1(\mathbb{R}^n)$$

そして

$$T : HA^{p_1} \to A^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $1 < p < p_1$ に対して,

$$T : HA^p \to A^p$$

boundedly.

Theorem 23. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : HA^{p_0} \to A^{p_0}$$

そして

$$T : HA^{p_1} \to A^{p_1}$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < p_1$ に対して,

$$T : HA^p \to A^p$$

boundedly.

REFERENCES

[BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[B] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 1–32.

[CL] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, J. Func. Anal., **84** (1989), 255–278.

[FS] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., **129** (1972), 137–193.

[F] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space, Proceedings, Conference at Cortona 1984, Sympos. Math., **29** (1987), 267–301.

[G] J. Garcia-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, J. London Math. Soc. (2), **39** (1989), 499–513.

[GR] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[HY] E. Hernández and D. Yang, Interpolation of Herz spaces and applications, Math. Nachr., **205** (1999), 69–87.

[H] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech., **18** (1968), 283–324.

[K] Y. Komori, Notes on interpolation theorem between B^p and BMO, Scientiae Mathematicae Japonicae, **60** (2004), 107–111.

[M_1] K. Matsuoka, On the sharp function on Banach spaces B_0^p, Research Bulletin of Nihon Daigaku Keizaigaku Kenkyukai, **30** (2000), 129–134.

[M_2] K. Matsuoka, Interpolation theorem between B_0^p and BMO, Scientiae Mathematicae Japonicae, **53** (2001), 547–554.

[M_3] K. Matsuoka, Remark on the sharp function on Banach spaces B^p, Research Bulletin of Nihon Daigaku Keizaigaku Kenkyukai, **47** (2004), 47–51.

[M_4] K. Matsuoka, Interpolation theorems related to CMO^p spaces, to appear.

[S] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.