数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 126-132

零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について

田島慎一 (S. Tajima)
新潟大学工学部情報工学科
DEPARTMENT OF INFORMATION ENGINEERING, NIIGATA UNIV.

1 序

孤立特異点を持つような超曲面を扱う際，Jacobi イデアル等の標準基底の計算や, メンバーシップ問題を解くことで具体的な解析を展開していくことが多い. 定義方程式がパラメータを含まない多項式である場合, Mora , Lazard, Gräbe らの標準基底アルゴリズムを用いて種々の計算を行うことができる. それに比べ, 定義多項式がパラメータを含むような場合にこれらの計算を実際に行おうとすると, 様々な困難に直面する.

本稿では, Grothendieck 双対性に注目し, 従来とは異なる観点から零次元イデアルに対するこれらの問題を扱うことを提案する. 代数的局所コホモロジーを利用するこの計算手法は, パラメータを含むような問題に対しても有効である. この研究のそもそもの動機は, 孤立特異点に付随して定義される D 加群の具体的な構成やその解析を行うことにあったので, ここでは対象とする零次元イデアルは Jacobi イデアルであるとして話を進めていく. 実際には, socle がたくさんあるような一般の零次元イデアルにたいしても議論が同様に展開できることを注意しておく.

2 Grothendieck local duality

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X で定義された正則関数 $f(x)$ であり, 原点を孤立特異点として持つものが与えられたとする. X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し, その原点における茎を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す. 正則関数 $f(x)$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ 上生成するイデアルを $\mathcal{I}_O$ とおく. 原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の要素であり, イデアル $\mathcal{I}_O$ により annihilate されるもの全体を考え, それを $\mathcal{H}_f$ とおく.

$$\mathcal{H}_f = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\eta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\eta = 0\}$$

X 上の正則 n 形式全体のなす層を Ω^n_X で表し, その原点での茎を $\Omega^n_{X,O}$ とおく. このとき,

$$\mathcal{H}_f \otimes \Omega^n_{X,O} \cong \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_O, \Omega^n_{X,O})$$

となることから, $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_O$ と $\mathcal{H}_f$ の間の非退化な pairing, 即ち, Grothendieck residue pairing

$$\mathrm{Res}_O(\ ,\ ) : \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_O \times \mathcal{H}_f \longrightarrow \mathbb{C}$$

が存在することが従う. 但し, ここで, 微分形式 $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ を固定することで, $\mathcal{H}_f$ と $\mathcal{H}_f \otimes \Omega^n_{X,O}$ を同一視している.

さてここで, ベクトル空間 $\mathcal{H}_f$ が具体的に与えられていると仮定し, Residue pairing の非退化性を次の様に言いかえる.

命題 2.1 $p(x) \in \mathcal{O}_{X,O}$ とする. このとき,

$$\mathrm{Res}_O(p(x), \eta) = 0,\ \forall \eta \in \mathcal{H}_f$$

は, $p(x) \in \mathcal{I}_O$ となる必要十分条件である.

ベクトル空間 $\mathcal{H}_f$ により, イデアル $\mathcal{I}_O$ が特徴付けられることになる.

補足 位相ベクトル空間論の観点から述べると, 代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ は, 関数空間として, 形式冪級数のなす空間 $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ の双対ベクトル空間であり, $\mathcal{O}_{X,O}$ の双対ベクトル空間は局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_O(\mathcal{O}_X)$ である. 従って, 上記の命題で $p(x)$ は正則関数としてあるが, 形式冪級数に置き換えても同様の結果が成り立つ.

特に, $\mathcal{H}_f$ の基底 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ が与えられているとすれば, $p(x) \in \mathcal{I}_O$ となる必要十分条件は, 連立一次方程式

$$\mathrm{Res}_O(p(x), \eta_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \mu$$

の形に書き下せる. 一般に, Grothendieck loca residue

$$\mathrm{Res}_O(p(x), \eta) = \mathrm{Res}_O(p(x)\eta dx)$$

は, $p(x)$ に微分作用素として作用する. 従って, 命題2.1を用いると, イデアルメンバーシップ問題の答えは, $p(x)$ の原点における高階の偏微分係数に関する μ 個の線形の関係式として与えられることになる.

3 Algebraic local cohomology

一般に, 原点に台を持つ局所コホモロジーは, $U_i = \{x \in X \mid x_i \neq 0\}, i = 1, 2, \ldots, n$ と X から成る標準的被覆 $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, X\}$ に関する relative Čech cohomology を用いて表現することが出来る. 特に, 有理関数 $\dfrac{1}{x^\lambda}$ が自然に定める relative Čech cohomology 類を $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ に属する代数的局所コホモロジー類と同一視して, $[\dfrac{1}{x^\lambda}] \in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ で表す (ここで, $\lambda \in \mathbb{N}^n$). この記号を用いると, 原点に台を持つような代数的局所コホモロジー類 $\eta \in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ はすべて, $\sum_\lambda c_\lambda[\frac{1}{x^\lambda}]$ なる形の有限和で表すことが出来る.

さて, 代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ は, $\mathcal{O}_X$ 加群の構造

$$\mathcal{O}_X \times H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$$

をもつことに注意する. 例えば, 代数的局所コホモロジー $[\frac{1}{x^\lambda}]$ に x^κ を掛けると, 相対コホモロジー群の定義より

$$x^\kappa[\frac{1}{x^\lambda}] = \begin{cases} [\frac{1}{x^{\lambda-\kappa}}] & \lambda > \kappa, \\ \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を得る. 但し, ここで $\lambda > \kappa$ は $\lambda = (l_1, l_2, ..., l_n), \kappa = (k_1, k_2, ..., k_n)$ とすると, $i = 1, 2, ..., n$ に対し $l_i > k_i$ が成り立つこととする.

以下, 代数的局所コホモロジー類の表現として, この標準的被覆による relative Čech cohomology を用いる.

例 1　E_7 特異点. 定義多項式は $f(x, y) = x^3 + xy^3$ である. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^3, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$ より,

$$[\frac{1}{xy}], [\frac{1}{xy^2}], [\frac{1}{x^2y}], [\frac{1}{xy^3}], [\frac{1}{x^2y^2}] \in \mathcal{H}_f$$

を直ちに得る. 但し, [　] は *relative Čech cohomology* 類を表す. 更に

$$[\frac{1}{xy^4}] - \frac{1}{3}[\frac{1}{x^3y}], [\frac{1}{xy^5}] - \frac{1}{3}[\frac{1}{x^3y^2}] \in \mathcal{H}_f$$

も容易に確かめられる. これら 7 つのコホモロジー類は $\mathcal{H}_f$ の基底をなす.

いま, $p(x, y) = \sum p_{i,j}x^iy^j \in \mathcal{O}_{X,O}$ とする. 条件

$$\mathrm{Res}_O(p(x), \eta) = 0, \ \forall \eta \in \mathcal{H}_f$$

を書き下すことで, $p(x, y) \in \mathcal{I}_O$ となる必要十分条件

$$p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,0} = p_{0,2} = p_{1,1} = 0,$$

$$p_{0,3} - \frac{1}{3}p_{2,0} = 0, p_{0,4} - \frac{1}{3}p_{2,1} = 0,$$

を得る. これらを用いれば, 標準基底あるいは *Gröbner* 基底の計算も容易である.

4　計算法

原点 O を孤立特異点として持つ有理数係数多項式 f が与えられたとする. Jacobi イデアルに対応する代数的局所コホモロジーの計算, メンバーシップ問題と標準基底の計算への応用に関しその概略を与える.

有理数係数の多項式環を $K[x]$ で表す.

$$H^n_{[O]}(K[x]) = \lim_{k\to\infty} Ext^n_{K[x]}(K[x]/(x_1, x_2, ..., x_n)^k, K[x])$$

に対し, ベクトル空間

$$H_f = \{\eta \in H^n_{[O]}(K[x]) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\eta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\eta = 0\}$$

の基底を求める方法を考える.

まず最初に, $\sigma = [\frac{1}{x^\lambda}] \in H^n_{[O]}(K[x])$ であり, H_f に属するものを全て求め,

$$\Lambda_M = \{\lambda \in \mathbb{N}^n \mid [\frac{1}{x^\lambda}] \in H_f\}$$

とおく. ここで, $\sigma \in H_f$ なる条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

は, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ の展開に現れるような単項式 x^κ すべてに対し, $x^\kappa\sigma = 0$ が成り立つ事と同値であるので, Λ_M が簡単に求まることを注意しておく.

次に, 2 つ以上の項の線形結合からなるような代数的局所コホモロジーで, H_f に属するものを求めていく. アルゴリズミックに求める為に, $H^n_{[O]}(K[x])$ に項順序を定めておく. H_f に属する代数的局所コホモロジーであり, この項順序に関しその主項が小さいようなものから順に, 逐次求めていくことで基底を構成していくことを考える. 主項の係数は 1 としてよい.

いま, H_f の基底をあたえるような代数的局所コホモロジーの組のうち, その主項のちいさい方から k 個分, 既に求めてあるとする. それらを $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s, \eta_{s+1}, .., \eta_k$ とおく. 但し, $s = \sharp\Lambda_M$ である. 主項はそれぞれ $[\frac{1}{x^{\lambda_1}}], [\frac{1}{x^{\lambda_2}}], ..., [\frac{1}{x^{\lambda_k}}]$ であるとし,

$$E_k = \mathrm{Span}_K(\sigma_1, \sigma_2, ..\sigma_s, \eta_{s+1}, ..., \eta_k)$$

とおく.

H_f の基底の $k+1$ 番目の構成要素となるような, モニックな代数的局所コホモロジー

$$\eta = [\frac{1}{x^\lambda}] + \sum_{\nu\in N} c_\nu [\frac{1}{x^\nu}]$$

を考える. ここで, $N \cap \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\} = \phi$ としてよい.

次の補題に注目する.

補題 4.1 $\eta \in H_f$ とする. このとき, $x_1\eta, x_2\eta, ..., x_n\eta \in H_f$ が成り立つ.

この補題を用いると，いま求めている $k+1$ 番目の代数的局所コホモロジー η は $x_1\eta, x_2\eta, ..., x_n\eta \in E_k$ を満たすことが分かる．このことに注目すれば，η の主項およびその低階項が満たさなければならない条件を得る．これらの事を利用することで，$\eta \in H_f$ の条件として

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\eta = 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

のみを用いるより，計算効率のよいアルゴリズムを導くことが出来る．

さて，イデアル I_O は Gorenstein-Artin であるので，条件 $\det(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})\eta \neq 0$ を満たす $\eta \in H_f$ を求めた時点で，基底の構成が完了する．

注意 対象とする零次元イデアルが Gorenstein-Artin でないような，一般の零次元イデアルである場合，補題 4.1 に着目することで，計算の終了判定条件を導ける．

注意 この構成法では，$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ から直接 H_f を構成しており，イデアル $I = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)) \subset K[x]$ の準素イデアル分解等を求める必要が無い点に注意されたい．

注意 既に構成してある $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k$ のみの情報から $k+1$ 番目の代数的局所コホモロジー η が低階項も込めてすべて求まってしまうような場合もある．このような η 達は，ある意味，イデアル論的には新たな関係を含んでいないことになり，イデアル I_O の標準基底を計算する際は考慮しなくてよい代数的局所コホモロジーということになる．この点に注目すると標準基底計算の効率化が図れる．

さて，ベクトル空間 H_f の基底 $\{\sigma_1, ..., \sigma_s, \eta_{s+1}, .., \eta_\mu\}$ は構成済みであるとする．この基底の展開式に現れるような代数的局所コホモロジー $[\dfrac{1}{x^\lambda}]$ の指数となる $\lambda \in \mathbb{N}^n$ すべてが作る集合を考え，それを Λ_f とおく．また，

$$K_f = \{\kappa \in \mathbb{N}^n \mid \kappa + (1, 1, ..., 1) \in \Lambda_f\}$$

と定める．

補題 4.2 $\kappa \in \mathbb{N}^n$ は，$\kappa \notin K_f$ を満たすとする．この時，$x^\kappa \in I_O$ が成り立つ．

従って，$p(x) \in \mathcal{O}_{X,O}$ が与えられたとき，$p(x) \in I_O$ となる条件は，$p(x)$ を

$$p(x) = \sum_{\alpha \in K_f} p_\alpha x^\alpha + \sum_{\beta \notin K_f} p_\beta x^\beta$$

とおくとき，$\sum_{\alpha \in K_f} p_\alpha x^\alpha$ のみで決まることになる．ここで，$\alpha \in \Lambda_M$ であり，$p_\alpha \neq 0$ なるものが存在すれば，$p(x) \notin I_O$ となる事等も明らかである．すべての $\alpha \in \Lambda_M$ に関し $p_\alpha = 0$ が満たされる場合は，$p(x) \in I_O$ なる条件は

$$\mathrm{Res}_O(\sum_{\alpha \in K_f - \Lambda_M} p_\alpha x^\alpha, \eta_i) = 0,\ i = s+1, ..., \mu$$

で与えられることになる．この様に，H_f の基底を利用すれば，Grothendieck 双対定理により membership 問題を解くことができ，更に標準基底を求めることもできる．

5 あとがき

イデアルの問題を扱う際に双対性に注目するという考え方自体は，既に，Macaulay の Inverse system の理論に見ることができる．最近，計算機代数の分野では，Gröbner duality の名のもとで，双対性に基づいた研究やアルゴリズムの導出への応用が行われている．本稿でも述べたように，これらの双対性は，多変数留数と深く係わっている．従って，零次元イデアルの場合は特に，Grothendieck local residues の概念を用いることで，双対性に係わる問題の定式化や解析，アルゴリズムの導出等を行うことが自然であると思われる．実際，代数的局所コホモロジーの概念を用いると，イデアルがパラメータを含むような場合であってもメンバーシップ問題や標準基底の計算を扱うことが可能となる．更に，D 加群の理論も自然な形で適用することが出来るようになる．

本稿は，基本的事項の説明に終始しており，計算アルゴリズムに関して十分な説明を与えることができなかった．アルゴリズムの導出，計算例等に関しては，稿をあらためて説明することとしたい．

参考文献

[1] A. M. Dickenstein and C. Sheja, *Duality methods for the membership problem*, Progress in Math. **94** (1991), 89–103.

[2] J. Emsalem, *Géométrie des points épais*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 399–416.

[3] H-G, Gräbe, *The tangent cone algorithm and homogenization*, J. Pure and Applied Alg **97** (1994), 303–312.

[4] H. Grassmann, G.-M. Greuel, B. Martin, W. Neumann, G. Pfister, W. Pohl, H. Schönemann and T. Siebert, *On an implementation of standard bases ans syzygies in SINGULAR*, Applicable Algebra in Eng. Commun. and Comp. **7** (1996), 235–249.

[5] W. Gröbner, Algebraische Geometrie II, Hochschultaschenbücher, 1970.

[6] A. Grothendieck, *Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents.* Séminaire Bourbaki **149**, Paris, 1957.

[7] A. Grothendieck, Local Cohomology, Lecture Notes in Math. **41** (1967), Springer.

[8] A. Iarrobino. *Associated graded algebra of a Gorenstein Artin algebra*, Memoires of AMS. **514** (1994)

[9] M. Kashiwara: *On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10**(1975), 563–579.

[10] A. G. Kouchnirenko. *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32** (1976), 1–31.

[11] D. LAZARD, *Gröbner bases, Gaussian elimination, and resolution of systems of algebraic equations*, Lecture Notes in Comp. Sci. **162** (1983), 146–156.

[12] M.G. MARINARI, H.M. MÖLLER, AND T. MORA, *Gröbner bases of ideals given by dual bases*, Proceedings of ISSAC 91, (1991), 55–63.

[13] A. MONTES, *A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters*, J. Symbolic Comput. **33** (2002), 183–208.

[14] H.M. MÖLLER, *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms*, Lect. Notes in Comp. Sci. **673** (1993), 43–56.

[15] H. M. MÖLLER AND H. J. STETTER, *Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems*, Numer. Math. **70** (1995), 311–329.

[16] B. MOURRAIN, *Isolated points, duality and residues*, J. Pure and Appl. Alg. **117&118** (1997), 469–493.

[17] Y. NAKAMURA AND S. TAJIMA, *A study of semiquasihomogeneous singularities by using holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1233** (2001), 51–66.

[18] 中村弥生, *A study of bimodal exceptional singularities with holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1239** (2001), 69–83.

[19] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *Unimodal singularities and differential operators*, Séminaires et Congrès **10** Société Mathématique de France, (2005), 191–208.

[20] Y. NAKAMURA AND S. TAJIMA, *On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities*, preprint.

[21] 中村弥生, 田島慎一, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 京都大学数理解析研究所講究録 「超局所解析とその周辺」掲載予定.

[22] 田島慎一, 多変数補間問題とホロノミック D 加群, 千葉大学数学セミナリーノート **3** (1999), 73–94.

[23] 田島慎一, 零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録 「方程式系の超局所解析と漸近解析」, 掲載予定.

[24] 田島慎一, 中村弥生: Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録 **1352** (2003), 1–10.

[25] 田島慎一: 零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1395** (2004), 57–63.

[26] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities*, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 1–10.

[27] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities*, preprint.

[28] V. WEISPFENNING, *Comprehensive Gröbner bases*, J. Symbolic Comput. 14 (1992), 1–29.