数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 220-221

Calculation of Groebner Basis with Parametric Coefficients or Indeterminante Exponents

高橋 正，長坂 耕作（神戸大学・発達科学部）
E-mail: takahasi@kobe-u.ac.jp, nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

Abstract

特異点定義方程式には，同じ位相型をまとめて表示できるものがある．それらの定義方程式は，変数及びべきにパラメータをもつ．その定義方程式と，各変数で偏微分した方程式からなる方程式系のグレブナー基底を計算し，パラメータ変数及びパラメータべきの条件（その位相型が保たれる条件）を求める方法について示す．

1 はじめに

I_n^* 型特異点は，$\mathbf{C}^4$ における complete intersection と呼ばれる特異点（複数の方程式で定義される特異点）である．n は，2 以上の整数であり，かつ，偶数である．その定義方程式は，以下のようになる．

$$x(y-z)+w^3=0, \quad y(x-z)+ww^{\frac{n+2}{2}}=0$$

この特異点定義方程式と，各変数で偏微分した方程式から成るイデアルのグレブナー基底を求めるには，以下のように計算する（Mathematica を使用）．

$curve1 := x(y-z)+w^3;$
$curve2[n\_] := y(x-z)+ww^{\frac{n+2}{2}};$
$curve-ideal[n\_] := \{curve1,\ \partial_x curve1,\ \partial_y curve1,\ \partial_z curve1,\ \partial_w curve1,$
$\quad curve2[n],\ \partial_x curve2[n],\ \partial_y curve2[n],\ \partial_z curve2[n], \partial_w curve2[n]\}$
GB-curve-ideal[n_] := GroebnerBasis[curve-ideal[n], w, x, y, z]

GB-curve-ideal[n]
計算の結果は，

$$\{\ x,\ y,\ z,\ 4w^{\frac{2+n}{2}}+nw^{\frac{2+n}{2}},\ \ w^{\frac{4+n}{2}},\ w^2\}$$

となり，n が 2 以上の整数の時，原点が孤立特異点になることが分かる．

これは簡単な場合であるが，一般には， complete intersection のグレブナー基底計算は，イデアルを構成する定義方程式の数が増えるため複雑になる．我々は，他にもいくつかの complete intersection のグレブナー基底計算を行った．

2 グレブナー基底計算のニュートン境界の構成

超曲面孤立特異点の定義方程式に関しても（イデアルを構成する方程式が少ない場合でも），変数及びべきにパラメータをもつ場合には，その計算が有限回で終わらない場合がある．以下にその例を示す（この定

義方程式は，単純 K3 特異点の定義方程式である）．

curve-ideal[k, p, q]
$\{\ qw^{42}+w^{42+k}+x^2+y^3+wxyz+pw^6z^6+z^7,\ 2x+wyz,\ 3y^2+wxz,\ wxy+6pw^6z^5+7z^6,$
$42qw^{41}+(42+k)w^{41+k}+xyz+6pw^5z^6\ \}$

この場合，定義方程式を以下のようにとることで，グレブナー基底計算が有限回で終える．

curve[k_, p_, q_] := $x^2+y^3+z^7+xyzw+pz^6w^6+qw^{41+k}$
curve-ideal[k_ , p_ , q_] :=
{ curve[k, p, q], ∂_x curve[k, p, q], ∂_y curve[k, p, q], ∂_z curve[k, p, q], ∂_w curve[k, p, q] }
curve-ideal[k, p, q]

計算結果は以下のようになる（この計算結果は簡約ではない）．

$g_1 = x+\frac{wyz}{2}$

$g_2 = y^2-\frac{1}{6}w^2yz^2$

$g_3 = -\frac{1}{504}w^6yz^5+\frac{6}{7}pw^6yz^5+yz^6$

$g_4 = w^4yz^3-72pw^6z^5-84z^6$

$g_5 = \frac{41w^{40+k}y}{41+k}+\frac{kw^{40+k}y}{41+k}-\frac{41w^{42+k}z^2}{6(41+k)}-\frac{kw^{42+k}z^2}{6(41+k)}+\frac{2952pw^{42+k}z^2}{41+k}+\frac{72kpw^{42+k}z^2}{(41+k}-\frac{pw^7z^8}{(41+k)q}+\frac{432p^2w^7z^8}{(41+k)q}$

$g_6 = -\frac{35}{6}qw^{41+k}-\frac{1}{6}kqw^{41+k}+z^7$

$g_7 = -\frac{5pw^{48+k}z^4}{72(41+k)}-\frac{kpw^{48+k}z^4}{504(41+k)}+\frac{30p^2w^{48+k}z^4}{41+k}+\frac{6kp^2w^{48+k}z^4}{7(41+k)}-\frac{41w^{42+k}z^5}{504(41+k)}-\frac{kw^{42+k}z^5}{504(41+k)}+\frac{492pw^{42+k}z^5}{7(41+k)}+$
$\quad\frac{12kpw^{42+k}z^5}{7(41+k)}+\frac{41w^{36+k}z^6}{41+k}+\frac{kw^{36+k}z^6}{41+k}$

$g_8 = -\frac{1225pw^{52+k}z}{432(41+k)}-\frac{35kpw^{52+k}z}{216(41+k)^2}-\frac{k^2pw^{52+k}z}{432(41+k)^2}+\frac{1225p^2w^{52+k}z}{(41+k)^2}+\frac{70kp^2w^{52+k}z}{(41+k)^2}+\frac{k^2p^2w^{2+k}z}{(41+k)^2}-\frac{1435w^{46+k}z^2}{432(41+k)^2}$
$\quad-\frac{19kw^{46+k}z^2}{108(41+k)^2}-\frac{k^2w^{46+k}z^2}{432(41+k)^2}+\frac{2870pw^{46+k}z^2}{(41+k)^2}+\frac{152kpw^{46+k}z^2}{(41+k)^2}+\frac{2k^2pw^{46+k}z^2}{(41+k)^2}+\frac{1681w^{40+k}z^3}{(41+k)^2}+$
$\quad\frac{82kw^{40+k}z^3}{(41+k)^2}+\frac{k^2w^{40+k}z^3}{(41+k)^2}$

$g_9 = w^{41+k}$

この２つの違いは，定義方程式のニュートン境界の構成による．

我々は，これらの例を基に変数及びべきにパラメータをもつ場合のグレブナー基底を計算するためのプログラムを Mathematica で作成している．