数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 19-26

極端な情報系下のヘッジ戦略について

鍛治俊輔

平成17 年1 月28 日

1 Introduction

非流動的資産を担保にしたABS(Asset Backed Security) の評価とヘッジ戦略を扱う。ある資産市場が存在せず、その流動性を見込めない資産を証券化するにあたり、それを担保として引き受けた特別目的会社SPV(Special purpose vehide) はまず投資家から資金を調達し、満期にはキャッシュフローを投資家に還元することにする。このとき支払い優先順位の差をつけて証券を発行するが、まずはシニア債、そして残りは劣後債としている。証券を買った投資家は金利リスクと破産リスクを抱えてしまうので割引国債を使ってヘッジしようと試みることにする。そこでシニア債や劣後債を担保資産に対するヨーロピアンオプションと認識する。詳しく言うとこうである;

非流動的資産の証券化に関する構造は、担保資産から生ずるキャッシュフローに対して投資家が優先権を持つシニア部分とその残りを受け取る劣後部分からなるものとする。担保資産が破産したときに劣後部分がシニア部分よりも先に受け止めなくてはならず、劣後部分はシニア部分に対する信用補完として構成されている。SPV (特別目的会社) がシニア債投資家に対して支払いができなくなったとき、つまり満期 T における担保資産の価値 Γ が信用補完額 K を下回ったときシニア債は破産したとされることから、それはヨーロピアンオプション $min\{\Gamma, K\}$ であり、劣後債は $max\{\Gamma-K,0\}$ と解釈できる。

デリバティブの問題としてそのヘッジ戦略を求める手法をとるが、担保資産に関する情報を投資家にSPV が開示するかしないかでヘッジ戦略も変わってくる、つまり担保資産の破産情報を各時点で開示するかある時点のみで開示するかで異なってくるだろう。本論文では満期のみで開示する設定を考えている。このとき不完備市場になることが明らかにされる。一般に不完備市場ではヘッジ戦略は一意的に決まらず何か整合性のある最適戦略をとることになるが、今回はFollmer and Sondermann[1] が提案したRisk-Minimizing strategy を採用した。この戦略をとることにより、我々はシニア債や劣後債に対するヘッジ戦略を具体的に得ることができた。

2 Risk-Minimization

リスク資産価格過程に対する同値マルチンゲール測度 (E.M.M) が存在し、かつ完備市場下では条件付請求権のヘッジ戦略や価格も決まる。しかし不完備市場では一意に決まらない。Follmer and Sondermann[1] では"Risk-Minimization"の概念を紹介している。彼らはリスク資産価格過程が連続2乗可積分マルチンゲールとして条件付請求権を複製しようとするときに伴うリスクを最小化する戦略を見つけ、それを"Risk-Minimizing strategy"と呼んでいる。Schweizer[5] ではリスク資産価格過程が cadlag なセミマルチンゲールの仮定で"Local Risk-Minimization"と言う、"Risk-Minimization"を拡張した概念を導入した。これらの論文では"Risk-Minimizing strategy"を具体的に見つけるための必要十分条件は"Kunita and Watanabe decomposition"(Kunita and Watanabe[3]) を得ることであると述べている。

あるフィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, P)$ を与える。ただし $\mathcal{F}_t$ は右連続とする。また X は2乗可積分右連続マルチンゲールとし、

$\mathcal{H} = \{\eta = \{\eta_t\}_{0\leq t\leq T} | \eta :$ 予測可能 $(predictable), E[\int_0^T (\eta_s)^2 d\langle X\rangle_s] < \infty\}$

$\mathcal{M} = \{M = \{M_t\}_{0\leq t\leq T} | M = \int_0^t \eta_s dX_s; t\in[0,T], \eta\in\mathcal{H}\}$

$\mathcal{M}^{\perp} = \{N = \{N_t\}_{0\leq t\leq T} | N :$ 2乗可積分右連続マルチンゲール, $\langle N, M\rangle = 0, \forall M\in\mathcal{M}\}$

とおく。

戦略 H によるポートフォリオの割引価値過程 $V(H) = \{V_t(H)\}_{0\leq t\leq T}$ は

$$V_t(H) = H_t^0 + H_t^1 X_t$$

と書ける。ただし H_t^0 や H_t^1 はリスクフリー資産やリスク資産の時点 t における保有数とする。

戦略 $H = (H^0, H^1)$ に関する定義は以下のようである；

Definition 2.1 H^0 は $\mathcal{F}_t$ 適合で $H^1\in\mathcal{H}$ とし、$V(H)$ は右連続なパスをもつとする。

1. H によるコスト過程 $C(H) = \{C_t(H)\}_{0\leq t\leq T}$ を

$$C_t(H) = V_t(H) - \int_0^t H_s^1 dX_s$$

で定義する。

2. H が"*Mean-self-financing*"であるとは、$C(H)$ がマルチンゲールになることである。特に $C(H)$ が t によらないとき、H は"*self-financing*"である。

3. 満期 T における条件付請求権 Γ は $\Gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ で与えられているものとする。
H が許容的 *(admissible)* であるとは

$$V_T(H) = \Gamma \ a.s.$$

を満たすことである。

Definition 2.2 許容的戦略 H の時点 t における残存リスクを

$$R_t(H) = E[\{C_T(H) - C_t(H)\}^2 | \mathcal{F}_t]$$

とする。このとき H が"*Risk-Minimizing*"であるとは次の条件を満たすことである。
"*For any* $t \in [0, T]$,

$$R_t(H) \leq R_t(\phi) \ a.s.$$

for every admissible strategy ϕ"

Definition 2.3 $\Gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ なる条件付請求権 Γ に対して

$$\Gamma = \Gamma_0 + \int_0^T \eta_s dX_s, \ \ E[\int_0^T (\eta_s)^2 d\langle X \rangle_s] < \infty$$

なる予測可能過程 η と定数 Γ_0 が存在するとき、Γ は *attainable* という。特に任意の Γ が *attainable* のとき完備市場と呼ぶ。

[1],[5] によると次の命題・定理が導かれる;

Proposition 2.1 条件付請求権 Γ は $\Gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ とする。以下同値;

1. Γ に対して許容的な *self-financing* 戦略 H が存在する
2. Γ に対して"$R_t(H) = 0 \ a.s.,\ 0 \leq t \leq T$"なる許容的な戦略 H が存在する
3. Γ は *attainable*

Theorem 2.1 $\Gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ なる条件付請求権 Γ に対して次のような分解 *(Kunita and Watanabe decomposition)*;

$$\Gamma = E[\Gamma] + \int_0^T \eta_s dX_s + \pi_T$$

が得られたとき、*Risk-Minimizing strategy* $H = (H^0, H^1)$ が次のように存在する;

$$H_t^1 = \eta_t (= \tfrac{d\langle V^*, X \rangle_t}{d\langle X \rangle_t})$$

$$H_t^0 = V_t^* - \eta_t X_t$$

ただし、$V^* = \{V_t{}^*\}_{0 \leq t \leq T}$ は $\{E[\Gamma | \mathcal{F}_t]\}_{0 \leq t \leq T}$ を修正した右連続マルチンゲールで $\eta \in \mathcal{H}, \pi \in \mathcal{M}^{\perp}$

3 Model

確率空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 上で一次元標準ブラウン運動 $W = \{W_t\}_{0\leq t\leq T}$、確率空間 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 上でパラメータ λ の指数分布に従う確率変数 τ、そして確率空間 $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)$ 上で $[0,1)$ の一様分布に従う確率変数 ξ を定義する。各確率空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i), i=1,2,3$ 上でフィルトレーション $\{\mathcal{F}^W_{1,t}\}_{0\leq t\leq T}$ と σ 加法族 $\mathcal{F}^\tau_2, \mathcal{F}^\xi_3$ を以下のように与える；

$$\mathcal{F}^W_{1,t} = \sigma(W_s; s\leq t)\vee\mathcal{N}_1, \mathcal{F}^\tau_2 = \sigma(\tau), \mathcal{F}^\xi_3 = \sigma(\xi)$$

ただし $\mathcal{N}_1$ は P_1-零集合全体の集合とする。このとき確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備直積空間

$$\prod_{i=1}^{3}(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$$

で与え、その上でフィルトレーション $\{\mathcal{F}^W_t\}_{0\leq t\leq T}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ を

$$\mathcal{F}^W_t = (\mathcal{F}^W_{1,t}\times\{\emptyset, \Omega_2\}\times\{\emptyset, \Omega_3\})\vee\mathcal{N} \quad if\ 0\leq t\leq T$$

$$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \mathcal{F}^W_t & if\ t<T \\ (\mathcal{F}^W_{1,T}\times\mathcal{F}^\tau_2\times\mathcal{F}^\xi_3)\vee\mathcal{N} & if\ t=T \end{cases}$$

と定義する。ただし

$$\mathcal{N} = \sigma(\{F\subset\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3 | \exists G\in\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_3\ s.t.\ F\subset G, P_1\times P_2\times P_3(G)=0\})$$

このとき Moller[4] の Lemma3.4 より $\mathcal{F}^W_t, \mathcal{F}_t$ が右連続かつ完備になることも確認できる。さらに W, τ, ξ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上へ

$$W(\omega) = W(\omega_1), \tau(\omega) = \tau(\omega_2), \xi(\omega) = \xi(\omega_3) \quad if\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\in\Omega$$

のように拡張すると、拡張された W, τ, ξ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で互いに独立な一次元標準ブラウン運動、パラメータ λ の指数分布に従う確率変数、$[0,1)$ の一様分布に従う確率変数となることに注意せよ。

3.1 Term structure

Definition 3.1 金利過程 $r = \{r_t\}_{0\leq t\leq T}$ はフィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^W_t, P)$ 上で定義される次のマルコフ型確率微分方程式の解とする；

$$dr_t = \sigma(t, r_t)dW_t + \mu(t, r_t)dt, r_0 : constant \tag{1}$$

ただし $\sigma(t,x) > 0$ とし、特に r は *non-negative* なもので考える。

注 3.1 一般に (1) の解が存在する十分条件は以下のどちらか一方であることが知られている；

1. $|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq C|x-y|, \int_0^T\{\sigma(t,0)^2+\mu(t,0)^2\}dt<\infty$
2. $|\mu(t,x)-\mu(t,y)|\leq C|x-y|, |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq\rho(|x-y|)$
   $\rho:[0,T]\to[0,T]$ は狭義増加関数で $\rho(0)=0, \int_{(0,t)}\rho^{-2}(u)du=\infty, \forall t\in(0,T]$

注 3.2 r はマルコフ性をもつ、つまり任意の有界ボレル関数 f に対して

$$for\ s<t \quad E[f(r_t)|\mathcal{F}_s^W]=E[f(r_{t-s}^{0,x})]|_{x=r_s}$$

Definition 3.2 満期 T なる割引国債価格過程 $B=\{B_t\}_{0\leq t\leq T}$ を以下を満たす連続確率過程とする；

$$B_t=E[e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t^W]$$

またその割引価値過程 $X=\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ を次のように表しておく；

$$X_t=B_t e^{-\int_0^t r_s ds}$$

注 3.3 X は $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 上で 2 乗可積分マルチンゲールになる。

3.2 A contingent claim

Definition 3.3 満期 T における担保資産の価値 Λ_T を

$$\Lambda_T=1_{\{T<\tau\}}+\xi e^{\int_\tau^T r_s ds}1_{\{T\geq\tau\}}$$

とする。ここで $\xi\in[0,1)$ は破産時点 τ の担保資産の回収率と解釈する。

Definition 3.4 満期 T における条件付請求権 $\Gamma=\Lambda_T\wedge K$ をシニア債 *(senior security)* といい、$\Gamma=(\Lambda_T-K)^+$ を劣後債 *(equity security)* という。ここで権利行使価格 $K\in(0,1)$ は信用補完額と解釈する。

Proposition 3.1 $(\Lambda_T\wedge K)e^{-\int_0^T r_s ds}, (\Lambda_T-K)^+e^{-\int_0^T r_s ds}$ 共に *2* 乗可積分

証明 $(\Lambda_T\wedge K)e^{-\int_0^T r_s ds}$ は有界。$(\Lambda_T-K)^+e^{-\int_0^T r_s ds}$ の *2* 乗可積分性は $(0\leq)\Lambda_T\leq 1+e^{\int_\tau^T r_s ds}$ に注意すればわかる。

4 Main result

Section3 で X と $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を導入した。ただし X が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上で 2 乗可積分マルチンゲールであることに注意せよ (注 3.2.)。今 $\mu(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)$ に関する 2 階微分作用素を

$$\mathcal{A}_t F(x) = \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x), F \in C^2(\mathbf{R})$$

と定めておく ($\sigma(t,x) > 0$ と仮定していた)。

Theorem 4.1 $v \in C^{1,2}([0,T) \times \boldsymbol{R}) \cap C([0,T] \times \boldsymbol{R})$ は

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + v|x| &= \mathcal{A}_t v; \ in \ [0,T) \times \boldsymbol{R} \\ v(T,x) &= 1 \end{cases}$$

を満たし、かつ

$$\max_{0 \le t \le T}|v(t,x)| \le M(1+|x|^m) \quad for \ some \ M > 0, m \ge 2, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) > 0$$

とし、$w \in C^{1,2}([0,T) \times \boldsymbol{R}) \cap C([0,T] \times \boldsymbol{R})$ は

$$\begin{cases} -\frac{\partial w}{\partial t} + 2w|x| &= \mathcal{A}_t w; \ in \ [0,T) \times \boldsymbol{R} \\ w(T,x) &= 1 \end{cases}$$

を満たし、かつ

$$\max_{0 \le t \le T}|w(t,x)| \le L(1+|x|^l) \quad for \ some \ L > 0, l \ge 2$$

とせよ。さらに

(1) $k \in C^{1,2}([0,T) \times \boldsymbol{R}) \cap C([0,T] \times \boldsymbol{R})$ が

$$\begin{cases} -\frac{\partial k}{\partial t} + k|x| &= \mathcal{A}_t k + \alpha; \ in \ [0,T) \times \boldsymbol{R} \\ k(T,x) &= Ke^{-\lambda T}, \end{cases}$$

$$where \ \alpha(t,x) = \lambda e^{-\lambda t}(Kv(t,x) - \frac{K^2}{2}w(t,x))$$

を満たし、かつ

$$\max_{0 \le t \le T}|k(t,x)| \le A(1+|x|^a) \quad for \ some \ A > 0, a \ge 2$$

ならば、次のような分解;

$$e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T \wedge K) = E[e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T \wedge K)] + \int_0^T \eta_s dX_s + \pi_T,$$
$$where \ \eta \in \mathcal{H}, \pi \in \mathcal{M}^{\perp}$$

として

$$\eta_t = K(1-e^{-\lambda t})+(\tfrac{\partial k}{\partial x}(t,r_t)-\tfrac{\lambda K^2}{2}e^{-\int_0^t r_s ds}\int_0^t e^{\int_0^u r_s ds-\lambda u}du\tfrac{\partial w}{\partial x}(t,r_t))/\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,r_t)$$
$$\pi_t = \Lambda_T \wedge K - (Ke^{-\int_0^T r_s ds} - \tfrac{\lambda K^2}{2}e^{-\int_0^T r_s ds}\int_0^T e^{\int_0^u r_s ds-\lambda u}du)\ if\ t=T;$$
$$=0\ if\ t<T$$
$$E[e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T \wedge K)] = k(0,r_0)$$

と表せる。

(2) $h \in C^{1,2}([0,T)\times \boldsymbol{R}) \cap C([0,T]\times \boldsymbol{R})$ が

$$\begin{cases} -\frac{\partial h}{\partial t}+h|x| &= \mathcal{A}_t h+\beta;\ in\ [0,T)\times \boldsymbol{R} \\ h(T,x) &= (1-K)e^{-\lambda T}, \end{cases}$$
$$where\ \beta(t,x)=\lambda e^{-\lambda t}(\frac{1}{2}-Kv(t,x)+\frac{K^2}{2}w(t,x)).$$

を満たし、かつ

$$\max_{0\le t\le T}|h(t,x)|\le B(1+|x|^b)\quad for\ some\ B>0, b\ge 2$$

ならば、次のような分解;

$$e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T-K)^+ = E[e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T-K)^+]+\int_0^T \theta_s dX_s+\rho_T,$$
$$where\ \theta\in\mathcal{H}, \rho\in\mathcal{M}^\perp$$

として

$$\theta_t = K(e^{-\lambda t}-1)+(\tfrac{\partial h}{\partial x}(t,r_t)+\tfrac{\lambda K^2}{2}e^{-\int_0^t r_s ds}\int_0^t e^{\int_0^u r_s ds-\lambda u}du\tfrac{\partial w}{\partial x}(t,r_t))/\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,r_t)$$
$$\rho_t = (\Lambda_T-K)^+ -\ if\ t=T;\ =0\ if\ t<T$$
$$E[e^{-\int_0^T r_s ds}(\Lambda_T-K)^+] = h(0,r_0)$$

と表せる。

注 4.1 定理 *2.1.* より、

1. シニア債に対する *Risk-Minimizing strategy* $H=(H^0,H^1)$ は

$$H_t^1=\eta_t,\ H_t^0=k(0,r_0)+\int_0^t \eta_s dX_s-\eta_t X_t$$

2. 劣後債に対する *Risk-Minimizing strategy* $H=(H^0,H^1)$ は

$$H_t^1=\theta_t,\ H_t^0=h(0,r_0)+\int_0^t \theta_s dX_s-\theta_t X_t$$

注 4.2 (1), (2) 共に $\pi\neq 0, \rho\neq 0$ より、不完備市場であることがわかる。

REFERENCES

1. H.Follmer and D.Sonderman(1986),Hedging of non-redundant contingent claims,in:W.Hildenbrand and A.Mas-Colell,eds,Contributions to Mathmatical Economics 205-223
2. I.Karatzas and S.E.Shereve,"Brownian Motion and Stochastic Calculus,2nd ed",Springer
3. H.Kunita and S.Watanabe(1967),"On Square Integrable Martingales",Nagoya Math.J.30,pp209-245
4. T.Moller(2003),"Indifference Pricing of Insurance Contracts in aproduct space model",Finance Stochast.7,P197-217
5. M.Schweizer(1991),"Option Hedging for semimartingales",Stochastic Processes and their Applications 37,pp339-363