数理解析研究所講究録 1458 巻 2005 年 149-155

A refinement of the Cauchy-Schwarz inequality and its generalizations

木更津工業高等専門学校・情報工学科　和田　州平 (Shuhei Wada) *
Depertment of Information and Computer Engineering,
Kisarazu National College of Technology

1　序論と目的

n 個の実数値 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ に対する Cauchy-Schwarz 不等式

$$(\sum_1^n a_i b_i)^2 \leq \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$$

は，大変よく知られている．Daykin-Eliezer-Carlitz は，任意の負でない実数 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ にたいして

$$(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i})^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

を満たす正数値関数 f, g の特徴付けを得た [2]．筆者はこの結果を鑑みて，上記の特徴付けを包含する，行列版 Cauchy-Schwarz 不等式およびその改良不等式を考察し，以下の定理を得た．

定理 1. 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\,\sigma\,B) \otimes (A\,\sigma^{\perp}\,B) + (A\,\sigma^{\perp}\,B) \otimes (A\,\sigma\,B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

ここで σ は久保一安藤の意味での作用素平均を表す．

本稿では，さらに，上の定理の一般化について議論する．

*E-mail: wada@j.kisarazu.ac.jp

2 Cauchy-Schwarz 不等式とその改良

2.1 Cauchy-Schwarz 不等式

Cauchy-Schwarz 不等式は解析学全般で応用されており，重要性は言うまでもない．

命題 2.1. n 個の負でない実数値 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ を考える．このとき

$$(\sum_1^n a_i b_i)^2 \le \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 \tag{2.1}$$

となる．

対象とする実数値の中に負の数を混ぜても，不等式は成り立つが，

$$(\sum_1^n a_i b_i)^2 \le (\sum_1^n |a_i||b_i|)^2 \le \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$$

となるので，本稿では負でない場合に限定する．

2.2 Cauchy-Schwarz 不等式の改良

Cauchy-Schwarz 不等式の改良は様々なタイプのものが知られている [5]．本稿では，改良の例を 2，3 紹介し，それらを一般化する．

2.2.1 Milne の不等式

次の不等式は「Milne の不等式 (Milne's inequality)」と呼ばれる [3].

命題 2.2. n 個の負でない実数値 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ を考える．このとき

$$(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i})^2 \le \sum_1^n (a_i + b_i) \sum_1^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \le \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

となる．

2.2.2 Callebaut 不等式

次の不等式は「Callebaut 不等式 (Callebaut inequality)」と呼ばれる [4].

命題 2.3. n 個の負でない実数値 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ を考える．このとき

$$(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i})^2 \le \sum_1^n a_i^t b_i^{1-t} \sum_1^n a_i^{1-t} b_i^t \le \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i,$$

ここで，$t \in [0, 1]$.

Callebaut は t の関数 $\sum_1^n a_i^t b_i^{1-t}$ の単調性についても議論している [4].

命題 2.4. n 個の負でない実数値 $a_1, a_2, \ldots a_n$ と $b_1, b_2, \ldots b_n$ を考える．このとき，$1 \geq t \geq s \geq \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \geq s \geq t \geq 0$ ならば

$$\sum_1^n a_i^t b_i^{1-t} \sum_1^n a_i^{1-t} b_i^t \geq \sum_1^n a_i^s b_i^{1-s} \sum_1^n a_i^{1-s} b_i^s.$$

特に，$n = 2$ で，$a_1 = b_2, a_2 = b_1$ の場合はよく知られた結果となる．

系 2.5. a, b を正の数とする．このとき，$1 \geq t \geq s \geq \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \geq s \geq t \geq 0$ ならば

$$a^t b^{1-t} + a^{1-t} b^t \geq a^s b^{1-s} + a^{1-s} b^s.$$

2.2.3 Daykin-Eliezer-Carlitz の考察

Daykin と Elizer は American Mathematical Monthly 誌上で以下のような問題を提出した [2].

正の値を取る関数 $f(x,y), g(x,y)$ が任意の正数列 $a_i, b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i$$

となる為の条件を求めよ．

上の問題は，上で述べた，Cauchy-Schwarz 不等式の改良のうちで最も一般化された問題である．この問題の答えが分かれば今まで紹介してきた不等式は，その系となる．

命題 2.6. (Daykin-Eliezer-Carlitz) 正数の組から正数への関数 $f(x,y), g(x,y)$ が任意の正数列 $a_i, b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\left(\sum_1^n \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leq \sum_1^n f(a_i, b_i) \sum_1^n g(a_i, b_i) \leq \sum_1^n a_i \sum_1^n b_i \qquad (2.2)$$

となる為の必要十分条件は次の 3 つが全て満たされることである．

1. $f(a,b)g(a,b) = ab$
2. $f(ka, kb) = kf(a,b)$
3. $f(1,b) \leq f(1,a), \frac{f(1,a)}{a} \leq \frac{f(1,b)}{b}, \quad (b \leq a).$

証明．定理が成り立つとして，3 つの条件を導く．

まず，$n = 1$ の場合を考えると，$f(a,b)g(a,b) = ab$ となることは明らか．

次に $n=2$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2 &\le [f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)][g(a_1,b_1)+g(a_2,b_2)]\\ &\le (a_1+a_2)(b_1+b_2).\end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned}2\sqrt{a_1b_1}\sqrt{a_2b_2} &\le f(a_1,b_1)g(a_2,b_2)+f(a_2,b_2)g(a_1,b_1)\\ &\le a_1b_2+a_2b_1\end{aligned}$$

ここで $g(a,b)$ を $\frac{ab}{f(a,b)}$ と書き換えると

$$\begin{aligned}2\sqrt{a_1b_1}\sqrt{a_2b_2} &\le f(a_1,b_1)\frac{a_2b_2}{f(a_2,b_2)}+f(a_2,b_2)\frac{a_1b_1}{f(a_1,b_1)}\\ &\le a_1b_2+a_2b_1,\end{aligned}$$

両辺を $\sqrt{a_1b_1}\sqrt{a_2b_2}$ で割ると,

$$2\le\frac{f(a_1,b_1)}{f(a_2,b_2)}\frac{\sqrt{a_2b_2}}{\sqrt{a_1b_1}}+\frac{f(a_2,b_2)}{f(a_1,b_1)}\frac{\sqrt{a_1b_1}}{\sqrt{a_2b_2}}\le\frac{\sqrt{a_1b_2}}{\sqrt{a_2b_1}}+\frac{\sqrt{a_2b_1}}{\sqrt{a_1b_2}}. \tag{2.3}$$

$a_2=\lambda a_1, b_2=\lambda b_1$ の場合も，上の式は成立するから

$$2\le\frac{f(a_1,b_1)}{f(\lambda a_1,\lambda b_1)}\lambda+\frac{f(\lambda a_1,\lambda b_1)}{f(a_1,b_1)}\lambda^{-1}\le 2$$

よって，$f(\lambda a,\lambda b)=\lambda f(a,b)$ がわかる．さて，$F(a):=f(1,a)$ とすると $f(a,b)=aF(b/a)$ となるので上の不等式を F を用いて式 2.3 を書き直せば

$$2\le\frac{f(1,a)}{f(1,b)}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{f(1,b)}{f(1,a)}\sqrt{\frac{a}{b}}\le\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$$

となる．関数 $x+\frac{1}{x}$ の挙動を考えると，$a\ge b$ ならば

$$\frac{f(1,a)}{f(1,b)}\sqrt{\frac{b}{a}}\le\sqrt{\frac{a}{b}},\quad\frac{f(1,b)}{f(1,a)}\sqrt{\frac{a}{b}}\le\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

が分かる．この不等式は 3 番目の条件を意味する．

逆に f,g が上記 3 条件を満たしているとき，不等式

$$\frac{f(1,a)}{f(1,b)}\sqrt{\frac{b}{a}}\le\sqrt{\frac{a}{b}},\quad\frac{f(1,b)}{f(1,a)}\sqrt{\frac{a}{b}}\le\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

がなりたつので,

$$2\le\frac{f(1,b)\sqrt{a}}{f(1,a)\sqrt{b}}+\frac{f(1,a)\sqrt{b}}{f(1,b)\sqrt{a}}\le\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

となる．$a = \frac{a_i}{b_i}$, $b = \frac{a_j}{b_j}$ とすると，

$$2 \leq \frac{f(a_i,b_i)}{f(a_j,b_j)}\frac{\sqrt{a_jb_j}}{\sqrt{a_ib_i}} + \frac{f(a_j,b_j)}{f(a_i,b_i)}\frac{\sqrt{a_ib_i}}{\sqrt{a_jb_j}} \leq \frac{\sqrt{a_ib_j}}{\sqrt{a_jb_i}} + \frac{\sqrt{a_jb_i}}{\sqrt{a_ib_j}}.$$

となる．この式を変形すれば

$$\begin{aligned}2\sqrt{a_ib_i}\sqrt{a_jb_j} &\leq f(a_i,b_i)\frac{a_jb_j}{f(a_j,b_j)} + f(a_j,b_j)\frac{a_ib_i}{f(a_i,b_i)} \\ &\leq a_ib_j + a_jb_i\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}2\sum_{a1\leq i<j\leq n}\sqrt{a_ib_i}\sqrt{a_jb_j} &\leq \sum_{a1\leq i<j\leq n} f(a_i,b_i)\frac{a_jb_j}{f(a_j,b_j)} + f(a_j,b_j)\frac{a_ib_i}{f(a_i,b_i)} \\ &\leq \sum_{a1\leq i<j\leq n} a_ib_j + a_jb_i.\end{aligned}$$

この式は，式 2.2 と同じである． □

補足 1. 上の証明からも分かるように，上記 3 条件は，以下の 3 条件と同値である．

1. $f(a,b)g(a,b) = ab$
2. $f(ka,kb) = kf(a,b)$
3. $2 \leq \frac{f(1,b)\sqrt{a}}{f(1,a)\sqrt{b}} + \frac{f(1,a)\sqrt{b}}{f(1,b)\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

補足 2. 上記 3 条件が以下と同値であることもすぐに分かる．

1. $f(a,b)g(a,b) = ab$
2. $f(ka,kb) = kf(a,b)$
3. $f(a_1,b_1) \leq f(a_2,b_2)$, $(a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2)$.

さて，命題 2.6 の 3 条件を満たす関数について考えてみる．まず，簡単な例としては $f(x,y) = x+y$ がある．この関数 f からできる不等式が Milne の不等式である．一方，Callebaut の不等式は $f(x,y) = x^ty^{1-t}$ とすれば得られる．また，正規化作用素単調関数と言われる関数 F をつかって定義した関数 $f(x,y) := xF(\frac{y}{x})$ はすべてこの性質を満たすことが分かる [7]．上で紹介した 2 つの関数も，作用素単調関数から作ることができる．

しかしながら，上の 3 条件を満たす関数が，必ずしも作用素単調関数から作られるわけではない．例えば，$f(t,s) := \sqrt{\frac{t^2+s^2}{2}}$ とすると，f は 3 条件を満たすが $f(1,t)$ は作用素単調でない．

3 Matrix版Cauchy-Schwarz不等式とその改良

3.1 Matrix版Cauchy-Schwarz不等式

Cauchy-Schwarz不等式を，行列を用いて一般化する方法は，幾つか知られている．本稿では，正定値行列 A, B に対して成り立つ以下の不等式

$$2A\#B \otimes A\#B \leq A \otimes B + B \otimes A$$

を考え，これをMatrix版Cauchy-Schwarz不等式と見ることにする（蛇足だが，不等式 $A\#B \otimes A\#B \leq A \otimes B$ は正しくない）．この不等式は，算術幾何平均の関係で，正しいことは明らかである．また，この不等式における行列 A, B を対角行列とし，さらに両辺のトレースをとれば不等式2.1(Cauchy-Schwarz不等式)が得られる．

3.2 Matrix版Cauchy-Schwarz不等式の改良

上で述べたMatrix版Cauchy-Schwarz不等式の改良を考える．ここで，前述のDaykin-Eliezer-Carlitzの考察を全て含むような改良不等式を作るとすれば，自然に以下のような議論になる．

命題2.6の3条件を満たす関数 f, g に関して，正値行列同士の2項演算 σ を

$$A\sigma B := A^{\frac{1}{2}} f(1, A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}},$$
$$A\sigma^{\perp} B := A^{\frac{1}{2}} g(1, A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}},$$

と定義すると，次の不等式が成立する．

補題 3.1. 可逆な正値行列 A, B に対して

$$\begin{aligned} 2A\#B \otimes A\#B &\leq (A\,\sigma\, B) \otimes (A\,\sigma^{\perp} B) + (A\,\sigma^{\perp} B) \otimes (A\,\sigma\, B) \\ &\leq A \otimes B + B \otimes A, \end{aligned}$$

証明. $C := A^{-1/2} B A^{-1/2}$ とする．2項演算 σ に対応する関数を f とすると上の不等式は以下の不等式と同値である．

$$2\sqrt{C} \otimes \sqrt{C} \leq f(C) \otimes \frac{C}{f(C)} + \frac{C}{f(C)} \otimes f(C) \leq C \otimes 1 + 1 \otimes C.$$

ここで，$C \otimes 1$ と $1 \otimes C$ で作られる可換C*環を連続関数環に表現して，対応する関数を $\varphi \geq 0$ と $\psi \geq 0$ とする．すると $\sqrt{C} \otimes \sqrt{C}$ は $\sqrt{\varphi\psi}$ に，$f(C) \otimes \frac{C}{f(C)} + \frac{C}{f(C)} \otimes f(C)$ は $f(\varphi)\frac{\psi}{f(\psi)} + \frac{\varphi}{f(\varphi)} f(\psi)$ へと変換でき，示すべき不等式は，連続関数環上の次の不等式になる．

$$2\sqrt{\varphi\psi} \leq f(\varphi)\frac{\psi}{f(\psi)} + \frac{\varphi}{f(\varphi)} f(\psi) \leq \varphi + \psi.$$

さて，f は命題 2.6 の条件を満たすので t の関数 $f(1,t)$ は補足 1 の条件 3 を満たす． □

前節の終わりに指摘したように，作用素単調関数から常套的なやり方で作られる 2 変数関数は命題 2.6 の 3 条件を満たす．したがって，次の定理が成り立つ．

定理 1． 任意の正定値行列 A と B に対して

$$\begin{aligned}2A\#B\otimes A\#B &\le (A\,\sigma\,B)\otimes(A\,\sigma^{\perp}\,B)+(A\,\sigma^{\perp}\,B)\otimes(A\,\sigma\,B)\\ &\le A\otimes B+B\otimes A,\end{aligned}$$

ここで σ は久保−安藤の意味での作用素平均を表す．

補足 3. 上の定理において，σ が算術平均の場合は，Milne の定理の一般化であり，α-power mean の場合は Callebaut 不等式の一般化である．また，上の定理は正定値行列ばかりでなく無限次元ヒルベルト空間上の正定値作用素でも成り立つ．

系 3.1. 正定値行列 A, B に対して

$$A\#B\circ A\#B\le (A\,\sigma\,B)\circ(A\,\sigma^{\perp}\,B)\le A\circ B,$$

ここで，$\circ$ はシューア積を表す．

補足 4. 上の系 3.1 において，$A\sigma B=A\#B$ の場合，$A\sigma B=\lambda A+(1-\lambda)B$ の場合，及び $A\sigma B=\frac{1}{2}(A+B)$ の場合は，既に安藤 [1] で示されている．

定理 1 において，特に $\sigma=\#_\alpha$ (α- power mean) とすれば $2A\#B\otimes A\#B$ から $A\otimes B+B\otimes A$ への媒介変数表示が得られる．

系 3.2. 正定値行列 A, B に対して

$$\begin{aligned}2A\#B\otimes A\#B &\le (A\,\#_\alpha\,B)\otimes(A\,\#_{1-\alpha}\,B)+(A\,\#_{1-\alpha}\,B)\otimes(A\,\#_\alpha\,B)\\ &\le A\otimes B+B\otimes A.\end{aligned}$$

さらに，

$$(A\,\#_\alpha\,B)\otimes(A\,\#_{1-\alpha}\,B)+(A\,\#_{1-\alpha}\,B)\otimes(A\,\#_\alpha\,B)$$

は $[0,1/2]$ で単調減少，$[1/2,1]$ で単調増加となる．

証明. 系 3.1 と，系 2.5 より． □

補足 5. この系は，勿論，命題 2.4 を含む．